

Astra



Matematică

Vol. 1, Nr. 5

+ - × ÷

Noiembrie 1990

Conținut

Articole

<i>Inegalități între medii și aplicații, de L. Lupaș</i>	3
<i>Fracții cu simplificări frauduloase (III) de D. Aeu</i>	9
<i>Asupra unui criteriu necesar și suficient pentru convergența șirurilor, de V. Berinde</i>	18

Note

<i>Asupra unei inegalități geometrice, de D. M. Milorević, S. S. Dragomir</i>	22
<i>O serie irațională, de J. Sándor</i>	24

Pilule

<i>Asupra unei probleme, de P. Dieu</i>	26
<i>Utilizarea inegalităților dintre medii la extragerea rădăcinii, C. Călușiu</i>	28

<i>Probleme și soluții</i>	30
<i>Matematica pitică</i>	42
<i>Viața matematică</i>	44

Publicație a
Asociațiunii Transilvane pentru Literatura Română
și Cultura Poporului Român

Asupra unui criteriu necesar și suficient pentru convergența șirurilor

Vasile Berinde

Universitatea din Baia Mare
Facultatea de Litere și Științe
4800 Baia Mare, România

Abstract. The aim of this note is to show that a well known result used in the study of sequences is in fact a necessary and sufficient criterion. In order to illustrate this aspect, some applications are given.

În lucrare este scos în evidență faptul că un binecunoscut criteriu pentru studiul convergenței șirurilor este de fapt un criteriu necesar și suficient, deși în [5] este încadrat în subparagraful „criterii suficiente pentru convergența șirurilor“.

Teorema II. 4.1. din [5], pagina 45, are următorul enunț

TEOREMA 1. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Presupunem că există un număr real a și un șir $(b_n)_{n \geq 0}$ de numere reale pozitive convergent către zero astfel încât

$$(1) \quad |a_n - a| \leq b_n, \quad n \geq K \quad (K \text{ rang fixat}).$$

Atunci șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Acest rezultat, denumit îndeobște criteriul majorării (M), este inclus în [5] alături de criteriul mărginirii și monotoniei (MM), care este într-adevăr un criteriu suficient, după cum arată un exemplu clasic: șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, este convergent dar nu este monoton. Spre deosebire de acesta din urmă, criteriul M este de fapt necesar și suficient, adică avem

TEOREMA 2. Un șir de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita a dacă și numai dacă există un șir de numere pozitive $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către zero pentru care are loc relația (1).

Demonstrație. Suficiența rezultă din teorema 1. Pentru a demonstra necesitatea este suficient să definim șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prin

$$b_n = |a_n - a|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Observația 1. Superioritatea teoretică a criteriului M față de criteriul MM este evidentă și utilă — în practică — numai în anumite cazuri, și anume acolo unde se poate construi în mod netrivial șirul (b_n) (este clar că cel dat în demonstrația teoremei 2 nu are nici o eficiență în aplicații).

Din acest motiv criteriul M este mult mai rar folosit în rezolvarea problemelor.

Aplicațiile care urmează prezintă câteva situații care valorifică tocmai superioritatea evidențiată de teorema 2.

Aplicații. 1. Șirul $(U_n)_{n \geq 0}$ definit de recurența

$$(2) \quad U_{n+1} \cdot U_n - 2U_n = 3, \quad n \geq 0$$

cu $U_0 \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{6}{7}, 0\right) \cup (0, +\infty)$, este convergent.

Soluție. Se verifică imediat că, pentru $n \geq 2$, avem $U_n > 0$, și, de asemenea, pentru $n \geq 3$,

$$(3) \quad U_n < 2.$$

Din (2) obținem, pentru $n \geq 3$

$$|U_{n+1} - 3| = \frac{1}{U_n} \cdot |U_n - 3|$$

din care, folosind (3), deducem

$$|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2} \cdot |U_n - 3|, \quad n \geq 3$$

iar din aceasta

$$|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot |U_3 - 3|, \quad n \geq 3$$

ceea ce în virtutea criteriului M , înseamnă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 3.$$

Observația 2. Problema 1 constituie o extindere a unei probleme date la etapa județeană a concursului de matematică, 1984. Acolo condiția inițială era $U_0 < 0$.

Criteriul MM nu poate fi aplicat aici direct [2].

2. Arătați că șirul

$$\sqrt{7}, \sqrt{7-\sqrt{7}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}, \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}}, \dots$$

este convergent și determinați limita sa.

(Concursul W. L. PUTNAM, 1953)

Soluție. Punem $U_0 = \sqrt{7}$, $U_1 = \sqrt{7-\sqrt{7}}$. Ceilalți termeni ai șirului sînt dați de relația

$$U_{n+2} = \sqrt{7-\sqrt{7+U_n}}, \quad n \geq 0,$$

de unde deducem

$$U_{n+2} - 2 = \frac{3 - \sqrt{7+U_n}}{2 + \sqrt{7-\sqrt{7+U_n}}}$$

sau, după încă o transformare,

$$(4) \quad U_{n+2}-2 = \frac{2-U_n}{(2+U_{n+2})(3+\sqrt{7+U_n})}$$

Deoarece $U_0, U_1 \in (0,7)$, deducem că $U_n < 0, \forall n \geq 0$, și atunci din (4) obținem

$$|U_{n+2}-2| \leq \frac{1}{6} \cdot |U_n-2|, \quad n \geq 0$$

de unde

$$|U_n-2| \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot |U_0-2|, \quad n \geq 0,$$

și prin urmare $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 2$.

3. Fiind dat un număr real N_0 , dacă

$$N_{j+1} = \cos N_j,$$

arătați că $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j$ există și este independentă de N_0 .

(Concursul W. L. PUTNAM, 1952)

Soluție. Avem $N_1 = \cos N_0 \in [-1, 1]$ și $N_2 = \cos N_1 \in (0, 1)$. Prin inducție se arată că $N_j \in (0, 1)$, pentru $j \geq 2$.

Ecuatia $f(x) = x - \cos x = 0, x \in (0, 1)$, are o singură rădăcină a , căci $f'(x) < 0$, pentru $x \in [0, 1]$, $f(0) < 0$ și $f(1) > 0$.

Vom arăta că $(N_j)_{j \geq 0}$ are limita a care nu depinde evident, de N_0 . Într-adevăr, pentru $j \geq 0$

$$|N_{j+1}-a| = |\cos N_j - \cos a| = 2 \left| \sin \frac{N_j+a}{2} \sin \frac{N_j-a}{2} \right|,$$

și cum $\frac{N_j+a}{2} \in [0, 1) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{|N_j-a|}{2} \in [0, 1) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (j \geq 2)$$

deducem că, pentru $j \geq 2$

$$\sin \frac{N_j+a}{2} < \sin 1,$$

și $\left| \sin \frac{a-N_j}{2} \right| \leq \frac{|N_j-a|}{2},$

ășadar

$$|N_{j+1}-a| < (\sin 1) \cdot |N_j-a|, \quad \text{pentru } j \geq 2,$$

ceea ce conduce la

$$|N_j-a| < (\sin 1)^{j-2} \cdot |N_2-a|, \quad j \geq 2$$

adică $\lim_{j \rightarrow \infty} N_j = a$, căci $0 < \sin 1 < 1$.

Observația 3. Criteriul MM nu se poate aplica problemelor 1—3, șirurile respective nefiind monotone. În final, recomandăm cititorului să abordeze, prin această metodă, alte probleme din [1], [3], [4] și [5] probleme enunțate, în general, în condiții „mai tari” decât pretinde criteriul M.

BIBLIOGRAFIE

1. Batinețu, D. M. — *Șiruri*, Ed. Albatros, 1979.
2. Berinde, V. — *În legătură cu o problemă de concurs*, *Gazeta Mat.* 6/1985, p. 186—188.
3. Boata, I. — *Despre convergența șirurilor recurente de numere reale*, în *Gazeta Mat.*, 1/1980, p. 9—12.
4. Gleason, A. M., — *The W. L. Putnam mathematical competition*, The Math. Ass. of America, 1980.
5. Gussi, Gh., ș. a. — *Elemente de analiză matematică*, Manual ptr. cls. a XI-a, E. D. P. 1987.

MISCELANEE

1. Împărțiți numărul 13 în două, astfel încît în fiecare parte să rezulte 8.
2. Scădeți din 30 pe 222 astfel încît să obțineți 888.
3. Așezați nouă cifre de 9 în așa fel încît prin folosirea semnelor adunării și scăderii să obțineți un total egal tot cu 9.
4. Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 și 8, luate o singură dată, formați două numere a căror sumă să fie 9999.
5. Este posibil ca suma a două numere să fie egală cu fiecare din cele două numere?

Răspunsuri: 1. XIII tăiat cu o linie la mijloc; 2. $XXX-222=888$; 3. $9+9999-9999=9$ sau $9+99/99-99/99=9$; 4. $1234+8765=9999$; 5. $0+0=0$.