

O METODĂ DE TIP PUNCT FIX PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR CICLICE

VASILE BERINDE ȘI MĂDĂLINA PĂCURAR

REZUMAT. The aim of this paper is to introduce and illustrate by suitable examples a unifying technique for solving some classes of nonlinear cyclic systems. The method is essentially based on some fixed point theorems on product spaces. All notions and results are established in the context of the real line, thus being fully accessible to high school students and teachers.

1. INTRODUCERE

Un sistem cu n ecuații și n necunoscute de forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

se numește *ciclic* sau *circular* dacă este invariant la orice permutare *circulară* a necunoscutelor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, eventual cu excepția unei rearanjări a ecuațiilor. Să observăm că, în cazul $n = 2$, un sistem ciclic este de fapt un sistem *simetric* în sensul obișnuit.

Numeroase probleme care cer rezolvarea unor astfel de sisteme neliniare au fost propuse de-a lungul anilor în *Gazeta Matematică* [10] (dar și în alte reviste de matematici elementare). O listă aproape completă a acestora este prezentată în secțiunea finală a acestei note. Două exemple tipice de astfel de sisteme, preluate din [3] și [4], sunt următoarele:

$$\begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} \\ y = \sqrt{z+45} - \sqrt{z+5} \\ z = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5}, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} 3^x + 4^y = 5^z \\ 3^y + 4^z = 5^x \\ 3^z + 4^x = 5^y. \end{cases} \quad (1.3)$$

Sistemele ciclice apărute de-a lungul anilor în *Gazeta Matematică* [10] sunt de obicei rezolvate prin metode speciale, care exploatează expresiile particulare ce apar în ecuațiile sistemului, a se vedea spre exemplu primele două metode de rezolvare a Problemei 10 din [3] și [4].

Într-o lucrare din 1992, publicată într-o revistă de mai restrânsă circulație [2], primul autor a introdus o metodă unitară de rezolvare a

acelor sisteme circulare (1.1) care pot fi scrise echivalent sub forma

$$\begin{cases} x_1 = f(x_2) \\ x_2 = f(x_3) \\ \dots \\ x_{n-1} = f(x_n) \\ x_n = f(x_1), \end{cases} \quad (1.4)$$

tehnică ce a fost apoi preluată în [3] și [4].

Este ușor de văzut că în categoria (1.4) intră sistemul (1.2) dar nu și sistemul (1.3). Metoda folosită acolo este bazată în esență pe noțiuni și rezultate elementare din teoria punctului fix, care sunt accesibile la nivelul clasei a IX-a de liceu (dar a căror demonstrație completă cere cunoștințe de analiză din clasa a XI-a).

Să reamintim că dacă $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție dată, atunci numărul $a \in E$ se numește *punct fix* al lui f dacă $f(a) = a$ iar a se numește *punct periodic de ordin k* dacă este punct fix al iteratei $f^k := f \circ f \circ \dots \circ f$, unde compunerea se face de k ori.

În general este foarte dificil sau chiar imposibil să calculăm direct punctele periodice, chiar și în cazul unor funcții f foarte simple, a se vedea Observația 3 și exemplele din [2], [3] și [4]. Metoda noastră exploatează faptul că, pe de o parte, dacă $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este o soluție a sistemului (1.4), atunci $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt puncte periodice de ordinul n ale lui f și, pe de altă parte, faptul că, în anumite condiții, o funcție f nu are alte puncte periodice în afară de punctele sale fixe.

În acest fel, problema se reduce la una semnificativ mai simplă - aceea de a calcula punctele fixe ale lui f . Această proprietate o au spre exemplu *contractiile*, adică acele funcții $f : E \rightarrow E$ pentru care există o constantă $0 \leq \alpha < 1$ astfel încât

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \forall x, y \in E. \quad (1.5)$$

Binecunoscutul principiu de punct fix al lui Banach, a se vedea spre exemplu [5], ne asigură că dacă E este închisă și f este o contracție pe E , atunci f are un singur punct fix $\bar{x}$, care este și unicul punct fix al oricărei iterate f^n ($n > 1$) a lui f .

Menționăm faptul că metoda expusă și folosită în [2], [3] și [4] pentru rezolvarea sistemelor ciclice de forma (1.4) nu este limitată doar la situațiile în care avem asigurată unicitatea punctului fix pentru f , a se vedea Problema 10b din [3] și [4], caz în care f are de fapt trei puncte fixe.

Pornind de la faptul că metoda din [2], [3] și [4] se aplică numai pentru sistemele circulare de forma (1.4), în lucrarea de față ne propunem să extindem această metodă la cazul mai general al sistemelor

ciclice (1.1) care pot fi rescrise echivalent sub forma

$$\begin{cases} x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_{k+1}) \\ x_2 = f(x_3, x_4, \dots, x_{k+2}) \\ \dots \\ x_{n-1} = f(x_n, x_1, \dots, x_{k-1}) \\ x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_k), \end{cases} \quad (1.6)$$

unde $f : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție reală de k variabile reale, $E \subset \mathbb{R}$ și k este un număr natural satisfăcând condiția $1 \leq k < n$.

Evident, în cazul particular $k = 1$ vom regăsi metoda din [2], [3] și [4], căci în acest caz sistemul (1.6) se reduce la (1.4).

2. CÂTEVA REZULTATE DIN TEORIA PUNCTULUI FIX PE AXA REALĂ

Următorul rezultat este o variantă a teoremei de punct fix a lui Prešić [15], enunțată aici în cazul particular al axei reale, și va constitui unul dintre instrumentele de bază folosite la rezolvarea sistemelor ciclice în secțiunea următoare.

Teorema 1. Fie $E \subset \mathbb{R}$ o mulțime închisă, $k \in \mathbb{N}^*$ și $f : E^k \rightarrow E$ o funcție pentru care există constantele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_+$, cu $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \alpha < 1$ astfel încât să avem

$$|f(x_0, \dots, x_{k-1}) - f(x_1, \dots, x_k)| \leq \alpha_1 |x_0 - x_1| + \dots + \alpha_k |x_{k-1} - x_k|, \quad (2.1)$$

pentru orice $x_0, \dots, x_k \in E$.

Atunci f are un punct fix unic $\bar{x}$ în E , adică avem $f(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}$ și, în plus, $\bar{x}$ este unicul punct fix al oricărei iterate f^n a lui f .

Demonstrație. Considerăm funcția asociată $F : E \rightarrow E$, dată prin $F(x) = f(x, \dots, x)$, pentru orice $x, y \in E$. Avem:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |f(x, x, \dots, x) - f(y, y, \dots, y)| \leq \\ &\leq |f(x, \dots, x) - f(x, \dots, x, y)| + |f(x, \dots, x, y) - f(x, \dots, x, y, y)| + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ |f(x, x, y, \dots, y) - f(x, y, \dots, y)| + |f(x, y, \dots, y) - f(y, \dots, y)|. \end{aligned}$$

Atunci din (2.1) se obține:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \\ &\leq [\alpha_1 |x - x| + \alpha_2 |x - x| + \dots + \alpha_{k-1} |x - x| + \alpha_k |x - y|] + \\ &+ [\alpha_1 |x - x| + \alpha_2 |x - x| + \dots + \alpha_{k-1} |x - y| + \alpha_k |y - y|] + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ [\alpha_1 |x - y| + \alpha_2 |y - y| + \dots + \alpha_{k-1} |y - y| + \alpha_k |y - y|], \end{aligned}$$

și, prin urmare, pentru orice $x, y \in E$ avem inegalitatea

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i |x - y| = \alpha |x - y|, \quad (2.2)$$

care arată că F este contracție.

Fie acum $x_0 \in E$ fixat și fie $\{x_n\}_{n \geq 0}$ șirul aproximațiilor succesive definit de F și x_0 , adică,

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0. \quad (2.3)$$

Luăm $x := x_{n-1}$ și $y := x_n$ în (2.2) și obținem

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \alpha |x_{n-1} - x_n|, \quad n \geq 1. \quad (2.4)$$

Prin inducție din (2.4) se obține

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \alpha^n |x_0 - x_1|, \quad n \geq 1,$$

și atunci

$$|x_n - x_{n+p}| \leq (\alpha^n + \dots + \alpha^{n+p-1}) |x_0 - x_1|, \quad n \geq 1, \quad p \geq 1. \quad (2.5)$$

Cum $0 \leq \alpha < 1$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ și atunci ținând seama că

$$\alpha^n + \dots + \alpha^{n+p-1} = \frac{\alpha^n(1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} < \frac{\alpha^n}{1 - \alpha},$$

din (2.5) deducem că $\forall \epsilon > 0$, există $r = r(\epsilon)$ astfel ca

$$|x_n - x_{n+p}| < \epsilon, \quad \forall n \geq r, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

care arată că $\{x_n\}_{n \geq 0}$ este șir fundamental, deci convergent. Așadar, cum E este închisă, există $\bar{x} \in E$ astfel ca

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Pe de altă parte, din (2.4) rezultă că F este continuă pe E . Luând acum $n \rightarrow \infty$ în (2.3) obținem, pe baza continuității lui F că

$$\bar{x} = F(\bar{x}) \Leftrightarrow \bar{x} = f(\bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

ceea ce arată că $\bar{x}$ este un punct fix al lui F .

Demonstrăm prin reducere la absurd că $\bar{x}$ este unicul punct fix al lui F . Admitem existența unui $\bar{y} \in E$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ astfel ca $\bar{y} = F(\bar{y})$. Atunci din (2.2) rezultă că

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq \alpha |\bar{x} - \bar{y}|,$$

ceea ce conduce la contradicția $|\bar{x} - \bar{y}| \leq 0$.

Pentru a demonstra partea a doua a teoremei, folosim faptul că din (2.2) obținem prin inducție

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq \alpha^n |x - y|, \quad n \geq 1, \quad x, y \in E,$$

unde F^n este a n -a iterată a lui $F(x) = f(x, x, \dots, x)$.

□

Observația 1. În cazul particular $k = 1$, din Teorema 1 obținem exact teorema de punct fix a lui Banach pomenită mai sus, întrucât condiția (2.1) se reduce la condiția de contracție (1.5).

Este posibil să slăbim condiția generalizată de contracție (2.1), ca și în teorema următoare, care este o variantă particulară a unei teoreme din [9].

Teorema 2. Fie $E \subset \mathbb{R}$ o mulțime închisă, $k \in \mathbb{N}^*$ și $f : E^k \rightarrow E$ o funcție pentru care există $\lambda \in [0, 1)$ astfel încât

$$|f(x_0, \dots, x_{k-1}) - f(x_1, \dots, x_k)| \leq \lambda \max\{|x_0 - x_1|, \dots, |x_{k-1} - x_k|\}, \quad (2.6)$$

pentru orice $x_0, \dots, x_k \in E$.

Atunci există $\bar{x}$ în E pentru care $f(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}$.

Dacă, în plus, pentru orice $x, y \in E$, cu $x \neq y$, avem

$$|f(x, \dots, x) - f(y, \dots, y)| < |x - y| \quad (2.7)$$

atunci $\bar{x}$ este unicul punct în E cu $f(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}$ și, mai mult, $\bar{x}$ este unicul punct fix în E al oricărei iterate f^n :

$$f^n(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = \bar{x}, \forall n > 1. \quad (2.8)$$

Să reținem că, peste tot în această lucrare, dacă $f : E^k \rightarrow E$ este o funcție de k variabile ($k \geq 1$), atunci iterata f^n este definită doar pe diagonală lui E^k , prin

$$f^n(a, \dots, a) = f^{n-1}(f(a, \dots, a), \dots, f(a, \dots, a)), \forall n > 1. \quad (2.9)$$

Exemplul 1. ([9]) Fie $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ și $f : X^2 \rightarrow X$ definită astfel: $f(x, y) = \frac{x+y}{4}$, dacă $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $f(x, y) = 1 + \frac{x+y}{4}$, dacă $(x, y) \in [2, 3] \times [2, 3]$ și $f(x, y) = \frac{x+y}{4} - \frac{1}{2}$, dacă $(x, y) \in [0, 1] \times [2, 3]$ sau $(x, y) \in [2, 3] \times [0, 1]$. Atunci f satisface (2.6) cu $\lambda = \frac{1}{2}$ dar nu satisface (2.1), ceea ce rezultă luând $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 2$. Într-adevăr, admitând că (2.1) ar fi satisfăcută, am obține:

$$\begin{aligned} 2 &= |f(0, 0) - f(2, 2)| \leq |f(0, 0) - f(0, 2)| + |f(0, 2) - f(2, 2)| \leq \\ &\leq \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 0 = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot 2 < 2, \end{aligned}$$

contradicție. Deci f nu satisface (2.1). Să observăm că în acest caz, condiția (2.7) nu este satisfăcută, căci $f(0, 0) = 0$ și $f(2, 2) = 2$.

Pot fi enunțate și alte teoreme de punct fix, mult mai generale decât Teoremele 1 și 2, prin adaptarea la axa reală a unor rezultate recente din [11]-[13] și [16], deduse acolo pentru cazul general al unui spațiu metric complet.

De asemenea, este posibil să obținem concluzia din Teoremele 1 și 2 prin adaptarea la cazul $f : E^k \rightarrow E$, a unor rezultate stabilite în [2] pentru funcții $f : E \rightarrow E$.

Încheiem această secțiune prin enunțarea unui astfel de principiu de punct fix care va fi folosit în secțiunea următoare a lucrării. Pentru a

simplifica scrierea notăm cu $Fix(f)$ mulțimea punctelor fixe ale funcției f , adică

$$Fix(f) := \{a \in E : f(a, a, \dots, a) = a\}.$$

Propoziția 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $k \in \mathbb{N}^*$ și fie $f : I^k \rightarrow I$ o funcție pentru care $F(x) := f(x, x, \dots, x)$ este crescătoare pe I . Dacă $Fix(f) = \{\bar{x}\}$ atunci

$$Fix(f^n) = \{\bar{x}\}, \forall n > 1.$$

Demonstrație. Fie $b \in I$, $b \neq \bar{x}$. Demonstrăm că $b \notin Fix(f^n)$ pentru orice $n > 1$. Cum $Fix(f) = \{\bar{x}\}$ și $b \neq \bar{x}$ urmează că, fie $f(b, b, \dots, b) > b$, fie $f(b, b, \dots, b) < b$.

Considerăm primul caz. Atunci, deoarece $F(x) = f(x, x, \dots, x)$ este crescătoare, avem

$$f^n(b, b, \dots, b) \geq f^{n-1}(b, b, \dots, b) \geq \dots \geq f(b, b, \dots, b) > b$$

și prin urmare $b \notin Fix(f^n)$. Dacă $f(b, b, \dots, b) < b$, demonstrația este asemănătoare.

Observația 2. În cazul particular $k = 1$, din Propoziția 1 obținem tocmai Propoziția 3 din [2].

Propoziția 1 nu mai este valabilă dacă $F(x) = f(x, x, \dots, x)$ este descrescătoare, după cum arată următorul exemplu.

Exemplul 2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x_1, x_2) = -\frac{x_1 + x_2}{2}$. Atunci $Fix(f) = \{0\}$, căci $f(a, a) = -a$, câtă vreme $Fix(f^2) = \mathbb{R}$, căci $f^2(a, a) = f(f(a, a), f(a, a)) = a$.

3. REZOLVAREA UNITARĂ A SISTEMELOR CICLICE

Pentru simplificarea expunerii, vom face prezentarea metodei de rezolvare a sistemelor ciclice doar pentru cazul particular $n = 3$ și $k = 2$, deși ea se poate prezenta în toate detaliile pentru cazul general al sistemelor (1.6), cu n și k oarecare dar satisfăcând condiția $n > k \geq 1$.

Începem prin a prezenta metoda de rezolvare pentru un sistem de forma (1.6), dedus din sistemul (1.2).

Problema 1. Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul

$$\begin{cases} x = \sqrt{y + 45} - \sqrt{z + 5} \\ y = \sqrt{z + 45} - \sqrt{x + 5} \\ z = \sqrt{x + 45} - \sqrt{y + 5}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Rezolvare. Sistemul (3.1) este de forma (1.6) cu $n = 3$, $k = 2$ și

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 45} - \sqrt{x_2 + 5}, (x_1, x_2) \in A,$$

unde $A = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 - x_2 + 40 \geq 0\}$ și $E = [0, \infty)$. E ușor de stabilit că f satisface (2.6), adică pentru orice $(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in A$

avem,

$$|f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)| \leq \alpha_1 |x_0 - x_1| + \alpha_2 |x_1 - x_2|, \quad (3.2)$$

unde $\alpha_1 = \frac{1}{6\sqrt{5}}$ și $\alpha_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ satisfac condiția $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{2}{3\sqrt{5}} < 1$.

Atunci, din Teorema 1 rezultă că $F(x) := f(x, x) = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5}$ are un singur punct fix $\bar{x}$ în $E = [0, \infty)$, care este și unicul punct fix a iteratelor $f^n(x, x)$, pentru $n > 1$.

Se observă că $\bar{x} = 4$ este punctul fix căutat și atunci, pe baza Teoremei 1, $\bar{x} = 4$ este unica soluție a ecuației

$$x = f^3(x, x), \quad (3.3)$$

adică f nu are alte puncte periodice în afară de punctul său fix.

Arătăm acum că, dacă (a_1, a_2, a_3) este o soluție a sistemului (3.1), atunci a_1, a_2, a_3 sunt puncte periodice ale lui f adică sunt soluții ale ecuației (3.3). Folosind condiția (3.2) și ecuațiile sistemului obținem, pe rând,

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| &= |f(a_2, a_3) - f(a_3, a_1)| \leq \alpha_1 |a_2 - a_3| + \alpha_2 |a_3 - a_1|, \\ |a_2 - a_3| &= |f(a_3, a_1) - f(a_1, a_2)| \leq \alpha_1 |a_3 - a_1| + \alpha_2 |a_1 - a_2|, \\ |a_3 - a_1| &= |f(a_1, a_2) - f(a_2, a_3)| \leq \alpha_1 |a_1 - a_2| + \alpha_2 |a_2 - a_3|, \end{aligned}$$

care, însumate termen cu termen, ne conduc la concluzia că:

$$S \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot S,$$

unde am notat $S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1|$.

Deoarece $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha < 1$, inegalitatea de mai sus impune în mod necesar ca

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_1| = 0,$$

ceea ce înseamnă că $a_1 = a_2 = a_3 = a$, adică a_1, a_2, a_3 sunt puncte periodice ale lui f .

Prin urmare $(4, 4, 4)$ este unica soluție a sistemului (3.1).

Observația 3. Pentru a arăta cât de complicat ar fi fost să rezolvăm ecuația (3.3), transcriem aici doar ecuația $x = f^2(x, x)$:

$$x = \sqrt{\sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} + 45} - \sqrt{\sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} + 5}.$$

Să mai observăm că funcția $F(x)$ din Problema 1 este descrescătoare, astfel că nu putea fi folosită Propoziția 1 pentru a rezolva sistemul (3.1).

Dăm în continuare un exemplu de sistem ciclic pentru care Propoziția 1 este aplicabilă.

Problema 2. Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul

$$\begin{cases} 2x^3 - 7y^2 + 5x + 3y - 2 = z \\ 2y^3 - 7z^2 + 5y + 3z - 2 = x \\ 2z^3 - 7x^2 + 5z + 3x - 2 = y. \end{cases} \quad (3.4)$$

Rezolvare. Sistemul (3.4) este de forma (1.6) cu $k = 2$, $n = 3$ și

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - 7x_2^2 + 5x_1 + 3x_2 - 2,$$

și, la prima vedere, nu pare ușor abordabil cu ajutorul metodei date de Teorema 1. De aceea vom încerca să exploatăm Propoziția 1.

Deoarece funcția $F(x) := f(x, x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2$ are trei puncte fixe, și anume, $Fix(F) = \{1/2, 1, 2\}$, este clar că nu putem aplica Propoziția 1 pe întreaga axă reală.

Vom proceda în felul următor. Considerăm mai întâi restricția funcției F la intervalul $I_1 = (-\infty, 1/2]$, notată tot cu F . Avem

$$F'(x) = 6x^2 - 14x + 8 = 2(3x - 4)(x - 1),$$

prin urmare $F'(x) > 0$ pe I_1 ceea ce arată că F este strict crescătoare pe I_1 .

Aceasta înseamnă că, pentru orice $x \in I_1$, avem $F(x) \leq F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, adică $F(I_1) \subset I_1$ și acum putem aplica Propoziția 1 cu $E = I_1$. Rezultă că f nu are alte puncte periodice pe I_1 în afară de punctul său fix $\frac{1}{2}$.

Mai trebuie demonstrat acum că dacă (a_1, a_2, a_3) este o soluție a sistemului (3.4), atunci avem în mod necesar $a_1 = a_2 = a_3$ și deci a_1, a_2, a_3 sunt puncte periodice ale lui f . Tratăm efectiv doar cazul $a_2 = a_3 \neq a_1$, celelalte cazuri fiind asemănătoare. Din ultimele două ecuații ale sistemului (3.4) obținem că

$$a_2 = f(a_2, a_1), \quad a_2 = f(a_1, a_2),$$

ceea ce conduce la ecuația

$$(a_1 - a_2) [2(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2) + 7(a_1 + a_2 + 2)] = 0.$$

Expresia din paranteza dreaptă fiind întotdeauna strict pozitivă, deducem că $a_1 = a_2$, ceea ce contrazice presupunerea $a_1 \neq a_2$. Așadar nu putem avea soluții de forma (a_1, a_2, a_2) cu $a_2 = a_3 \neq a_1$ etc.

Prin urmare tripletul $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ este unica soluție a sistemului (3.4) pe intervalul $I_1 = (-\infty, 1/2]$.

În mod asemănător se deduce că $(1, 1, 1)$ este unica soluție a sistemului (3.4) pe $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ iar $(2, 2, 2)$ este unica soluție a sistemului (3.4) pe $I_3 = [2, \infty)$. Aceasta rezolvă complet problema.

Există sisteme ciclice pentru care nici măcar rezolvarea ecuației $x = F(x)$ nu este simplă, așa cum arată problema următoare, adaptată după Problema 10e din [3].

Problema 3. *Rezolvați în $\mathbb{R}_+^{*3}$ sistemul*

$$\begin{cases} x \left(2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \right) = 3z \\ y \left(2^{y-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{z}}} \right) = 3x \\ z \left(2^{z-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 3y. \end{cases} \quad (3.5)$$

Rezolvare. Funcția F este aici dată prin

$$F(x) := f(x, x) = \frac{1}{3}x \left(2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \right), \quad x > 0.$$

Este clar că $g(x) := \frac{1}{3}x2^{x-1}$ este crescătoare pe $(0, \infty)$. Pentru a determina un interval $I \subset (0, \infty)$ astfel ca funcția $h(x) := \frac{1}{3}x2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ să fie crescătoare pe I , calculăm mai întâi derivata lui h :

$$h'(x) = \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{6\sqrt{x}} (2\sqrt{x} - \ln 2), \quad x > 0.$$

Rezultă că h' este pozitivă, și prin urmare h este crescătoare, pe intervalul $I = (a, +\infty)$, unde $a = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 < 1$.

Acum putem aplica Propoziția 1 cu $E = (a, +\infty)$, deoarece F este crescătoare pe E . Determinăm acum punctele fixe ale lui F , ceea ce revine la a rezolva ecuația exponențială

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Folosind inegalitatea mediilor avem pe rând

$$\begin{aligned} 2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} &= \frac{2^x}{2} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{2^x + 2 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2} = \\ &= \frac{2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{2} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{2^{x + \frac{2}{\sqrt{x}}}}, \end{aligned}$$

cu egalitate dacă și numai dacă $2^x = 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$, adică $x = 1$. Pe de altă parte

$$x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3, \quad \forall x > 0,$$

ceea ce este echivalent cu inegalitatea evidentă $(\sqrt{x} - 1)^2 (\sqrt{x} + 2) \geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $x = 1$.

Combinând cele două inegalități rezultă că

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 3, \quad \forall x > 0,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = 1$. Aceasta arată că F are un singur punct fix, $\bar{x} = 1$, pe $E = (a, +\infty)$ etc.

Lăsăm pe seama cititorului să arate că, dacă (a_1, a_2, a_3) este o soluție a sistemului (3.5), atunci avem în mod necesar $a_1 = a_2 = a_3$ și deci a_1, a_2, a_3 sunt puncte periodice ale lui f , ceea ce ne asigură că $(1, 1, 1)$ este unica soluție a sistemului (3.5).

Propunem, în încheierea acestei secțiuni, rezolvarea unui sistem ciclic care este o adaptare la cazul $k = 2$ a unui sistem de forma (1.4) din [1] (Problema 58, pagina 137), abordat și în [2], [3], [4] și [7].

Problema 4. Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul

$$2x = y + \frac{2}{z}; \quad 2y = z + \frac{2}{x}; \quad 2z = x + \frac{2}{y}. \quad (3.6)$$

4. CONCLUZII ȘI CÂTEVA COMENTARII BIBLIOGRAFICE

Să observăm mai întâi că modul în care am argumentat, la rezolvarea Problemei 1, faptul că dacă (a_1, a_2, a_3) este o soluție a sistemului (3.1) atunci avem în mod necesar $a_1 = a_2 = a_3$, se constituie de fapt într-o metodă de sine stătătoare de rezolvare a sistemului respectiv, care nu apelează deloc la conceptul de punct fix.

Meritul principal al abordării noastre este însă acela că atrage atenția asupra principiilor de bază care stau în spatele acestei metode.

În al doilea rând, trebuie spus că nu toate sistemele ciclice au proprietatea menționată mai sus. Spre exemplu, sistemul ciclic din problema C.O.: 4923 (*Gazeta Matematică*, nr. 3/2008, pag. 160, autor D. Marinescu), adică sistemul

$$x^2 + 2yz - 6x + 3 = 0; y^2 + 2zx - 6y + 3 = 0; z^2 + 2xy - 6z + 3 = 0,$$

admite (a se vedea rezolvarea din *Gazeta Matematică*, nr. 9/2008, pag. 456), pe lângă soluția $(1, 1, 1)$ și următoarele soluții $(-1, 5, -1)$, $(5, -1, -1)$, $(-1, -1, 5)$, care nu verifică condiția $a_1 = a_2 = a_3$.

Să mai notăm că sistemul (1.3) este inspirat de un sistem simetric de aceeași formă (deci cu două necunoscute) care apare ca problema 17, pag. 129, în excelenta culegere de probleme [1], în care se mai găsesc și alte sisteme ciclice foarte interesante, multe preluate din revista *Matematica v škole*, ce pare a fi și sursa originară de inspirație a acestui tip de probleme pentru problemistica matematică românească.

Sugerăm cititorilor să ia în considerare toate sistemele care se obțin, pornind de la sistemele din lista de mai jos dar și a celor din lucrările [2], [3], [4], [8] și [14], prin același procedeu prin care sistemul (3.1) a fost obținut din (1.2).

O altă provocare este aceea de a căuta metode alternative de rezolvare pentru toate sistemele tratate anterior, dar și pentru sistemele din lista de mai jos, de a identifica acele situații în care metoda noastră nu poate fi aplicată și apoi să o perfecționeze în așa fel încât să acopere și acele cazuri.

Dăm în încheiere o listă a problemelor publicate în *Gazeta Matematică* în ultimii 20 de ani, cu scopul declarat de a arăta interesul propunătorilor de probleme pentru această temă, altfel destul de îngustă, dar și pentru a oferi o arie întinsă de aplicabilitate pentru metoda expusă de noi în acest articol.

A. Probleme din rubricile de probleme propuse

- Problema 22 271, nr. 2/1991, pag. 71, autor: M. Bencze
- Problema 22244*, nr. 9/1991, pag. 351, autor: M. Berindeanu
- Problema C:1182, nr. 9/1991, pag. 357, autor: C. Chiteș
- Problema E: 10 349, nr. 10/1991, pag. 387, autor: M. Berindeanu
- Problema E: 10 446, nr. 2-3/1992, pag. 99, autor: C. Pană
- Problema C: 1267, nr. 5/1992, pag. 196, autor: M. Bencze

- Problema O.G.: 164, nr. 5-6/1993, pag. 211, autor: A. Boțan
- Problema 23 013, nr. 6/1994, pag. 285, autor: M. Burtea
- Problema C: 1662, nr. 4/1995, pag. 189, autor: M. Ganga
- Problema 23 524, nr. 4/1996, pag. 241, autor: T. Agnola
- Problema C: 1878, nr. 12/1996, pag. 641, autor: V. Berinde
- Problema O: 187, nr. 4/1998, pag. 187, autor: M. Bencze
- Problema 24 066, nr. 2/1999, pag. 85, autori: M. Opincariu și V. Rentea
- Problema C: 2131, nr. 2 / 1999, pag. 88, autor: D. Sitaru
- Problema 24 081, nr. 3/1999, pag. 135, autor: Gh. Szöllösy
- Problema O:910, nr. 5-6/1999, pag. 245, autor: ***
- Problema C: 2346, nr. 12/2000, pag. 499, autor: Gh. Szöllösy
- Problema C: 2408, nr. 5-6/2001, pag. 248, autor: N. Pavelescu
- Problema E: 12 421, nr. 10/2002, pag. 405, autor: Ioana Soare
- Problema E: 12 496, nr. 2/2003, pag. 86, autor: L. Pârșan
- Problema 25 122, nr. 7-8/2004, pag. 303, autor: N. Mușuroia
- Problema 25 123, nr. 7-8/2004, pag. 303, autor: Mihaela Burdușel
- Problema E: 13 059, nr. 10/2005, pag. 552, autor: C. Nicolau
- Problema C: 2983, nr. 2/2006, pag. 106, autor: C. Andone
- Problema 25 541, nr. 5/2006, pag. 272, autor: M. Chirciu
- Problema O: 1124, nr. 6/2006, pag. 334, autor: N. Minculete
- Problema 25 702, nr. 1/2007, pag. 44, autor: N. Minculete
- Problema C: 3138, nr. 3/2007, pag. 158, autor: M. Chirciu
- Problema C: 3163, nr. 5/2007, pag. 274, autor: M. Bencze
- Problema 25 956, nr. 2/2008, pag. 104, autor: M. Chirciu
- Problema C.O.: 4923, nr. 3/2008, pag. 160, autor: D. Marinescu
- Problema 26 176, nr. 7-8-9/2009, pag. 430, autor: I. Ucu Crișan

B. Probleme din rubricile Concursuri de matematică

- Problema 3, cls. a IX-a, Etapa locală Prahova, nr. 9/1990, autor C. Apostolescu
- Problema 1, cls. a X-a, Conc. interj. "Gr. C. Moisil", ediția a XVI-a, pag. 288 (Olimpiadă Israel)
- Problema 2, cls. a X-a, Etapa județeană 2002, nr. 2/2002, pag. 60, autor: M. Piticari
- Problema 1, cls. a IX-a, Conc. "D. Barbilian" 2003, nr. 4/2004, autor: M. Chirciu
- Problema 1, cls. VII-VIII, Concursul Gazetei 2006, nr. 9/2006, pag. 481, autor: L. Pârșan
- Problema 1, cls. a IX-a, Conc. Modus Vivendi, nr. 1/2008, pag. 13, autor: N. Pavelescu



- Problema 2, cls. IX-X, Concursul Gazetei 2008, nr. 10/2008, pag. 485, autor: M. Chirciu
- Problema 3, cls. a X-a, Conc. "N. Coculescu" 2008, nr. 7-8-9/2008, pag. 356, autor: M. Perianu
- Problema 1, cls. a IX-a, Conc. "Al. Papiu-Ilarian" 2010, nr. 12/2010, pag. 593, autor: M. Pop

BIBLIOGRAFIE

- [1] Andrei, Gh., Caragea, C., Cucuruzeanu, I., Bordea, Gh., *Exerciții și probleme de Algebră pentru concursuri și olimpiade școlare*, Ediție îngrijită de Revista "Tomis", Constanța, 1990
- [2] Berinde, V., *Principiul punctului fix aplicat la rezolvarea sistemelor circulare*, Lucr. Sem. Creativ. Mat., **2** (1992-1993), 1-23
- [3] Berinde, V., *Explorare, investigare și descoperire în matematică*, Efemeride, Baia Mare, 2001
- [4] Berinde, V., *Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 2004
- [5] Berinde, V., *Iterative Approximation of Fixed Points*, 2nd edition, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2007
- [6] Berinde, V., Păcurar, M., *An iterative method for approximating fixed points of Prešić nonexpansive mappings*, Rev. d'Anal. Numer. Theor. Approx., **38** (2009), No. 2, 144–153
- [7] Caragea, C., Nicolescu, Gh., *Un cadru unitar pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații*, Gazeta Matematică, **87** (1982), Nr. 12, 435–436
- [8] Chiriță, M., Piticari, M., *O metodă de rezolvare a unor sisteme de ecuații în mulțimea numerelor complexe*, Gazeta Matematică, **100** (1995), nr. 12, 708-711
- [9] Cirić, L.B., Prešić, S.B., *On Prešić type generalization of the Banach contraction mapping principle*, Acta Math. Univ. Comen. New Ser., **76** (2007), No. 2, 143-147
- [10] Colecția Gazeta Matematică (1990-2009)
- [11] Păcurar, M., *Iterative Methods for Fixed Point Approximation*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2010
- [12] Păcurar, M., *A multi-step iterative method for approximating fixed points of Prešić-Kannan operators*, Acta Math. Univ. Comen. New Ser., **79** (2010), No. 1, 77-88
- [13] Păcurar, M., *Fixed points of almost Prešić operators by a k-step iterative method*, An. Științ. Univ. Al. I. Cuza Iași, Ser. Noua, Mat. (va apărea)
- [14] Piticari, M., *Asupra unei probleme de olimpiadă*, Gazeta Matematică, **110** (2005), nr. 9, 429-430
- [15] Prešić, S.B., *Sur une classe d'inéquations aux différences finites et sur la convergence de certaines suites*, Publ. Inst. Math. (Beograd)(N.S.), **5(19)** (1965), 75–78
- [16] Rus, I.A., *An iterative method for the solution of the equation $x = f(x, \dots, x)$* , Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., **10** (1981), No.1, 95-100

Prof. dr., Universitatea de Nord Baia Mare
E-mail: vasile_berinde@yahoo.com; vberinde@ubm.ro

Lector dr., Univ. "Babeș-Bolyai" Cluj-Napoca
E-mail: madalina.pacurar@econ.ubbcluj.ro