

ISSN 1220-4277

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

GAZETA MATEMATICĂ

Fondată în anul 1895

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

4

Din cuprins :

- COMEMORĂRI
- ARTICOLE
- SOLUȚIILE OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ,
FAZA LOCALĂ, BUCUREȘTI, 1998
- ISTORIA MATEMATICII : HENRI POINCARÉ
- DEMONSTRAȚII FĂRĂ CUVINTE
- PROBLEME REZOLVATE ȘI PROPUSE PENTRU CICLUL
PRIMAR , GIMNAZIU, LICEU, CONCURSUL ANUAL AL
REZOLVITORILOR ȘI OLIMPIADE

ANUL CIII Nr. 4/1998

GAZETA MATEMATICĂ

SUMARUL

Comemorări

1. Constantin D. Borș, de C. Pangrati și N. Avădanei143

Articole

2. Despre ordinul de convergență al șirurilor de numere reale,
de Vasile Berinde144

Examene și Concursuri

3. Olimpiada de Matematică, București, faza locală, 1998,
prezentare de Marian Andronache și Dinu Șerbănescu151
4. Olimpiada de Matematică, Brașov, faza locală, 24 ian. 1998161
5. Olimpiada de Matematică, București, faza județeană, 28 febr. 1998164

Istoria Matematicii

6. Henri Poincaré, de Kostake Teleman167

Demonstrații fără cuvinte

7. Identități combinatorice, de James O. Chilaka168

Probleme

8. Probleme rezolvate pentru gimnaziu (E:11443, E:11444, E:11448,
E:11449, E:11456, E:11457, E:11459, E:11461)169
9. Probleme rezolvate pentru liceu (23798, 23801, 23802, 23804, 23810,
23811, 23814, 23815)172
10. Probleme pentru ciclul primar (16 - 20)177
11. Probleme pentru gimnaziu (E:11543 - E:11562)177
12. Probleme pentru liceu (23897 - 23916)180
13. Probleme pentru Concursul anual al rezolvitorilor (C:2030-C:2041).....182
14. Probleme pentru olimpiade (O.G:270,O.G:271;O:875-O:877).....184
15. Proposed problems for the annual competition of "Gazeta Matematică"
(C:2030-C:2041)185
16. Problems for mathematical olympiads
(O.G:270,O.G:271;O:875-O:877).....187

Rubrica rezolvitorilor de probleme

asupra predării ariilor și volumelor corpurilor de rotație la clasa a X-a", susținută în cadrul SSMF, publicată în *Gazeta Matematică și Fizică*, nr. 12/1957, i s-a conferit același premiu. Premiu I a primit pentru lucrarea : "În legătură cu predarea geometriei în clasa a X-a", apărută în *Gazeta Matematică și Fizică*, nr. 5/1960.

De fapt, profesorul *Constantin D. Borș*, încă din 1938 a început să publice studii și lucrări, în cele mai prestigioase reviste de specialitate ale vremii cum au fost : *Revista de Matematică (Timișoara)*, *Revista "Pitagora"*, *Gazeta Matematică*, *Gazeta de Matematică și Fizică* etc. numărul acestora fiind de ordinul zecilor. Dintre volume enumerăm : "Noțiuni de geometrie proiectivă", Editura Tehnică, București, 1996 ; "Din experiența predării matematicii", ESDP, București, 1958 ; "Legarea teoriei de practică în predarea matematicii", Editura Tehnică, București, 1958. În același timp trebuie să amintim numărul însemnat de manuale școlare (algebră, geometrie și trigonometrie) pentru liceele de cultură generală.

Profesorul *Constantin D. Borș* a fost cunoscut și ca un talentat poet, fiind autorul mai multor volume de versuri semnate cu pseudonimul de *Lucian Mircea*. Încă din tinerețe a publicat poezii în "Adevărul Literar și Artistic" și "Contemporanul", numele său fiind înscris alături de cele ale lui *Mihail Sadoveanu*, *Paul Zarifopol*, *George Călinescu*, *Garabet Ibrăileanu* și alți oameni de prestigiu ai culturii românești.

Pentru activitatea desfășurată i s-au decernat titlurile de PROFESOR FRUNTAȘ (1965), PROFESOR EMERIT (1970), iar în 1995, Consiliul Local Piatra Neamț i-a acordat titlul de CETĂȚEAN DE ONOARE AL MUNICIPIULUI PIATRA NEAMȚ.

Profesorul *Constantin D. Borș* trăiește în amintirea noastră ; așa cum bine a scris academicianul *Caius Iacob*, "el a fost un om integru, exemplu pentru colegii săi, un om care în cariera sa nu a cunoscut decât drumul de acasă la școală sau la bibliotecă, un om a cărui valoare excepțională nu a fost egalată decât de modestia sa fără seamăn".

Prof. **Constantin Pangrati**

Prof. **Neculai Avădanei**

ARTICOLE

DESPRE ORDINUL DE CONVERGENȚĂ AL ȘIRURILOR DE NUMERE REALE

de **Vasile Berinde**

Numeroase probleme publicate în ultimii ani în *Gazeta Matematică* au ca obiect studiul ordinului de convergență al unor șiruri de numere. Așa cum sunt de obicei formulate aceste probleme, ele nu apelează însă direct la noțiunea de ordin de convergență. Chiar și acolo unde este direct implicat acest concept,

spre exemplu în lucrările [6], [7], nu este dată o definiție explicită a acestei noțiuni, deși acest lucru poate fi făcut la nivelul clasei a XI-a.

Ținând seama de faptul că șirurile de numere au aplicații practice nemijlocite și având în vedere abundența de probleme legate de acest subiect în revistele de specialitate și la olimpiadele de matematică, scopul notei de față este de a introduce conceptul de ordin de convergență al unui șir și de a rezolva, în acest context, câteva probleme apărute recent în *Gazeta Matematică*.

Intuitiv, este ușor de văzut că, dintre șirurile $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \geq 1}$, amândouă convergente către zero, cel de-al doilea este mai rapid convergent, în sensul că termenii săi se apropie mult mai repede de zero decât termenii primului șir. Acest exemplu ne sugerează introducerea următoarelor noțiuni :

Definiția 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ două șiruri de numere pozitive, convergente către zero, pentru care există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l, \quad (1).$$

Atunci :

- a) dacă $l = 0$ vom spune că șirul (a_n) converge mai repede decât șirul (b_n) ;
- b) dacă $l \neq 0$ și l finit vom spune că șirurile (a_n) și (b_n) au același ordin (aceeași viteză) de convergență.

Observații. 1) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, atunci, conform definiției, șirul (b_n) converge mai repede decât șirul (a_n) . Este tocmai cazul șirurilor considerate la început, căci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

2) Noțiunea de ordin de convergență poate fi adaptată ușor la cazul șirurilor convergente oarecare, căci dacă $(u_n), (v_n)$ sunt două șiruri convergente, având limita u , respectiv v , atunci șirurile $(u_n - u), (v_n - v)$ sunt convergente către zero.

Presupunând că există limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n - u|}{|v_n - v|} = l$, (1')

atunci :

- a) dacă $l = 0$, șirul (u_n) converge mai repede (către u) decât șirul (v_n) (către v) ;
- b) dacă $l \neq 0$, $l \neq \infty$, cele două șiruri au același ordin de convergență ;

c) dacă $l = \infty$, şirul (v_n) converge mai repede decât şirul (u_n) .

3) Pentru şirurile $(a_n), (b_n)$ având limita ∞ , noţiunea de ordin de convergenţă se defineşte analog, în ipoteza existenţei limitei (1). Este uşor de văzut că se poate renunţa la condiţia ca şirurile să aibă termeni pozitivi, în definiţia 1, respectiv la valoarea absolută, în realţia (1').

Exemplul 1. Relaţia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln 2 - a_n) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - \ln 2|}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4}, \quad (2)$$

stabilită în [7], arată că şirul (a_n) , $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, n \geq 1$, convergent către $\ln 2$, are acelaşi ordin de convergenţă cu şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$, altfel spus,

şirul (a_n) converge către $\ln 2$ la fel de repede ca şirul $\left(\frac{1}{n}\right)$ către zero.

Exemplul 2. În cazul şirului $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), n \geq 1, x_1 > 0$,

care reprezintă iteraţiile date de metoda lui *Newton* pentru rezolvarea ecuaţiei $x^2 - 2 = 0$ în $(0, \infty)$, adică pentru calculul valorii lui $\sqrt{2}$, avem că (x_n) este descrescător şi $x_n \rightarrow \sqrt{2}, n \rightarrow \infty$ ([2], pag. 67-68), de unde rezultă că $x_n \geq \sqrt{2}, n \geq 2$ şi, prin inducţie,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2} (x_n - \sqrt{2}), n \geq 2,$$

relaţie din care obţinem apoi

$$0 \leq x_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n} (x_1 - \sqrt{2}), n \geq 2.$$

Aşadar,

$$0 \leq n^k (x_n - \sqrt{2}) \leq \frac{n^k}{2^n} (x_1 - \sqrt{2}), n \geq 2, k \in \mathbb{N},$$

care ne dă $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k (x_n - \sqrt{2}) = 0, (k \text{ fixat})$, relaţie care exprimă un fapt foarte important din punctul de vedere al calculului aproximativ : (x_n) converge rapid către $\sqrt{2}$, mai repede decât oricare dintre şirurile $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ către zero. Aceasta înseamnă că, pornind de la orice aproximaţie iniţială $x_1 > 0$ a lui $\sqrt{2}$, după

numai câteva iterații, x_n va aproxima foarte bine pe $\sqrt{2}$. Pornind, spre exemplu, cu $x_1 = 1$, obținem după trei pași valoarea lui $\sqrt{2}$ cu trei zecimale exacte, $x_3 = \frac{577}{408} \approx 1,4142$. În schimb, șirul (a_n) definit prin $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}, n \geq 1, \text{ convergent la } \ln 2 \text{ și pentru care are loc relația}$$

(2) (vezi [7]), are același ordin de convergență cu șirul $\left(\frac{1}{n}\right)$, și deci converge lent. Într-adevăr, primul termen al șirului care îl va aproxima pe $\ln 2$ cu două zecimale exacte va fi x_{999} [5].

Vom rezolva acum problemele 23808, 23813 și C:1978 din G.M. 10-11/1997 dând rezultatelor o interpretare corespunzătoare noțiunilor definite în această lucrare.

Problema 23808 (G.M. 10-11/1997, pag.421)

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel : $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 + 1}$ ($n \geq 1$).

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{x_n}$.

Marian Ursărescu, Roman

Soluție. Din $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n^2 + 1} > 0$ rezultă că (x_n) este un șir strict crescător de numere pozitive. Șirul (x_n) nu este convergent căci, în această ipoteză, punând $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și trecând la limită în relația de recurență, am fi conduși la contradicția $l^2 + 1 = 0$. Prin urmare (x_n) este nemărginit, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Problema care se pune este : cât de repede converge șirul (x_n) către $+\infty$? După cum ne sugerează enunțul problemei, ordinul de convergență al șirului (x_n) este comparabil cu cel al șirului (2^n) . Într-adevăr, din $x_n > 0, \forall n \geq 1$, rezultă că există $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $x_n = \operatorname{ctg} \alpha$ și atunci

$$x_{n+1} = \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} = \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{adică } x_{n+1} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Dar $x_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$, deci $x_2 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}, \dots, x_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2^{n+1}}, n \geq 1$ și prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

rezultat care arată că șirurile (x_n) și (2^n) au același ordin de convergență. Este ușor de văzut că problema poate fi rezolvată analog în cazul mai general $x_1 = a \in \mathbf{R}$, caz în care există $\alpha \in (0, \pi)$ astfel încât $a = \operatorname{ctg} \alpha$ și obținem

$$x_n = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2^{n-1}}, n \geq 1, \text{ deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2^{n-1}}}{\frac{\alpha}{2^{n-1}}} \cdot 2\alpha = 2\alpha = 2\operatorname{arctg} a.$$

Problema C:1978 (G.M. 10-11/1997, pag.423)

Pentru $a_0 \in [-2, \infty)$ fixat considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ dat prin relația de recurență $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (a_n - 2)$.

(În legătură cu problema 23649 din G.M. 12/1996)

Marian Tetiva, Bârlad

Soluție. Cerința din enunț se referă la compararea vitezei de convergență a șirurilor $(a_n - 2)_{n \geq 0}$, $\left(\frac{1}{4^n}\right)_{n \geq 0}$, amândouă convergente către zero,

căci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Vom trata doar cazul $a_0 \in [-2, 2]$, situație în care $\exists \alpha \in [0, \pi]$,

astfel încât $a_0 = 2 \cos \alpha$ și atunci $a_1 = \sqrt{2 + 2 \cos \alpha} = 2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$, căci

$\frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Prin inducție se obține apoi că $a_n = 2 \cos \frac{\alpha}{2^n}, n \geq 0$, deci

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n (a_n - 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n+1} \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2^n} - 1 \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n+2} \sin^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}} = \\ &= -\alpha^2 = -\left(\arccos \frac{a_0}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Rezultatul obținut arată că șirul (a_n) tinde către 2 cel puțin la fel de repede ca șirul $\left(\frac{1}{4^n}\right)$ către 0. Lăsăm pe seama cititorului, cazul al doilea, $a_0 > 2$, pentru a aborda o problemă de clasa a XII-a, legată de același subiect.

Problema 23813 (G.M. 10-11/1997, pag. 422)

Fie $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \in C^2([0,1])$. Dacă $f(0) = 0$ să se arate că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx = f'(0).$$

Marian Ursărescu, Roman

Soluție. Cum $f \in C^2([0,1])$, adică f'' este continuă pe intervalul compact $[0,1]$, deducem că f'' este mărginită, adică $\exists M > 0$, astfel încât $|f''(x)| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$. Atunci $|e^{-nx} f''(x)| \leq M e^{-nx}$, $\forall x \in [0,1]$ și folosind monotonia

integralei și faptul că $\int_0^1 e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} \cdot e^{-nx} \Big|_0^1 = \frac{1}{n} (1 - e^{-n}) \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$,

deducem că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx} f''(x) dx = 0$.

În mod asemănător obținem, pentru șirul (I_n) , $I_n = \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx$, $n \geq 1$,
că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Cerința problemei este de a arăta că șirul (I_n) are cel puțin același ordin de convergență cu cel al șirului $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$, și că, în cazul $f'(0) = 0$, (I_n) este mai rapid convergent decât $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$. Într-adevăr, integrând de două ori prin părți în integrala următoare

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-nx} f''(x) dx &= e^{-nx} f'(x) \Big|_0^1 + n \int_0^1 e^{-nx} f'(x) dx = \\ &= e^{-n} f'(1) - f'(0) + n \left[e^{-nx} f(x) \Big|_0^1 + n \int_0^1 e^{-nx} f(x) dx \right], \end{aligned}$$

obținem

$$n^2 I_n = \int_0^1 e^{-nx} f''(x) dx - e^{-n} f'(1) + f'(0) - n[e^{-n} f(1) - f(0)].$$

Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} f'(1) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-n} f(1)$, iar $f(0) = 0$ și atunci rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx} f''(x) dx + f'(0) = f'(0).$$

Observații. 1) Lăsăm în seama cititorului abordarea problemelor C:1980 (G.M. 10-11/1997), 23729 (G.M. 4-5/1997), 23668 (G.M. 1/1997) și a altor probleme înrudite, cu recomandarea de a da rezultatelor obținute o interpretare în spiritul noțiunilor introduse în această lucrare. Menționăm faptul că problematica legată de studiul ordinului de convergență al unui șir este strâns legată de așa-numitul comportament asimptotic al șirului.

2) Este important să atragem atenția asupra faptului că nu orice două șiruri sunt comparabile prin intermediul acestui concept de ordin (viteză) de convergență. Spre exemplu, dacă luăm șirurile $(a_n), (b_n)$, $a_n = \frac{1}{n} \sin n$, $n \geq 1$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, pentru care avem $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ nu există.

Rezultatul obținut exprimă diferența esențială care există între comportamentul acestor două șiruri, în procesul de "apropiere" de limita lor comună, zero.

3) În analiza numerică este foarte important un alt concept de ordin de convergență al unui șir convergent (proces iterativ), vezi [3]. Spunem că șirul (x_n) , convergent către x^* , are *ordinul de convergență* r dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^r} = \rho, \text{ unde } 0 < \rho < \infty, \quad (3).$$

Numărul ρ din (3) se numește *eroarea asimptotică* a șirului (procesului iterativ) (x_n) .

Pentru șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ din exemplul 2, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \sqrt{2}|}{|x_n - \sqrt{2}|^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, care

arată că ordinul de convergență în sensul relației (3) este $r = 2$, iar eroarea asimptotică este $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Bibliografie

[1] Andrica, D., Toth, L. - "Ordinul de convergență al unor șiruri de tipul

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n", \text{ Astra Matematică, 1(1990), nr.3, 3-7}$$

[2] Gussi, Gh., Stăncășilă, O., Stoica, T. - "Elemente de analiză matematică", Manual pentru clasa a XI-a, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1991

[3] Mărușter, Șt. - "Metode numerice în rezolvarea ecuațiilor neliniare", Ed. Tehnică, 1981

- [4] Nicolescu, M. - "Analiză matematică", vol. I, Ed. Tehnică, 1957
 [5] Roşculeţ, M. - "Analiză matematică", Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964, vol. I
 [6] Vernescu, A. - "Ordinul de convergenţă al şirului de definiţie a constantei lui Euler", Gazeta Matematică, LXXXVIII (1983), nr. 10-11, 380-381
 [7] Vernescu, A. - "Asupra convergenţei unui şir cu limita $\ln 2$ ", G.M., nr. 10-11/1997, 370-374

Universitatea de Nord Baia Mare
 Catedra de Matematică şi Informatică
 Str. Victoriei 76, 4800 Baia Mare
 E-mail : vberinde@univer.ubm.ro

EXAMENE ŞI CONCURSURI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ BUCUREŞTI, FAZA LOCALĂ, 1998

prezentare de Marian Andronache şi Dinu Şerbănescu

Enunţuri

Clasa a IX-a

I. Pentru fiecare pereche $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definim mulţimea

$$A(a, b) = \{a + bm \mid m \in \mathbf{Q}\}.$$

Să se arate că pentru orice pereche (a, b) din $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ avem

$$\{\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\} \setminus A(a, b) \neq \emptyset.$$

Valentin Matrosenco

II. a) Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$,

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1.$$

b) Să se arate că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 16 \sin(x+a) \sin(x-a) \sin(x+b) \sin(x-b)$$

pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Iaroslav Chebici

III. Fie $\angle AOB$ un unghi drept şi punctele $C \in (OA)$, $D \in (OB)$.

1) Să se arate că $OA \cdot OC + OB \cdot OD \leq AB \cdot CD$.

2) Fie $C \in (OA)$, $D \in (OB)$; M şi N mijloacele lui (AB) respectiv (CD) .

Să se arate că punctele O , M şi N sunt coliniare dacă şi numai dacă inegalitatea de la punctul 1) este egalitate.

Greta Marinescu şi Marcel Chiriţă