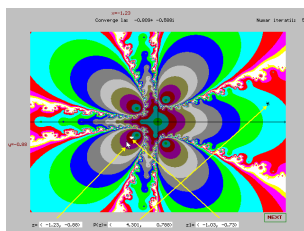


UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA
CENTRUL UNIVERSITAR NORD DIN BAIJA MARE
FACULTATEA DE ȘTIINȚE

TEZĂ DE DOCTORAT

(REZUMAT)

BAZINE DE ATRACȚIE PENTRU METODE ITERATIVE DE
REZOLVARE A ECUAȚIILOR NELINIARE



Coordonator științific:
Cercet.Șt.I Dr. Ion Păvăloiu

Doctorand:
Gheorghe Ardelean

Baia Mare
2012

Cuprins

Introducere	1
Istoric	1
Structura tezei	3
Contribuții personale	4
Mulțumiri	5
Capitolul 1. Preliminarii	6
1. Rezultate preliminare, concepte fundamentale și notații	6
2. Metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare	6
2.1. Generarea metodei lui Newton prin interpolare inversă	6
2.2. Interpolarea inversă	6
2.3. Generarea metodei lui Newton pe cale grafică	6
2.4. Convergența metodei lui Newton	6
2.5. Estimarea apriori a erorii	6
2.6. Estimarea a posteriori a erorii	6
2.7. Alte demonstrații ale convergenței metodei lui Newton	6
3. Metoda lui Newton pentru sisteme de ecuații neliniare	6
Capitolul 2. Bazine de atracție pentru rădăcinile reale ale ecuațiilor neliniare	7
1. Metode de tip Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare	7
1.1. Metoda <i>Arithmetic mean Newton</i> (AN)	7

1.2. Metoda <i>Harmonic mean Newton</i> (<i>HN</i>)	7
1.3. Metoda <i>Midpoint Newton</i> (<i>MN</i>)	7
1.4. O nouă metodă, metoda <i>Bisectrice Newton</i> (<i>BN</i>)	7
1.5. Convergența metodei Bisectrice Newton	9
2. Bazine de atracție pentru rădăcinile reale ale ecuațiilor neliniare	10
2.1. Unele rezultate "ciudate"?	10
2.2. Generarea și vizualizarea bazinelor de atracție	10
2.3. Un studiu comparativ al unor metode iterative utilizând bazinele de atracție	13
Capitolul 3. Bazine de atracție pentru zerourile polinoamelor cu coeficienți complecși	20
1. Determinarea zerourilor polinoamelor	20
2. Un algoritm pentru aproximarea zerourilor unui polinom	20
3. Bazine de atracție ale zerourilor polinoamelor	20
4. Un studiu comparativ al unor metode iterative utilizând bazinele de atracție	20
4.1. Descrierea metodelor studiate	21
4.2. Programele Mathcad pentru generarea bazinelor de atracție ..	23
4.3. Rezultate numerice	23
4.4. Concluzii	29
Capitolul 4. Proprietăți topologice ale bazinelor de atracție	30
1. Preliminarii topologice	30
2. Topologia stângă asociată unei relații de cvasiordine	30
3. Caracteristici topologice ale bazinelor de atracție	30
Capitolul 5. Aplicația "Interactiv Bazin" pentru bazinele de atracție ..	36
1. Descrierea aplicației	36
1.1. Planul complex și ecranul grafic	37
1.2. Introducerea datelor	37

1.3. Bazine de atracție CULORI / NUMĂR DE ITERAȚII.....	37
1.4. Bazine de atracție CULORI / RĂDĂCINI	38
ANEXA - programe Mathcad și Pascal.....	40
Programe Mathcad pentru generarea bazinelor de atracție	40
Programe sursă Pascal.....	40
Programul NEWTONPOL.....	40
Procedura Newton.....	40
Secvența de program Pascal care determină rădăcinile polinomului și generează bazinele de atracție CULORI / NUMĂR DE ITERAȚII.....	40
Secvența de program Pascal care generează bazinele de atracție CULORI / RĂDĂCINI	40
Unit-ul Ucomplex	40
Bibliografie.....	41

Introducere

Istoric

Fără îndoială, rezolvarea ecuațiilor neliniare reprezintă un capitol important în analiza numerică.

Primul rezultat remarcabil în acest domeniu îl reprezintă binecunoscuta metodă a lui Newton(1643-1727), prezentată de autor în lucrarea *Method of Fluxions* [100], elaborată în anul 1671, dar publicată abia în anul 1736, după decesul autorului. În această lucrare, Newton descrie metoda sa (într-o formă mult mai sofisticată decât cea cunoscută azi), prezentând, ca exemplu, determinarea rădăcinii reale a ecuației $x^3 - 2x - 5 = 0$ și arătând că aceasta se află între 2 și 3.

În anul 1690, Raphson(1648-1715) publică lucrarea *Analysis aequationum universalis* [123], în care prezintă metoda lui Newton pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuații într-o formă mai simplificată decât cea a lui Newton. Se pare că Raphson a fost printre puținele persoane cărora Newton le-a permis să vadă lucrările sale de matematică (a se vedea biografia lui Raphson la [104]).

Deși cunoscută și sub numele de Newton-Raphson, forma actuală a metodei, conform lucrării lui N. Kollerstrom, *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth* [84], ar aparține lui T.

Simpson, care a publicat-o în anul 1740 în lucrarea *Essays ... on Mathematics* [129].

În lucrarea sa *Historical note on Newton-Raphson method of approximation*, publicată în anul 1911 [31], Florian Cajori, cunoscut autor al unor lucrări de istoria matematicii, prezintă unele considerații interesante despre "soarta" metodei lui Newton. Printre altele, arată că prima variantă tipărită a acestei metode apare în capitolul 94 al lucrării lui Wallis, *Algebra*, publicată la Londra în anul 1685.

După demonstrarea de către Kantorovich, în anul 1948, a convergenței pătratice a metodei lui Newton pe spații Banach [78], metoda mai apare în literatura de specialitate și sub numele de metoda Newton-Kantorovich.

Indiferent de eventuale controverse existente, cert este că, după pionieratul metodei lui Newton, a urmat apariția în domediu, a altor metode de aproximare faimoase, ca și numele autorilor lor de altfel, cum ar fi: Euler și Chebyshev [128], Halley [65, 66], Kantorovich [78], Ostrowski [105, 106].

Cronologic, a urmat apariția în domeniu a unei multitudini de lucrări prezentând fie metode noi, fie îmbunătățiri ale metodelor existente, instituindu-se o adevărată competiție în ceea ce privește creșterea ordinului de convergență și/sau a indicelui de eficiență.

Amintim aici doar o parte din aceste lucrări cum ar fi: S. Weerakoon și T. G. I. Fernando [140], T. Yamamoto [143], J. M. Gutiérrez și M. A. Hernández [64], S. Abbasbandy [1], S. Amat și colaboratorii [5], I. K. Argyros [19, 20, 21], A. Y. Ozban [107], H. H. H. Homeier [71], autorii chinezi foarte "productivi" în domeniu C. Chun [39, 41, 40], J. Kou și colaboratorii [85, 87, 88, 89, 86], Y. Ham și colaboratorii [67], Z. Xiaojian [142], apoi lucrările elaborate de către M. A. Noor și colaboratorii [102, 101, 103] sau cele ale soților Ljiljana și Miodrag Petković [113, 111, 112, 57] și multe altele.

Referindu-ne acum la monografiile importante în domeniu, putem consemna volumele autorilor: J. F. Traub [132], A. M. Ostrowschi [105, 106],

A. Householder [72], W. Gautschi [62], C. T. Kelley [82, 81], D. Kincaid și W. Cheney [83], I. K. Argyros și F. Szidarovszky [22], sau lucrări ale autorilor români precum G. Coman [49], Șt. Mărușter [98, 99, 96, 97], V. Berinde [26, 27, 25, 28, 29], E. Cătinaș [36, 37, 35, 34, 33], O. Cira [43, 45, 44, 47, 46], A. Diaconu [54, 55], O. Agratini și colaboratorii [2], I. Păvăloiu [119, 118, 120, 121], A. Lupaș [93].

Structura tezei

Teza este structurată pe cinci capitole și o anexă ale căror conținut este prezentat în continuare.

Capitolul 1 cuprinde unele noțiuni și rezultate preliminare matematice, utilizate în prezentarea rezultatelor ulterioare. Este prezentată apoi, metoda lui Newton pentru aproximarea rădăcinilor unei ecuații neliniare, generarea acestora prin diferite metode, și câteva variante de demonstrație a convergenței metodei.

În Capitolul 2 sunt prezentate câteva metode de tip Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare, și este introdusă o nouă metodă de același tip, proprie autorului. Sunt prezentate, deasemenea, două variante noi de vizualizare a bazinelor de atracție ale rădăcinilor ecuațiilor neliniare, pentru metode iterative de rezolvare. În finalul capitolului este prezentat un studiu comparativ al unor metode iterative, incluzând și metoda personală a autorului, studiu bazat pe bazele de atracție aferente acestor metode.

Capitolul 3 este rezervat prezentării metodelor iterative și a bazinelor de atracție pentru zerourile polinoamelor cu coeficienți complecși. Este prezentat, deasemenea, un studiu comparativ al metodelor abordate, bazat pe bazele de atracție.

Capitolul 4 cuprinde unele rezultate ale studiului unei structuri topologice, introdusă de către autor, pe bazele de atracție aferente metodelor iterative de rezolvare a ecuațiilor neliniare.

În Capitolul 5 este prezentată o aplicație practică cu caracter interactiv, pe calculator, elaborată de către autor, prin care se evidențiază o serie de elemente specifice ale bazinelor de atracție pentru metoda lui Newton aplicată la polinoamele cu coeficienți complecși.

Anexa conține programele Mathcad și Pascal utilizate pentru generarea bazinelor de atracție sau pentru determinarea rădăcinilor polinoamelor.

Contribuții personale

Prezentăm mai jos cele mai relevante contribuții (rezultate) personale ale autorului:

1. *Introducerea, în premieră, a două variante de vizualizare a bazinelor de atracție pentru rădăcinile reale ale ecuațiilor neliniare, G. Ardelean [13].*

2. *Introducerea (definirea) unei noi metode iterative de tip Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare, cu o foarte largă arie de convergență, comparativ cu alte metode similare cunoscute, G. Ardelean [14].*

3. *Demonstrarea convergenței unor metode iterative utilizând calculul simbolic în Mathematica și Maple, G. Ardelean [18, 17, 15].*

4. *Elaborarea programelor de generare a bazinelor de atracție, G. Ardelean [10].*

5. *Realizarea unui studiu comparativ al unor metode de rezolvare a ecuațiilor neliniare utilizând bazinele de atracție ale rădăcinilor - cazul ecuațiilor în $\mathbb{R}$, G. Ardelean [14].*

6. *Realizarea unui studiu comparativ al unor metode iterative de determinare zerourilor polinoamelor cu coeficienți complecși, utilizând bazinele de atracție*, **G. Ardelean** [11].

7. *Enunțarea și demonstrarea unor proprietăți ale topologiei stângi asociată unei relații de cvasiordine*, **G. Ardelean** [8, 7].

8. *Introducerea unei structuri topologice pe bazinele de atracție și demonstrarea unor proprietăți ale acestei topologii*, **G. Ardelean** [16].

9. *Elaborarea unui program pentru vizualizarea bazinelor de atracție și evidențierea altor elemente specifice, cu utilizare interactivă*, **G. Ardelean** [12].

10. *Crearea unui DVD anexat tezei, care conține teza în format carte electronică, aplicația interactivă pentru bazine de atracție împreună cu instrucțiunile de utilizare*.

Mulțumiri

Mulțumim domnului Prof. Univ. dr. Ion Păvăloiu pentru atenta coordonare de care am beneficiat pe tot parcursul elaborării prezentei teze.

Mulțumim domnului Prof. Univ. dr. Vasile Berinde pentru observațiile pertinente exprimate în legătură cu prezentarea unor rezultate.

Mulțumirile noastre se cuvin, deasemenea, colegului Lector Univ. dr. Andrei Horvat-Marc, pentru sprijinul acordat la tehnoredactarea tezei.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Acest capitol cuprinde unele rezultate matematice și concepte fundamentale care vor fi utilizate în prezentarea rezultatelor din cadrul tezei. În prezentarea acestui capitol am utilizat rezultate din [2, 62, 83, 119, 132].

1. Rezultate preliminare, concepte fundamentale și notații

2. Metoda lui Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare

2.1. Generarea metodei lui Newton prin interpolare inversă

2.2. Interpolarea inversă

2.3. Generarea metodei lui Newton pe cale grafică

2.4. Convergența metodei lui Newton

2.5. Estimarea apriori a erorii

2.6. Estimarea aposteriori a erorii

2.7. Alte demonstrații ale convergenței metodei lui Newton

3. Metoda lui Newton pentru sisteme de ecuații neliniare

CAPITOLUL 2

Bazine de atracție pentru rădăcinile reale ale ecuațiilor neliniare

În acest capitol se prezintă cele mai relevante metode de tip Newton pentru rezolvarea ecuației neliniare $f(x) = 0$, inclusiv unele recent publicate, precum și o metodă proprie a autorului tezei, *metoda Bisectrice-Newton*.

În cele ce urmează, ne vom referi la metoda lui Newton prin Classical Newton (CN), iar pentru metodele de tip Newton prezentate vom utiliza denumirile și abrevierile consacrate în literatura de specialitate.

1. Metode de tip Newton pentru rezolvarea ecuațiilor neliniare

1.1. Metoda *Arithmetic mean Newton*(AN)

1.2. Metoda *Harmonic mean Newton*(HN)

1.3. Metoda *Midpoint Newton* (MN)

1.4. O nouă metodă, metoda *Bisectrice Newton* (BN)

Această metodă am introdus-o noi, **G. Ardelean**[14], și este dată de următoarea schemă de calcul:

$$(2.1) \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{f'(x_n)f'(y_n) + \sqrt{(1 + f'(x_n)^2)(1 + f'(y_n)^2)} - 1},$$

unde

$$(2.2) \quad y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Această metodă are ordinul 3 de convergență iar indicele de eficiență este $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$. Meritul metodei noastre constă în faptul că are o arie mult mai largă de convergență comparativ cu alte metode similare (cu același ordin de convergență și același indice de eficiență), fapt ce se va vedea prin analiza comparativă prezentată la finalul acestui capitol.

Considerăm graficul:

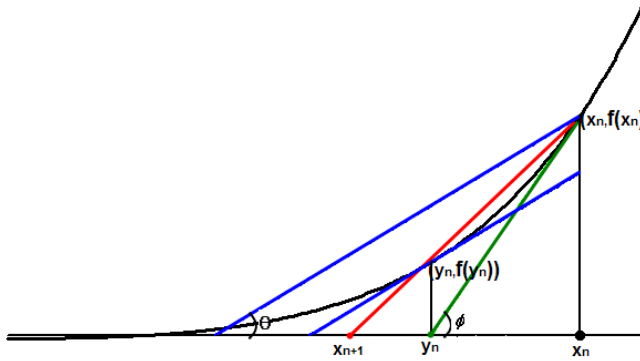


Figura 2.4 Interpretarea geometrică a metodei BN

Vom considera bisectoarea unghiului format de tangentele la graficul funcției f în punctele $(x_n, f(x_n))$ și $(y_n, f(y_n))$, unde

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Fie φ și respectiv θ unghiurile formate de aceste tangente cu axa Ox . Avem $\operatorname{tg} \varphi = f'(x_n)$, $\operatorname{tg} \theta = f'(y_n)$. Vom calcula tangenta unghiului format de bisectoarea cu axa Ox și avem:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\varphi + \theta}{2} &= \frac{1 - \cos(\varphi + \theta)}{\sin(\varphi + \theta)} = \frac{1 - \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta}{\sin \varphi \cos \theta + \sin \theta \cos \varphi} \\ &= \frac{\frac{1}{\cos \varphi \cos \theta} - 1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \theta} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} - 1}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \theta}. \end{aligned}$$

Paralela la bisectoare dusă prin punctul $(x_n, f(x_n))$ intersectează axa Ox în x_{n+1} . Avem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\operatorname{tg} \frac{\varphi+\theta}{2}} = x_n - \frac{f(x_n)(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta + \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} - 1}.$$

Rezultă deci relația:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{f'(x_n) + f'(y_n)}{f'(x_n)f'(y_n) + \sqrt{(1 + f'(x_n)^2)(1 + f'(y_n)^2)} - 1} \quad n \geq 1.$$

1.5. Convergența metodei Bisectrice Newton

Pentru demonstrarea convergenței metodei *Bisectrice Newton* vom utiliza următoarea teoremă:

Teorema 2.1.1. [62] *Iterația de punct fix*

$$(2.3) \quad x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

are ordinul de convergență p dacă F este suficient diferențiabilă pe un interval care-l conține pe α , un punct fix al lui F și satisface condițiile

$$(2.4) \quad F'(\alpha) = F^{(2)}(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0 \text{ și } F^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Convergența metodei *Bisectrice Newton* rezultă din următoarea teoremă:

Teorema 2.1.2. (G. Ardelean [14]) *Fie $\alpha \in I$ un zero simplu al unei funcții*

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval deschis. Dacă f este suficient diferențiabilă pe o vecinătate a lui α și valoarea inițială x_0 este suficient de apropiată de α , atunci metoda definită de relațiile (2.1) și (2.2) are ordinul 3 de convergență și ecuația erorii corespunzătoare este

$$(2.5) \quad e_{n+1} = \left(\frac{c_2^2}{A} + \frac{c_3}{2} \right) e_n^3 + O(e_n^4),$$

unde

$$A = \frac{1}{1 + f'(\alpha)^2}.$$

Pentru obținerea rezultatelor, am utilizat pachetul de soft matematic Maple 12.0.

2. Bazine de atracție pentru rădăcinile reale ale ecuațiilor neliniare

Cazul faimoaselor imagini fractale ale bazinelor de atracție pentru zerourile polinoamelor cu coeficienți complecși este deja binecunoscut.

În cele ce urmează, vom prezenta două variante, **G. Ardelean**[13], de vizualizare a bazinelor de atracție pentru cazul rădăcinilor reale ale ecuațiilor neliniare, corespunzătoare diferitelor metode iterative de tip Newton, considerînd că aceasta cunstituie și o premieră în evidențierea grafică a acestor bazine de atracție, chiar dacă aceste imagini nu sunt la fel de "spectaculoase" ca și în cazul complex.

2.1. Unele rezultate "ciudate"?

2.2. Generarea și vizualizarea bazinelor de atracție

Pentru prezentarea variantelor noastre de vizualizare a bazinelor de atracție ale rădăcinilor unei ecuații neliniare pe un interval, vom reveni la metoda Newton clasică, (*Clasical Newton's method (CN)*), definită de

$$(2.6) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă. Fie α este o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, adică $f(\alpha) = 0$. Se știe că dacă $f'(\alpha) \neq 0$, x_0 este suficient de apropiat de α și în anumite condiții, șirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la α .

Aplicația

$$(2.7) \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

se numește *Funcție Iterație (F.I.)* a metodei definită de (2.6).

Fie $x_0 \in [a, b]$. Dacă pornind din punctul de start x_0 șirul generat de relația (2.6) converge la α atunci se spune că x_0 este *atras* de către rădăcina α .

Bazinul de atracție pentru rădăcina α și Funcția de Iterație F este mulțimea tuturor punctelor de start $x_0 \in [a, b]$, care sunt atrase de către α .

Pentru exemplificarea variantelor de vizualizare a bazinelor de atracție introduse de către noi, vom utiliza metoda *Classical Newton (CN)* aplicata pentru rezolvarea ecuației neliniare, $f_1(x) = 0$, unde

$$(2.8) \quad f_1 : [-8, 8] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x \sin x - 2$$

Rădăcinile ecuației $f_1(x) = 0$ în intervalul $I_1 = [-8, 8]$ sunt:

$$-6.439; -2.773; -1.114; 1.114; 2.773 \text{ și } 6.439,$$

.

Prezentăm în continuare două variante de vizualizare grafică a bazinelor de atracție ale rădăcinilor reale ale ecuațiilor neliniare.

a) Varianta "sinusoidală" de reprezentare a bazinelor de atracție

Pentru a reprezenta, de exemplu, bazinele de atracție pentru rădăcinile ecuației $f_1(x) = 0$ pe intervalul $I_1 = [-8, 8]$ utilizînd metoda *Classical Newton (CN)*, "acoperim" (discretizăm) intervalul I_1 cu $n+1$ puncte echidistante $\{t_i\}_{i=0}^n$ (în cazul nostru $n = 500, t_0 = -8$ și $t_{500} = 8$). Rezolvăm ecuația (2.8) pentru fiecare punct de start x_0 dintre aceste puncte.

Dacă x_0 generează o rădăcină α a ecuației, $\alpha \in I_1$, cu o aproximație $\varepsilon = 10^{-5}$ în maximum 14 iterații, atunci desenăm o linie între punctele $(x_0, 0)$ și $(x_0, f_1(x_0))$ cu o culoare asociată rădăcinii α .

Dacă x_0 nu este atras de către nici o rădăcină $\alpha \in I_1$, atunci nu se desenează nimic. Astfel, regiunile albe semnifică faptul că acolo metoda nu converge la nici o rădăcină din I_1 .

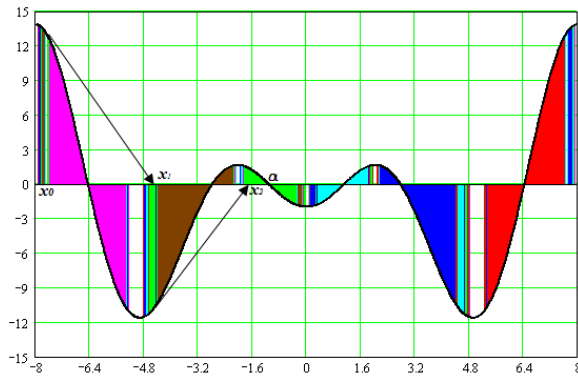


Figura 2.6 Reprezentarea "sinusoidală" a bazinelor de atracție pentru metoda *ClassicalNewton* și ecuația $f_1(x) = 0$

Pentru generarea bazinelor de atracție am utilizat pachetul de soft matematic Mathcad 14.0 .

a) Varianta cu "bare" de reprezentare a bazinelor de atracție

Pentru a reprezenta, de exemplu, bazinele de atracție pentru rădăcinile ecuației $f_1(x) = 0$ pe intervalul $I_1 = [-8, 8]$ utilizînd metoda *Classical Newton (CN)*, "acoperim" (discretizăm) intervalul I_1 cu $n+1$ puncte echidistante $\{t_i\}_{i=0}^n$ (în cazul nostru $n = 500, t_0 = -8$ și $t_{500} = 8$). Rezolvăm ecuația (2.8) pentru fiecare punct de start x_0 dintre aceste puncte.

Dacă x_0 generează o rădăcină α a ecuației, $\alpha \in I_1$, cu o aproximație $\varepsilon = 10^{-5}$ în $k \leq 14$ iterations, atunci desenăm x_0 o "bară" (linie) verticală de mărime k și o culoare asociată rădăcinii α .

Dacă x_0 nu este atras de către nicio rădăcină $\alpha \in I_1$, atunci desenăm în x_0 o "bară" verticală de culoare roșie sub axa Ox .

De fapt, în acest caz, x_0 este atras de către o rădăcină aflată înafara intervalului I_1 (ecuația $f_1(x) = 0$ are o infinitate de rădăcini!).

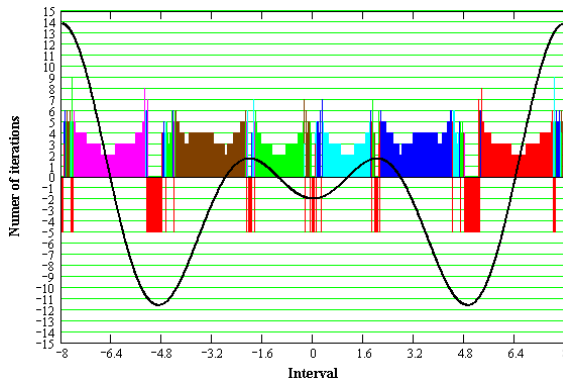


Figura 2.7 Reprezentarea cu "bare" a bazinelor de atracție pentru metoda *Classical Newton* și ecuația $f_1(x) = 0$

Această variantă de vizualizare grafică a bazinelor de atracție este mult mai relevantă decât varianta "sinusoidală" deoarece evidențiază și numărul de iterații corespunzătoare fiecărei valori de start x_0 din intervalul I_1 . Astfel, utilizînd această variantă de reprezentare pentru bazinele de atracție, putem să comparăm performanțele unor metode iterative de rezolvare a ecuațiilor neliniare.

2.3. Un studiu comparativ al unor metode iterative utilizînd bazinele de atracție

Pentru evidențierea performanțelor metodei noastre (Bisectrice Newton (BN)) de rezolvare a ecuațiilor neliniare, comparativ cu alte metode similare, am ales în analiza noastră metodele:

- (a) **Classical Newton (CN)**
- (b) **Arithmetic mean Newton (AN)**
- (c) **Harmonic mean Newton (HN)**
- (d) **Midpoint Newton (MN)**

(e) Bisectrix Newton (BN)

descrie în acest capitol. Pentru compararea metodelor (a)-(e), am considerat ecuațiile de test $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$, unde

$$(2.9) \quad f_1 : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$$

$$(2.10) \quad f_2 : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = (x - 1)^6 - 1,$$

$$(2.11) \quad f_3 : [-3.5, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{x^4}{4} \sin x - 1.$$

Am generat bazinele de atracție ale rădăcinilor ecuațiilor $f_p(x) = 0$ pe intervalele I_p , $p = 1, 2, 3$, corespunzătoare metodelor iterative (a)-(e), "acoperind" fiecare interval I_p cu $n + 1$ puncte echidistante $\{t_i\}_{i=0}^n$ ($n = 500$), pe care le-am considerat ca puncte de start la rezolvarea ecuațiilor cu metodele menționate. Notăm cu T_p mulțimile corespunzătoare ale acestor puncte.

Având în vedere faptul că varianta "cu bare", de reprezentare a bazinelor de atracție este cea care ne furnizează informații și despre numărul de iterații necesar obținerii rădăcinilor, aceasta a fost varianta adoptată în studiul nostru.

Deasemenea, pentru exploatarea rezultatelor numerice obținute în experimentele pe calculator realizate cu ecuațiile și metodele abordate, cât și pentru evidențierea performanțelor fiecărei metode, am introdus următorii indicatori:

Indicele Ariei de Convergență (IAC) ca fiind

$$IAC = \frac{C_{points}}{T_{points}}$$

unde

C_{points} =numărul de puncte de start din T_p , din care metoda converge la o rădăcină din intervalul I_p ;

T_{points} = numărul total de puncte din T_p .

Număr Mediu de Iterații (NMI) ca fiind

$$NMI = \frac{N_{iter}}{C_{points}}$$

unde

N_{iter} = numărul total de iterații corespunzător tuturor punctelor de start din care metoda converge la o rădăcină din intervalul I_p .

Figurile 2.11, 2.12 și 2.13 prezintă bazinele de atracție pentru metodele (a)-(e), ecuațiile $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, $f_3(x) = 0$ și intervalele I_1 , I_2 și I_3 .

Sinteza rezultatelor numerice este prezentată în Tabelele 2.1, 2.2 și 2.3.

Pentru generarea bazinelor de atracție și pentru obținerea rezultatelor numerice am utilizat pachetul de soft matematic Mathcad 14.0 .

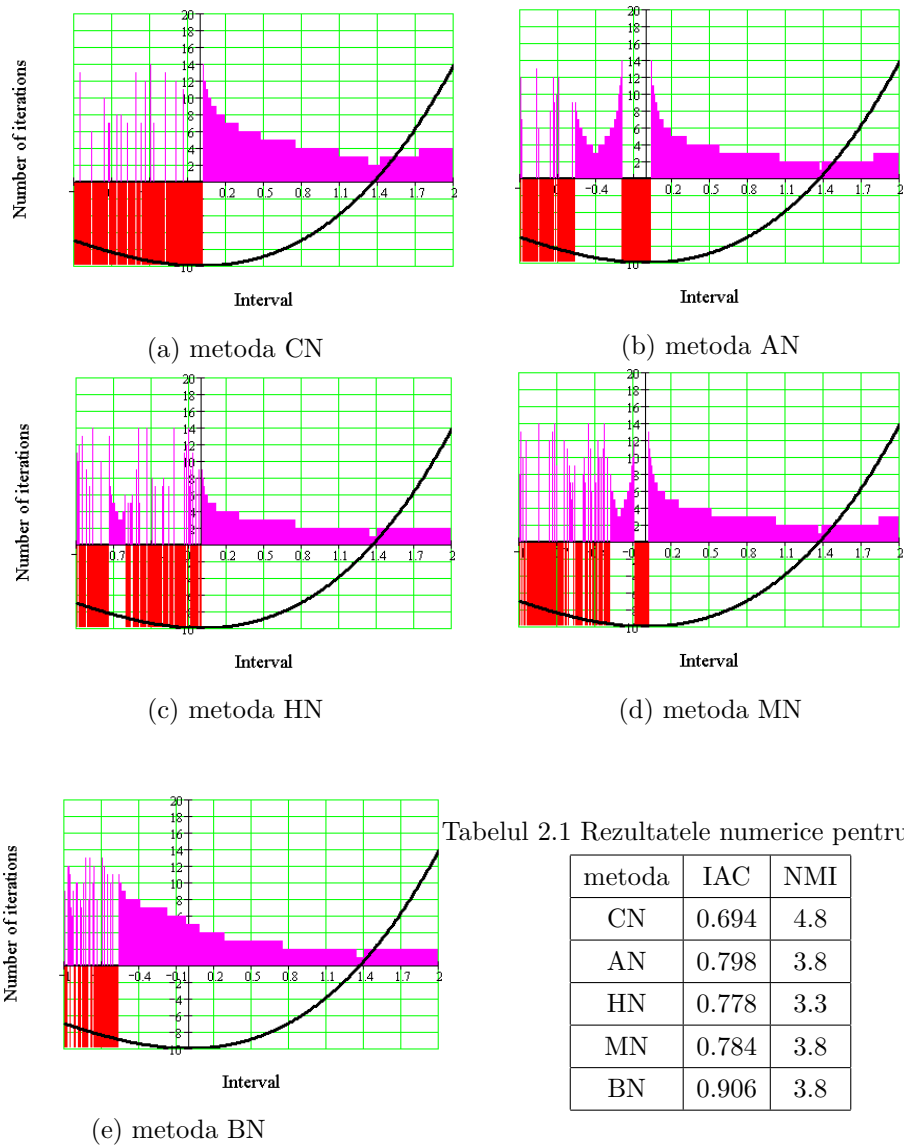
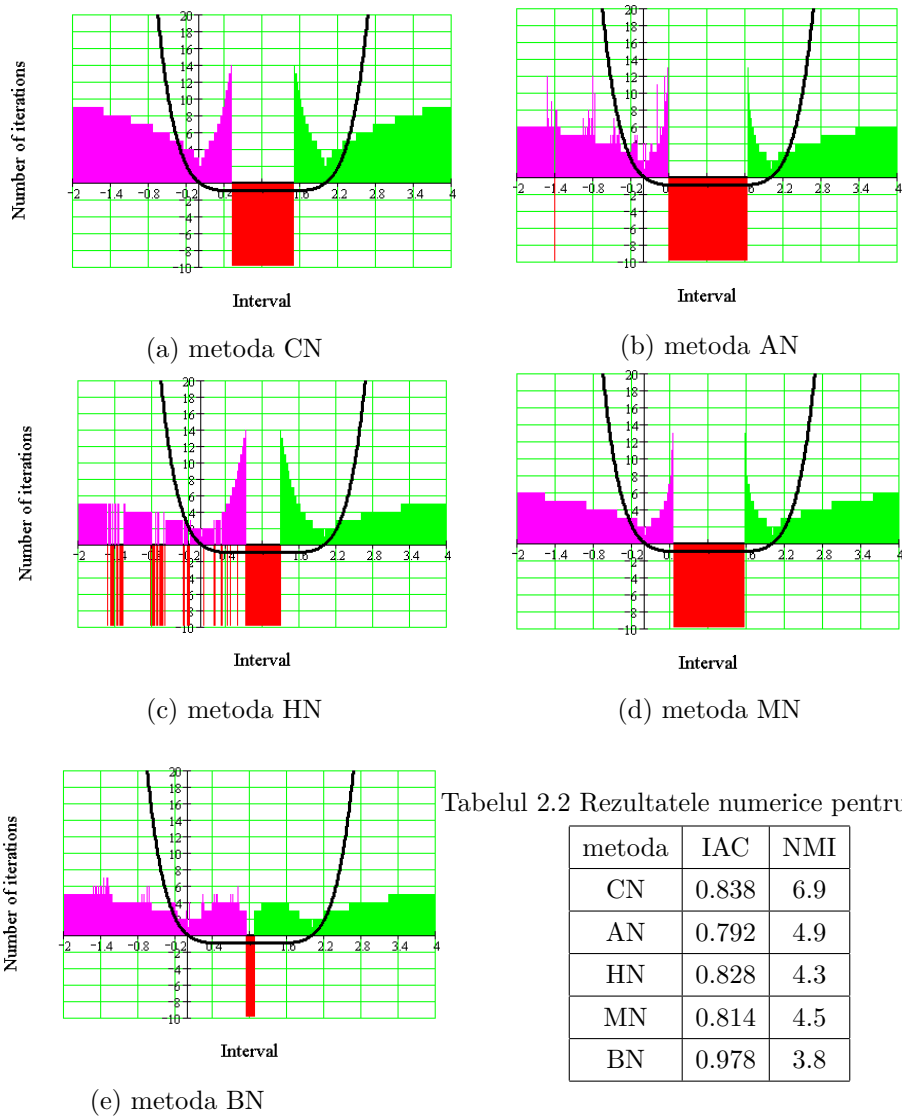


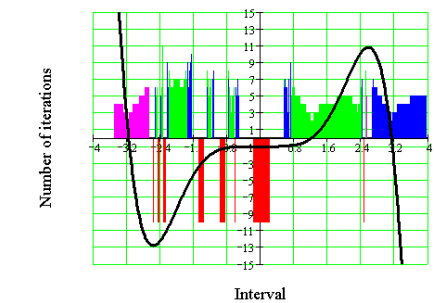
Figura 2.11 Bazinele de atracție pentru $f_1(x)$



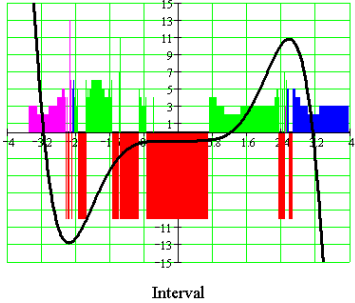
Tabelul 2.2 Rezultatele numerice pentru $f_2(x)$

metoda	IAC	NMI
CN	0.838	6.9
AN	0.792	4.9
HN	0.828	4.3
MN	0.814	4.5
BN	0.978	3.8

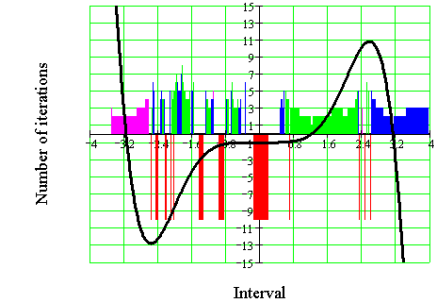
Figura 2.12 Bazinele de atracție pentru $f_2(x)$



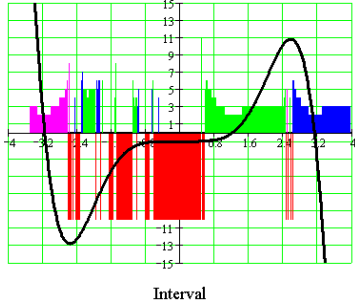
(a) metoda CN



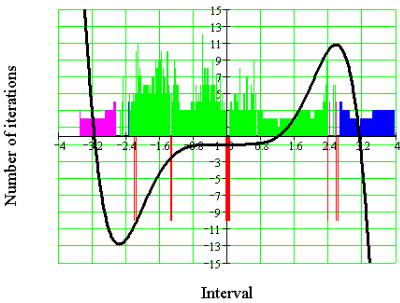
(b) metoda AN



(c) metoda HN



(d) metoda MN



(e) metoda BN

Tabelul 2.3 Rezultatele numerice pentru $f_3(x)$

metoda	IAC	NMI
CN	0.900	5.1
AN	0.664	3.4
HN	0.900	3.4
MN	0.726	3.4
BN	0.974	3.7

Figura 2.13 Bazinele de atracție pentru $f_3(x)$

Vizualizarea "simultană" a bazinelor de atracție corespunzătoare tuturor celor cinci metode analizate ne permite să "observăm" empiric unele caracteristici ale acestor metode și să le apreciem comparativ performanțele.

Rezultatele numerice obținute, fundamentează următoarele concluzii privind studiul comparativ al metodelor abordate:

1. Din Tabelele 2.1 ,2.2 și 2.3 rezultă că metoda noastră (*Bisectrice Newton method*) are cea mai largă arie de convergență dintre toate metodele analizate, pentru toate ecuațiile de test utilizate;

2. În cazul ecuației $f_2(x) = 0$, metoda noastră are și cea mai mare "viteză" de convergență, adică cel mai mic număr mediu de iterații necesare pentru determinarea tuturor rădăcinilor acestei ecuații, comparativ cu celelalte metode analizate (Vezi Tabelul 2.2);

3. Referindu-ne acum și la celelalte metode, am putea spune că metoda *Harmonic mean Newton (HN)* are cea mai bună viteză de convergență, iar metoda *Arithmetic mean Newton (AN)* are cea mai slabă viteză de convergență.

4. Metoda *Classical Newton (CN)* nu o considerăm "în competiție", aceasta, avînd alt ordin de convergență și alt indice de eficiență, o considerăm doar ca un etalon în analiza noastră.

CAPITOLUL 3

Bazine de atracție pentru zerourile polinoamelor cu coeficienți complecși

Un caz particular important al ecuațiilor neliniare îl constituie determinarea zerourilor polinoamelor. În acest capitol ne vom referi la aproximarea zerourilor polinoamelor cu coeficienți complecși utilizând câteva metode de tip Newton. La finalul capitolului, vom prezenta rezultatele unui studiu comparativ al acestor metode, utilizând bazinele de atracție (**G. Ardelean** [11]).

1. Determinarea zerourilor polinoamelor

2. Un algoritm pentru aproximarea zerourilor unui polinom

3. Bazine de atracție ale zerourilor polinoamelor

4. Un studiu comparativ al unor metode iterative utilizând bazinele de atracție

În cele ce urmează, prezentăm rezultatele unei analize comparative a unor metode iterative de tip Newton de rezolvare a ecuațiilor neliniare. Am ales pentru investigația noastră șase astfel de metode, inclusiv metoda clasică a lui Newton ca "etalon", și trei polinoame cu coeficienți complecși, pentru care am efectuat experimentele numerice. Rezultatele studiului constă în ierarhizarea metodelor cercetate, din punctul de vedere al performanțelor acestora ca timp calculator consumat, arie de convergență sau viteză de

convergență. Studiul are la bază bazinele de atracție pentru zerourile polinoamelor de test alese, corespunzătoare metodelor iterative analizate.

4.1. Descrierea metodelor studiate

Aici vom prezenta metodele, convergența lor (pentru cele a căror convergență nu a fost demonstrată anterior) precum și programul Mathcad de generare a bazinului de atracție corespunzător fiecărei metode (după un exemplu preluat din [42]).

Cele șase metode sunt:

(a) metoda Classical Newton (CN)

Această metodă este definită prin relația

$$(3.12) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Se știe că această metodă are convergență pătratică, iar indicele său de eficiență este $2^{\frac{1}{2}} = 1.414$.

(b) metoda Arithmetic mean Newton (AN) [140]

Această metodă este definită de

$$(3.13) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{2P(z_n)}{P'(z_n) + P'(y_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $y_n = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$.

Această metodă are ordinul 3 de convergență iar indicele său de eficiență este $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$.

(c) metoda Harmonic mean Newton (HN) [107]

Metoda este dată de relația

$$(3.14) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)(P'(z_n) + P'(y_n))}{2P'(z_n)P'(y_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $y_n = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$. Această metodă are ordinul 3 de convergență iar indicele său de eficiență este $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$.

(d) metoda Midpoint Newton (MN) [107]

Această metodă este definită de relația

$$(3.15) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{P(z_n)}{P'((z_n + y_n)/2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $y_n = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$. Această metodă are ordinul 3 de convergență iar indicele său de eficiență este $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$.

(e) metoda Halley (HM) [132]

Metoda este dată de

$$(3.16) \quad z_{n+1} = z_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_p(z_n)}{1 - \frac{1}{2} L_p(z_n)} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $L_p(z_n) = \frac{P''(z_n)P(z_n)}{[P'(z_n)]^2}$. Această metodă are ordinul 3 de convergență iar indicele său de eficiență este $3^{\frac{1}{3}} = 1.442$.

(f) metoda Traub-Ostrowski (TOM) [132]

Metoda este definită prin relația

$$(3.17) \quad z_{n+1} = z_n - \frac{P(y_n) - P(z_n)}{2P(y_n) - P(z_n)} \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

unde $y_n = z_n - \frac{P(z_n)}{P'(z_n)}$.

Această metodă are ordinul patru de convergență, iar indicele de eficiență este $4^{\frac{1}{3}} = 1.587$.

Conform conjecturii Kung-Traub, o metodă are ordin de convergență optimal dacă acesta este egal cu 2^{d-1} , și are indice de eficiență optimal dacă acesta este egal cu $2^{(d-1)/d}$, unde d este numărul de funcții de evaluat la fiecare iterație.

Deci, această metodă are ordinul optimal $4 = 2^{3-1}$ (în acest caz $d = 3$), și are indice de eficiență optimal $4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$.

4.2. Programele Mathcad pentru generarea bazinelor de atracție

4.3. Rezultate numerice

Polinoamele de test utilizate în analiza noastră sunt:

1) $P_1(z) = z^7 - 1$, ale cărui zerouri sunt: $1, 0.623 \pm 0.782i, -0.223 \pm 0.975i, -0.901 \pm 0.434i$. Acest exemplu este utilizat și în [130].

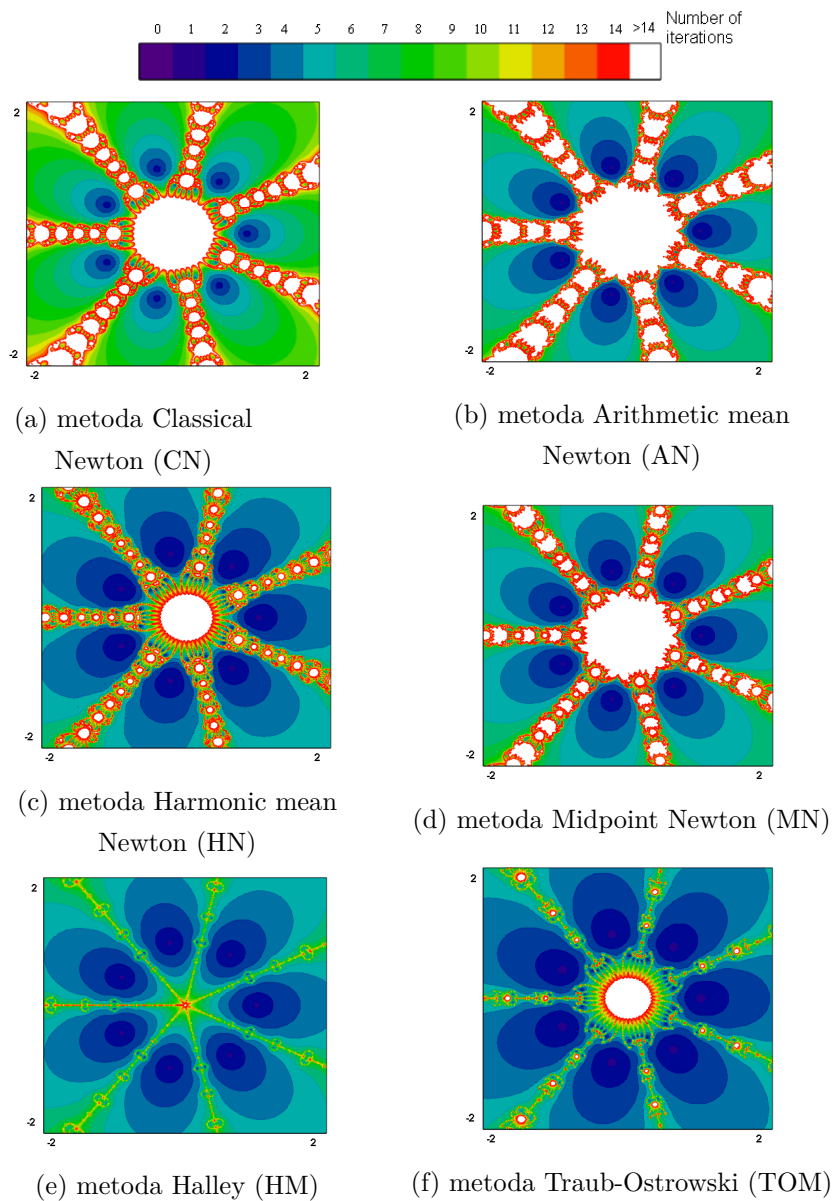
2) $P_2(z) = z^8 + (1 + 8i)z^7 + (-22 + 27i)z^6 + (-105 + 70i)z^5 + (-271 + 185i)z^4 + (-346 + 872i)z^3 + (1282 + 1658i)z^2 + (3060 - 2820i)z - 3600$.

Zerourile acestui polinom sunt: $1, 1 + i, 2i, -2 + 2i, -3, -3 - 3i, -5i, 5 - 5i$ (aranjate "în spirală", după cum se poate observa în Figura 3.3). Acest exemplu este preluat din [42].

3) $P_3(z) = z^3 + (2 - 3i)z^2 - (5 + 5i)z - 8 - 12i$, ale cărui zerouri sunt: $-3 + 2i, -1 - i, 2 + 2i$.

În analiza noastră, pentru polinoamele de test $P_1(z)$, $P_2(z)$ și $P_3(z)$ am ales domeniile dreptunghiulare din planul complex, D_1 , D_2 și respectiv D_3 după cum urmează: $D_1 = [2, 2] \times [-2, 2]$; $D_2 = [-15, 20] \times [-20, 15]$; $D_3 = [-300, 300] \times [-300, 300]$. În fiecare din aceste cazuri, domeniul ales conține toate zerourile polinomului corespunzător. Pentru generarea bazinelor de atracție, am utilizat pachetul de soft matematic Mathcad 14.0 și un calculator laptop, DELL Inspiron 1501, 1.6 GHz.

Bazinele de atracție pentru zerourile polinoamelor de test, corespunzătoare metodelor analizate sunt prezentate în continuare:

Figura 3.4 Bazinele de atracție pentru polinomul $P_1(z)$

4. UN STUDIU COMPARATIV AL UNOR METODE ITERATIVE UTILIZÎND BAZINELE DE ATRACȚIE

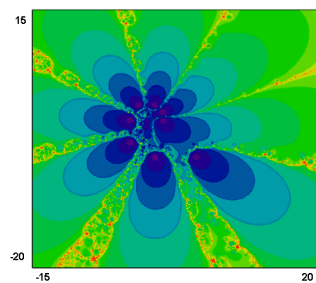
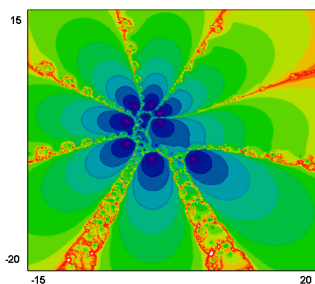
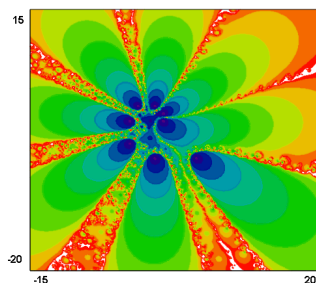
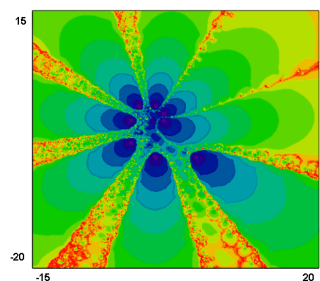
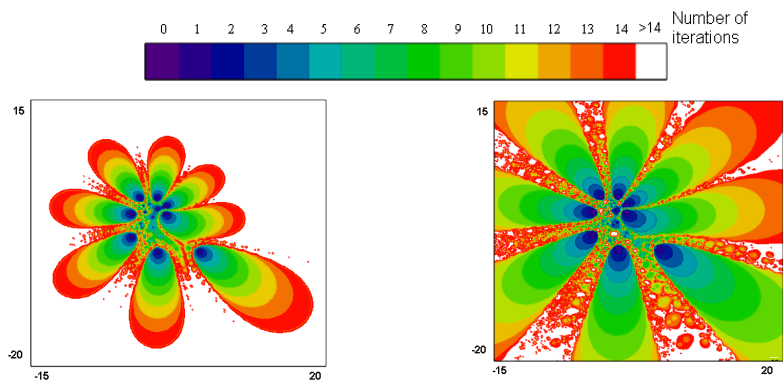
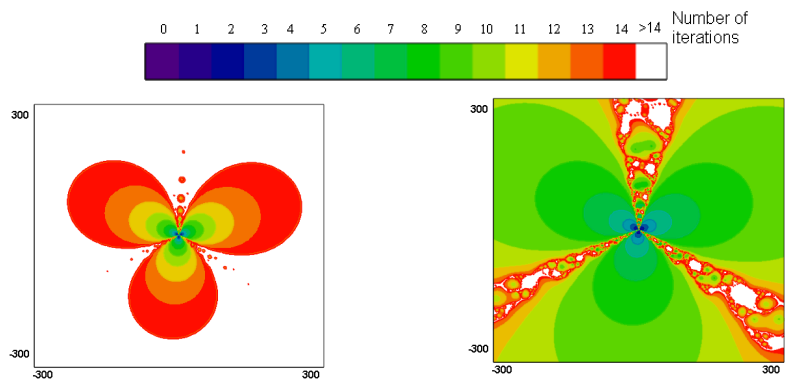
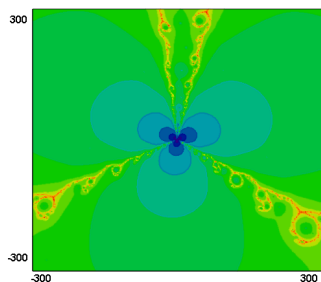


Figura 3.4 Bazinele de atracție pentru polinomul $P_2(z)$

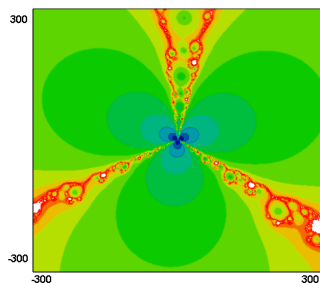


(a) metoda Classical
Newton (CN)

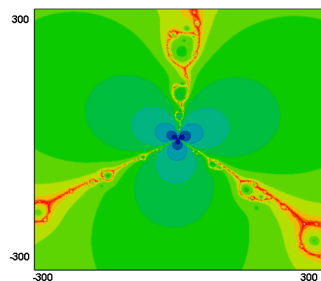
(b) metoda Arithmetic mean
Newton (AN)



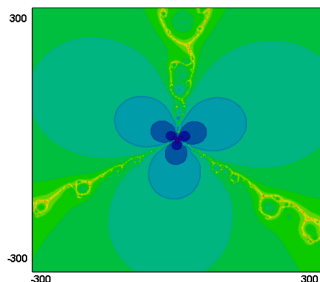
(c) metoda Harmonic mean
Newton (HN)



(d) metoda Midpoint Newton (MN)



(e) metoda Halley (HM)



(f) metoda Traub-Ostrowski (TOM)

Figura 3.4 Bazinele de atracție pentru polinomul $P_3(z)$

Vizualizarea simultană a bazinelor de atracție pentru toate metodele analizate, corespunzătoare unui polinom de test, ne permite să apreciem, chiar și empiric, care metodă este mai performantă, și care metodă este mai puțin performantă, atât din punctul de vedere al ariei de convergență, (suprafață albă mare înseamnă arie redusă de convergență), cât și din punctul de vedere al "vitezei" de convergență (suprafață roșie mare înseamnă număr mare de iterații, și deci viteză redusă de convergență).

Rezultatele numerice propriu-zise ale studiului nostru sunt concentrate în următoarele trei diagrame sugestive, care furnizează informații privitoare la performanțele fiecărei metode iterative, pentru fiecare polinom de test P_1 , P_2 și P_3 .

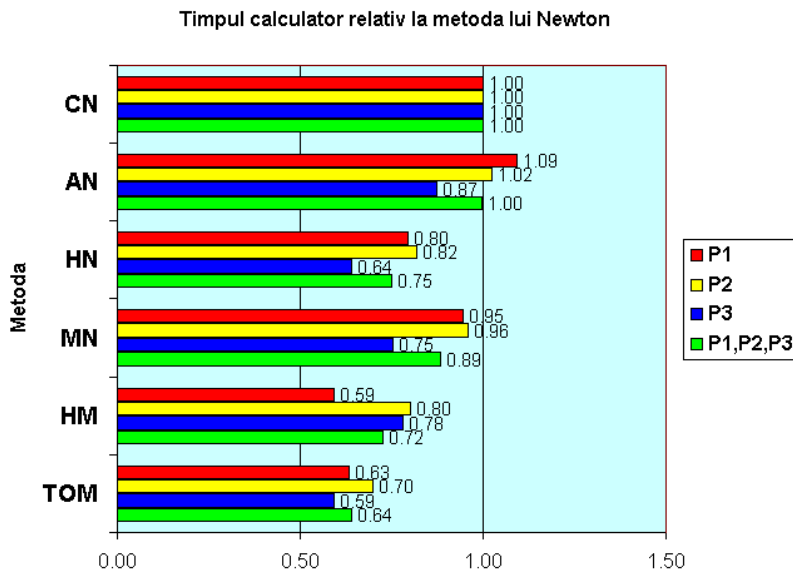


Figura 3.7 Timpul calculator necesar pentru generarea bazinelor de atracție (Newton=1)

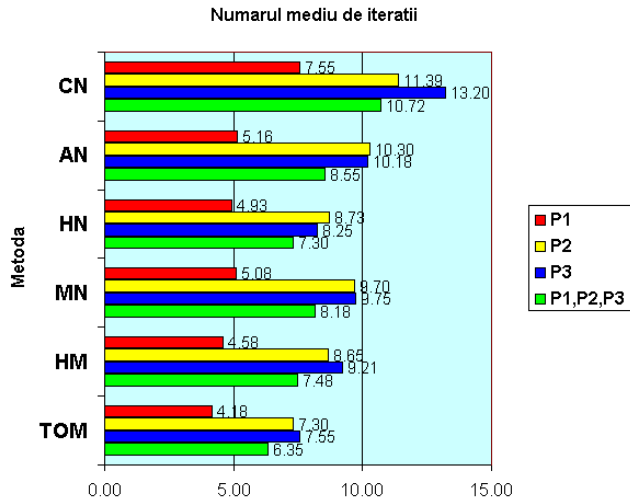


Figura 3.8 Număr mediu de iterații pentru punctele de convergență

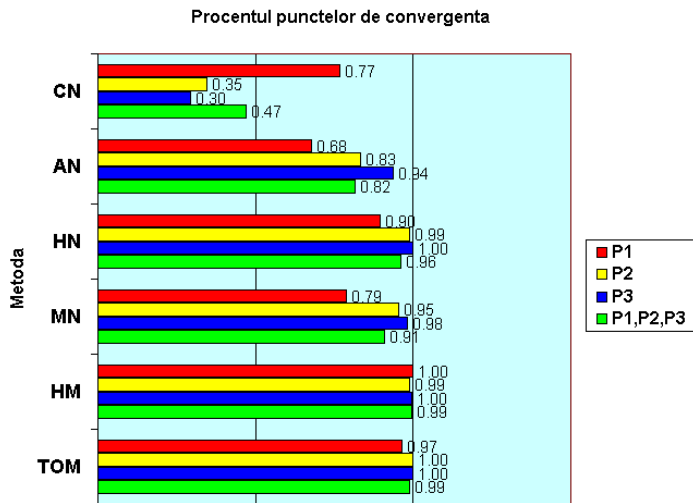


Figura 3.9 Număr de puncte de convergență / Număr total de puncte de start

În aceste diagrame metodele iterative analizate sunt identificate astfel:

CN – metoda Classical Newton

AN – metoda Arithmetic mean Newton

HN – metoda Harmonic mean Newton

MN – metoda Midpoint Newton

HM – metoda Halley

TOM – metoda Traub-Ostrowski

4.4. Concluzii

În fiecare din diagramele precedente, am inclus pentru fiecare metodă, câte o bară verde, corespunzătoare mediei valorilor prezentate pentru cele trei polinoame de test, P_1 , P_2 și P_3 . Aceasta ne arată că cea mai performantă dintre toate metodele analizate, din toate punctele de vedere, este metoda Traub-Ostrowski. Este normal să se întâmple așa, deoarece această metodă are cel mai mare indice de eficiență, care este 1.587, și care este un indice de eficiență optimal. Menționăm și faptul că, dintre toate metodele analizate, metoda Traub-Ostrowski este singura metodă cu ordinul patru de convergență. Din grupul metodelor cu ordinul trei de convergență (AN, HN, MN și HM), deducem că cea mai performantă este metoda Halley (HM) (este cea mai bună atât ca timp calculator, cât și ca arie de convergență). Metoda Arithmetic mean Newton (AN) pare a fi cea mai "slabă" din toate punctele de vedere.

Menționăm faptul că metoda Classical Newton (CN) nu este inclusă în "competiție", aceasta fiind utilizată doar ca un etalon pentru compararea celorlalte metode.

Rezultatele studiului nostru le-am publicat în (**G. Ardelean** [14]).

CAPITOLUL 4

Proprietăți topologice ale bazinelor de atracție

1. Preliminarii topologice

2. Topologia stângă asociată unei relații de cvasiordine

3. Caracteristici topologice ale bazinelor de atracție

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$, și fie $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o metodă iterativă de rezolvare a ecuației $f(x) = 0$.

Fie $\alpha \in I$ o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Dacă pentru $x_0 \in I$ șirul dat de relația

$$(4.18) \quad x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

converge la α , atunci spunem că x_0 aparține bazinului de atracție al rădăcinii α . Bazinul de atracție al rădăcinii α este:

$$B(\alpha) = \{x_0 \in I / \text{șirul dat de (4.18) converge la } \alpha\}$$

În cazul metodei lui Newton avem

$$(4.19) \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Pe mulțimea $B(\alpha)$ definim următoarea relație:

$$(4.20) \quad x, y \in B(\alpha), \quad x \prec y \stackrel{def}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } y = F^k(x)$$

sau, altfel spus, y se poate obține prin iterații ale metodei F , pornind din x .

Prin $F^k(x)$ am notat $\underbrace{(F \circ F \circ \dots \circ F)}_{k \text{ ori}}(x)$.

Relația $\prec$ are următoarele proprietăți:

- a) este *reflexivă*, pentru că $x \prec x$ conform definiției, pentru $k = 0$;
- b) este *tranzitivă*, adică,

$$x, y, z \in B(\alpha), x \prec y \text{ și } y \prec z \Rightarrow x \prec z.$$

Relația " $\prec$ " este o relație de cvasiordine (preordine) pe mulțimea $B(\alpha)$.

În cele ce urmează vom considera spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ înzestrat cu topologia stângă asociată relației $\prec$.

În acest caz, baza spațiului topologic o constituie mulțimile

$$O_w = \{v \in B(\alpha) / v \prec w\}.$$

În cele ce urmează, vom prezenta unele aspecte ale structurii topologice introdusă de către noi, referindu-ne la un exemplu concret.

Fie funcția $f : [0.8, 6.2] \rightarrow R$.

$$(4.21) \quad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

Este limpede că zerourile funcției (4.21) sunt 1, 2, 3, 4, 5 și 6.

O vizualizare a bazinelor de atracție pentru zerourile funcției (4.21) și intervalul $[0.8, 6.2]$ este prezentată în Figura 4.1 .

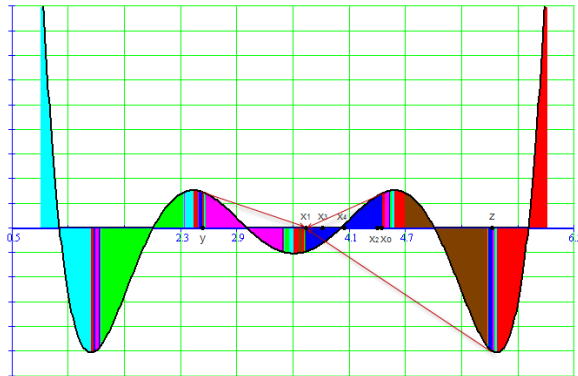


Figura 4.1. Bazinele de atracție pentru zerourile funcției (4.21)

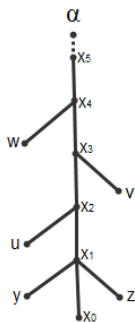
Ca exemplu, am considerat punctul de start $x_0 = 4.44$ și am determinat următoarele cinci puncte generate prin funcția de iterație (4.19):

$$\begin{aligned} x_1 = F(x_0) = 3.63448 \quad x_2 = F(x_1) = 4.39176 \quad x_3 = F(x_2) = 3.80975 \\ x_4 = F(x_3) = 4.03653 \quad x_5 = F(x_4) = 4.00031. \end{aligned}$$

După cum se poate observa în Figura 4.1, punctul x_1 poate fi obținut printr-o iterație Newton din punctele $x_0 = 4.44$, $y = 2.52345$ și $z = 5.6169$.

Astfel, avem $x_1 = F(x_0)$, $x_1 = F(y)$ și $x_1 = F(z)$. Am determinat deasemenea punctele u, v și w astfel încât $x_2 = F(u)$, $x_3 = F(v)$ și $x_4 = F(w)$, unde $u = 2.48227$, $v = 5.61186$ și $w = 2.49599$.

Pentru punctele $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y, z, u, v, w$ și pentru rădăcina $\alpha = 4$, am reprezentat următoarea schemă de structură arborescentă:

Figura 4.2. O structură arbore pe bazinul de atracție al lui α

Despre punctele $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots$ putem spune că se află în *bazinul de atracție de bază* a rădăcinii α , notat $B^*(\alpha)$, și despre punctele y, z, u, v, w spunem că se află în *bazinul de atracție extins* al lui α , notat $B(\alpha)$. Dintre predecesorii "directi" ai fiecărui element (dacă există mai mult de unul) se reține doar cel mai apropiat de rădăcina α iar restul se elimină. În acest fel, bazinul de bază se reduce la șiruri disjuncte, convergente la α . Putem spune că $B^*(\alpha)$ este cel mai mare interval care-l conține pe α și $B^*(\alpha) \subseteq B(\alpha)$.

Revenind la spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$, putem să reprezentăm pe bazinul de atracție $B(\alpha)$ următoarea structură arborescentă:

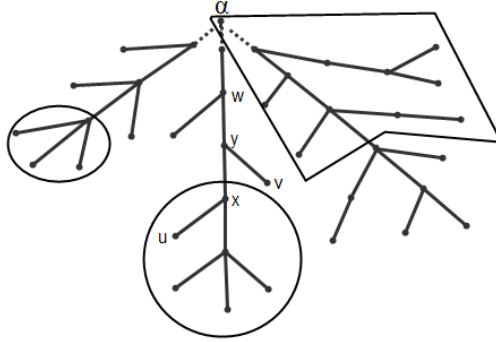


Figura 4.3. Structură arbore pe bazinul de atracție $B(\alpha)$

În acest arbore nodurile sunt elemente din $B(\alpha)$ (se poate ajunge de la orice nod la α printr-un număr finit de iterații ale metodei F).

De exemplu, în structura arbore de mai sus, avem $u \prec x$ (deoarece $x = F(u)$), $v \prec w$ (deoarece $w = F(F(v))$) și așa mai departe. În același timp, elementele u și v , de exemplu, sunt necomparabile.

Se consideră că $t \prec \alpha$ pentru orice $t \in B(\alpha)$ și că $\alpha \in B(\alpha)$.

În Figura 4.3, mulțimile delimitate prin cercuri sunt exemple de mulțimi deschise în spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$, iar mulțimea încadrată de poligon este un exemplu de mulțime închisă.

Fie B reuniunea tuturor bazinelor de atracție ale rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ din intervalul I , și fie $(B, \tau_{\prec})$ spațiul topologic cu topologia stângă asociată relației de cvasiordine $\prec$ definită de (4.20) pe B .

Câteva proprietăți ale acestei topologii sunt prezentate prin următoarea teoremă:

Teorema 4.3.3. (*G. Ardelean*) 1. *Spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ este spațiu conex.*

2. *Spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ este spațiu compact.*

3. *Restricția aplicației (metodei) F la $B(\alpha)$ este o aplicație continuă*

$$F : B(\alpha) \longrightarrow B(\alpha)$$

în sensul topologic.

4. *Spațiul topologic $(B, J_{\prec})$ este compact dar nu este conex. Singurele mulțimi conexe din acest spațiu sunt bazinele de atracție ale rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$.*

Un spațiu topologic conex și compact se numește *continuum* [68]. Conform proprietăților 1 și 2, rezultă că spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ este un continuum.

Prezentăm în continuare câteva considerații referitoare la cazul bazinelor de atracție pentru zerourile funcțiilor complexe.

Fie

$$(4.22) \quad f : D \subseteq C \rightarrow C$$

o funcție complexă olomorfă (derivabilă) pe un domeniu dreptunghiular D din planul complex, care conține toate rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

Toate proprietățile spațiului topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ sunt valabile și în cazul funcțiilor complexe.

Ca un exemplu, în acest caz considerăm funcția

$$(4.23) \quad f(x) = z^4 + 1$$

difinită pe domeniul $D = [-10, 10] \times [-10, 10]$.

În Figura 4.4 este prezentat bazinul de atracție al rădăcinii $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ($\simeq 0.707 + 0.707i$).

În acest caz funcția de iterație F este

$$(4.24) \quad F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

unde funcția f este dată de relația (4.23).

În **G. Ardelean**[10] prezentăm un program Pascal pentru generarea bazinelor de atracție ale rădăcinilor polinoamelor cu coeficienți complecși pentru metoda lui Newton.

Polinomiografia este tehnologia vizualizării bazinelor de atracție ale rădăcinilor polinoamelor cu coeficienți complecși, dezvoltată de B. Kalantari în [7].

Constatăm o asemănare (și din punct de vedere vizual) între spațiul topologic $(B(\alpha), J_{\prec})$ și spațiul topologic cunoscut sub numele de *Cercelul Hawaiian* (*Hawaiian rings*), care este de asemenea un continuum [116, 68]. Asocierea între Figura 4.4 și Figura 4.5 este cât se poate de relevantă.

Spațiul topologic *Cercelul Hawaiian*, în topologia algebrică, este subspațiul $X \subset \mathbb{R}^2$ care este reuniunea cercurilor C_n de rază $\frac{1}{n}$ și centru $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ pentru $n = 1, 2, \dots$.

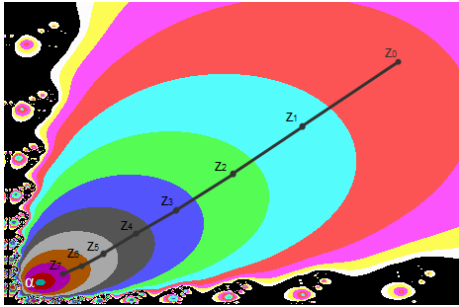


Figura 4.4. Bazinul de atracție al

$$\text{rădăcinii } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

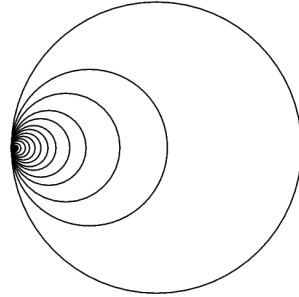


Figura 4.5. Cercelul Hawaiian

Prin studiul topologiei construită de noi pe bazinele de atracție, realizăm o conexiune între două domenii aparent total diferite, Topologia și metodele iterative de rezolvare a ecuațiilor neliniare. Considerăm că cercetarea poate continua, pentru obținerea altor rezultate interesante.

CAPITOLUL 5

Aplicația "Interactiv Bazin" pentru bazinele de atracție

1. Descrierea aplicației

Aplicația "**Interactiv Bazin**", permite generarea pe calculator a bazinelor de atracție pentru metoda lui Newton la polinoamele cu coeficienți complecși, precum și o utilizare interactivă, în sensul că pe parcursul execuției sale se pot obține o serie de informații specifice problemei abordate.

După introducerea datelor solicitate, se vor trasa pe ecranul monitorului bazinele de atracție ale rădăcinilor polinomului, corespunzătoare metodei lui Newton.

Utilizatorul poate apoi solicita informații despre orice punct din domeniul stabilit, prin simpla selectare a unui astfel de punct de pe ecranul grafic al monitorului cu ajutorul mouse-ului (clic stânga de mouse pe punct). Informațiile se referă la:

- coordonatele din planul real corespunzătoare punctului selectat;
- rădăcina la care metoda lui Newton converge, pornind din punctul selectat, și numărul corespunzător de iterații (dacă metoda converge din acel punct);
- mesajul "NU CONVERGE", dacă metoda diverge din acel punct;
- valoarea polinomului în punctul selectat;
- valoarea la care se ajunge din punctul selectat printr-o iterație Newton la polinomul precizat;

O parte din aceste informații, sunt vizualizate pe ecran prin intermediul unor elemente dinamice implementate în aplicație (cursori cu semnificație dedicată), după cum se descrie în secțiunea *Bazine de atracție CULOR I / NUMĂR DE ITERAȚII*.

1.1. Planul complex și ecranul grafic

1.2. Introducerea datelor

1.3. Bazine de atracție CULORI / NUMĂR DE ITERAȚII

Figura 5.3 ilustrează elementele de bază ale aplicației *Interactiv Bazin*.

Zonele albe reprezintă punctele din care metoda lui Newton pentru polinomul dat nu converge.

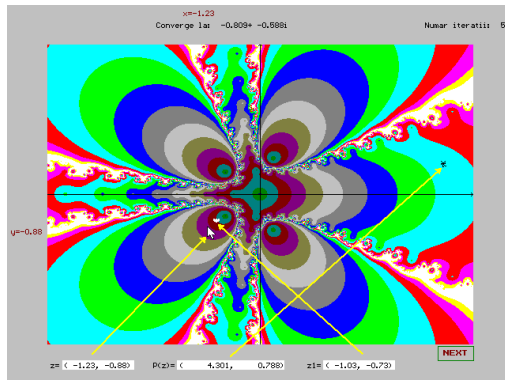


Figura 5.3. Bazinul de atracție pentru polinomul $P_1(z)$

Se evidențiază pe ecran următoarele elemente:

3 cursori, astfel

- Cursorul mouse-ului : 

care punctează la un moment dat pe un pixel din ecran, asociat cu o valoare z din domeniul complex precizat la introducerea datelor;

- Cursorul "ingeras" : 

care evidențiază poziția corespunzătoare lui z_1 reprezentând următoarea iterație Newton pentru polinomul dat.

Cursorul "drăcușor" : 

care evidențiază poziția pe ecran a imaginii valorii lui $P(z)$, de cele mai multe ori invizibilă datorită valorilor mari ale lui $P(z)$, înafara domeniului dat;

- La baza ecranului sunt afișate valorile lui z , $P(z)$ și z_1 , care se actualizează în funcție de poziția pe ecran a cursorului mouse-ului.

1.4. Bazine de atracție CULORI / RĂDĂCINI

În Figura 5.6 sunt vizualizate bazinele de atracție ale metodei lui Newton pentru polinomul $P_1(z)$. Zona verde, de exemplu, reprezintă punctele din care iterațiile Newton converg la rădăcina $z = -0.809 + 0.588i$, iar zona albastră reprezintă punctele din care iterațiile Newton converg la rădăcina $z = 0$.

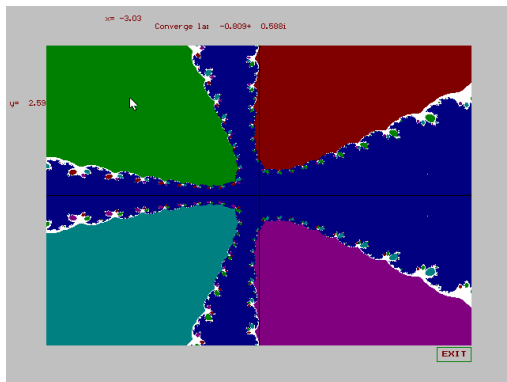


Figura 5.6 Culorile sunt asociate rădăcinilor

Zonele de culoare albă reprezintă punctele de divergență ale metodei lui Newton pentru polinomul analizat.

Un exemplu este evidențiat în Figura 5.7, unde se poate vedea și mesajul corespunzător afișat : "NU CONVERGE".

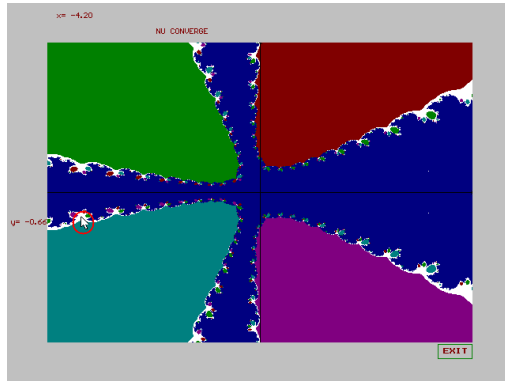


Figura 5.7 Zonele albe reprezintă punctele de divergență

La acționarea butonului "EXIT" se afișează ecranul cu valorile rădăcinilor polinomului, după care se iese din aplicație.

În **G. Ardelean** [9] am prezentat un algoritm și un program Pascal pentru determinarea rădăcinilor reale și complexe ale unui polinom, iar în **G. Ardelean**[12] am prezentat aplicația de vizualizare a bazinelor de atracție pe calculator.

ANEXA - programe Mathcad și Pascal

Programe Mathcad pentru generarea bazinelor de atracție

Programe sursă Pascal

Programul NEWTONPOL

Procedura Newton

**Secvența de program Pascal care determină rădăcinile
polinomului și generează bazinele de atracție CULORI /
NUMĂR DE ITERAȚII**

**Secvența de program Pascal care generează bazinele de
atracție CULORI / RĂDĂCINI**

Unit-ul Ucomplex

Bibliografie

- [1] S. ABBASBANDY, *Improving Newton-Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput., **145** (2003), 887–893.
- [2] O. AGRATINI, I. CHIOREAN, G. COMAN, and R. TRÎMBIȚAȘ, *Analiză numerică și teoria aproximării, Vol. III*, Presa Universitară Clujeană, 2002.
- [3] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1966.
- [4] E. L. ALLGOVER, K. GLASSHOFF, and H. O. PEITGEN, *Numerical Solution of Nonlinear Equations: Lecture Notes in Mathematical 878*, New York: Springer-Verlag, 1981.
- [5] S. AMAT, S. BUSQUIER, and J. M. GUTIÉRREZ, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math., **157** (2003), 197–205.
- [6] I. ANDREADIS and T. E. KARAKASIDIS, *On a topological closeness of perturbed Mandelbrot sets*, Appl. Math. Comput., **215** (2010), 3674–3683.
- [7] **G. ARDELEAN**, *Topologie, automate finite și relația de dominare din lingvistica algebrică*, Studii și Cercetări Matematiche, **29** (1977), 577–585.

- [8] **G. ARDELEAN**, *Some topological properties of a family of linear languages*, Topology, Vol. II(Proc. Fourth Colloq.,Budapest, 1978), 41-48, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai,23, North-Holland, Amsterdam, 1980, pp. 41-48.
- [9] **G. ARDELEAN**, *On the determination of real and complex roots of a polynomial using the computer (in romanian)*, Carpathian J. Math., **07** (1991), 141-147.
- [10] **G. ARDELEAN**, *Generating the basins of attraction for Newton's method*, Creative Math. and Inf., **17** (2008), 285-292.
- [11] **G. ARDELEAN**, *A comparison between iterative methods by using the basins of attraction*, Appl. Math. Comput., **218** (2011), 88-95.
- [12] **G. ARDELEAN**, *"Didactic basin" - an application to view on the computer the basins of attraction*, 8-th International Conference on Applied Mathematics (2011), October 27-31, Baia Mare, Romania.
- [13] **G. ARDELEAN**, *Graphical views for the basins of attraction of the real roots of a nonlinear equation*, Gaphical Models (2011), Manuscript number: GMOD-11-65(Under Review).
- [14] **G. ARDELEAN**, *A New Third-Order Newton-Type Iterative Method for Solving Nonlinear Equations*, Appl. Math. Comput. (2011), Manuscript Number: AMC-D-11-02047R1(Under Review).
- [15] **G. ARDELEAN**, *On "Some modifications of Newton's method with higher-order convergence for solving nonlinear equations"*, J. Comput. Appl. Math., (2011), Manuscript Number: CAM-D-11-00976(Under Review).
- [16] **G. ARDELEAN**, *A topological structure on the basins of attraction for iterative methods*, Creative Math. and Inf., **20** (2011), 8-15.
- [17] **G. ARDELEAN**, *Using symbolic computation in Mathematica for verifying the convergence of the iterative methods*, 8-th International Conference on Applied Mathematics (2011), October 27-30, Baia Mare, Romania.

- [18] **G. ARDELEAN**, *Prooving the convergence of the iterative methods by using symbolic computation in Maple*, Carpathian J. Math., **28** (2012), 1–8.
- [19] I. K. ARGYROS, *On a theorem of L. V. Kantorovich concerning Newton's Method*, Appl. Math. Comput., **155** (2003), 223–230.
- [20] I. K. ARGYROS, *Weak sufficient convergence conditions and applications for Newton methods*, J. Appl. Math. & Computing, **16** (2004), 1–17.
- [21] I. K. ARGYROS, *Quasi-Newton methods for solving generalized equations*, Nonlinear Funct. Anal. & App., **11** (2006), 647–654.
- [22] I. K. ARGYROS and F. SZIDAROVSKY, *The Theory and Applications of Iteration Methods*, CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [23] J. BAK and D. J. NEWMAN, *Complex Analysis*, New York: Springer-Verlag, 1982.
- [24] M. BARNESLEY, *Fractals Everywhere*, New York: Academic Press, 1988.
- [25] V. BERINDE, *Remarks on the Convergence of the Newton-Raphson Method*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **24** (1995), 15–21.
- [26] V. BERINDE, *On some exit criteria for the Newton method*, Novi Sad J. Math., **27** (1997), 19–26.
- [27] V. BERINDE and M. PĂCURAR, *A Convergence Theorem for Some Newton Type Methods under Weak Smoothness Conditions*, Analele Universității de Vest, Timișoara, Seria Matematică-Informatică, **2** (2008), 115–122.
- [28] V. BERINDE, *On the convergence of the Newton method*, Trans. of the Tech. Univ. of Kosice., **1** (1997), 68–77.
- [29] V. BERINDE, *Weak exit criteria for some Newton type methods*, Bulletin for Applied Mathematics, **77** (1995), 27–32.

- [30] E. BODEWIG, *Sur la méthode de L'aguerre pour l'approximation des racines des certaines équations et sur la critique d'Hermite*, Nederl. Acad. Vetensch. Proc., **49** (1946), 911–921.
- [31] F. CAJORI, *Historical note on the Newton-Raphson method of approximation*, Amer. Math. Month., **18** (1911), 29–33.
- [32] C.S. CALUDE, H. JÜRGENSEN, and L. STAIGER, *Topology on words*, Theoretical Computer Science, **410** (2009), 2323–2335.
- [33] E. CĂȚINAȘ, *Inexact perturbed Newton methods and applications to a class of Krylov solvers*, J. Optim. Theory Appl., **108** (2001), 543–570.
- [34] E. CĂȚINAȘ, *On the superlinear convergence of the successive approximations methods*, J. Optim. Theory Appl., **113** (2002), 473–485.
- [35] E. CĂȚINAȘ, *The inexact, inexact-perturbed and quasi-Newton methods are equivalent models*, Math. Comp., **74** (2005), 291–301.
- [36] E. CĂȚINAȘ, *Methods of Newton and Newton-Krylov type*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2007.
- [37] E. CĂȚINAȘ, *Estimating the radius of an attraction ball*, Appl. Math. Lett., **22** (2009), 712–714.
- [38] F. ÇILINGIR, *Mystery of the rational iteration arising from relaxed Newton's method*, Chaos, Solutions & Fractals, **32** (2007), 471–479.
- [39] C. CHUN, *Iterative Methods Improving Newton's Method by the Decomposition Method*, Computers&Mathematics with Applications, **50** (2005), 1559–1568.
- [40] C. CHUN, *A simply constructed third-order modifications of Newton's method*, J. Comput. Appl. Math., **219** (2008), 81–89.
- [41] C. CHUN and Y. HAM, *Some fourth-order modifications of Newton's method*, Appl. Math. Comput., **197** (2008), 654–658.
- [42] O. CIRA, *Lecții de Mathcad 2001 Professional*, Editura Albastră, Cluj Napoca, 2003.
- [43] O. CIRA, *Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice*, Editura Academiei Române, București, 2005.

- [44] O. CIRA and C. M. CIRA, *Attraction basin for Broyden's method (numerical experiments)*, Bulletins for Applied and Computing Mathematics, PAMM, Iteruniversity Network in Central Europe, number 2440 in BAM-CVII, pages 41-48, 2005.
- [45] O. CIRA and ȘT. MĂRUȘTER, *Metode numerice pentru ecuații neliniare*, Editura Matrix Rom, București, 2008.
- [46] O. CIRA, *The Attraction Basins for Iterative Methods*, Proceedings of the Eighth Symposium of Mathematics and its Applications, Timișoara Research of the Romanian Academy and "Politehnica" University of Timișoara, 4-7 November (1999), 39-46.
- [47] O. CIRA, *Numerical Experiments on Attraction Basin*, Advanced Modelling and Optimization (AMO), **2(3)** (2001), 122-134.
- [48] O. CIRA and D. BUCERZAN, *Graphics Representation of Attraction Basins for Iterative Method of Approximating the Roots of Nonlinear Equations*, Analele Universității "Aurel Vlaicu" din Arad, Fascicola Matematică-Informatică (2002), 181-186.
- [49] G. COMAN, *Analiză numerică*, Editura Libris, Cluj Napoca, 1995.
- [50] S. D. CONTE and C. DE BOOR, *Elementary Numerical Analysis*, 3rd ed., 1980.
- [51] ION GH. ȘABAC, *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [52] J. H. CURRY, L. GARNETT, and D. SULLIVAN, *On the iteration of a rational function: Computer experiments with Newton's method*, Communications in Mathematical Physics, **91** (1983), 267-277.
- [53] B. DEMIDOVITCH, *Éléments de calcul numérique*, Editions Mir, Moscou, 1973.
- [54] A. DIACONU, *On the acceleration of the convergence of certain iterative methods using a proceeding of Traub's type*, Pure Mathematics and Applications, **15**, No. 2-3, (2004), 135-147.

- [55] A. DIACONU, *The approximation of the equation's solution in linear normed spaces using approximant sequences*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematics, **XLVIII**, No.1, (2003), 55–72.
- [56] W. S. DORN and D. D. MC. CRACKEN, *Metode numerice cu programe în FORTRAN IV*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.
- [57] J. DZUNIC, M. S. PETKOVIĆ, and L. D. PETKOVIĆ, *A family of optimal three-point methods for solving nonlinear equations using two parametric functions*, Appl. Math. Comput., **217** (2011), 7612–7619.
- [58] B. EZZELL, *Graphics Programming in Turbo Pascal 6.0*, Addison Wesley, 1991.
- [59] J. D. FOLEY and A. VAN DAM, *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison Wesley, London, 1990.
- [60] W. GAUTSCHI, *Families of algebraic test equations*, Calcolo, **16** (1979), 383–398.
- [61] W. GAUTSCHI, *Questions of numerical condition related to polynomials*, Studies in Numerical Analysis (G. H. Golub ed.) Washington, D.C.: MAA (1984), 140–177.
- [62] W. GAUTSCHI, *Numerical Analysis: An Introduction*, Birkhäuser, 1997.
- [63] J. GLIECK, *Chaos*, New York: Viking Press, 1987.
- [64] J. M. GUTIÉRREZ and M. A. HERNÁNDEZ, *An acceleration of Newton's method: Super-Halley method*, Appl. Math. Comput., **117** (2001), 223–239.
- [65] E. HALLEY, *A new, exact and easy method for finding the roots of any equations generally, without any previous reduction (Latin)*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **18** (1694), 136–148.
- [66] E. HALLEY, *A new, exact and easy method for finding the roots of any equations generally, without any previous reduction*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **3** (1809), 640–649.

- [67] YM HAM, C. CHUN, and S-G LEE, *Some higher-order modifications of Newton's method for solving nonlinear equations*, J. Comput. Appl. Math., **222** (2008), 477–486.
- [68] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [69] P. HENRICI, *Applied and Computational Complex Analysis*, New York: Wiley, 1974.
- [70] H. H. H. HOMEIER, *On Newton-type methods with cubic convergence*, J. Comput. Appl. Math., **176** (2005), 425–432.
- [71] H. H. H. HOMEIER, *On Newton-type methods for multiple roots with cubic convergence*, J. Comput. Appl. Math., **231** (2009), 249–254.
- [72] A. HOUSEHOLDER, *The numerical Treatment of Single Nonlinear Equation*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [73] J. HUBBARD, D. SCHLEICHER, and S. SUTHERLAND, *How to find all roots of complex polynomials by Newton's method*, Invent. math., **146** (2001), 1–33.
- [74] STOER J. and BULIRSCH R., *Introduction to Numerical Analysis*, 1980.
- [75] M. A. JENKINS and J. F. TRAUB, *A three-stage variable-shift iteration for polynomial zeros*, NM, **14** (1970), 252–263.
- [76] G. JULIA, *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*, Journal de Math. Pure et Appl., **8** (1918), 47–245.
- [77] B. KALANTARI, *Polinomiography and applications in art, education and science*, Comput. Graph., **28** (2004), 417–430.
- [78] L. V. KANTOROVICH, *Functional Analysis in Applied Mathematics (în limba rusă)*, Uspechi Mat. Nauk, **3** (1948), 89–135.
- [79] E. M. KASENALLY, *A Generalized Minimum Backward Error Algorithm for Nonsymmetric Linear Systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **16** (1995), 698–719.
- [80] E. M. KASENALLY and V. SIMONCINI, *Analysis of a minimum perturbation algorithm for nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Numer. Anal., **34** (1997), 48–66.

- [81] C. T. KELLEY, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, number 16 in Frontiers in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [82] L. J. KELLEY, *General Topology*, Van Nostrand Company, inc., 1955.
- [83] D. KINCAID and W. CHENEY, *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, AMS, 2009.
- [84] N. KOLLERSTROM, *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth*, BJHS, **25** (1992), 347–354.
- [85] J. KOU, *The improvements of modified Newton's method*, Appl. Math. Comput., **189** (2007), 602–609.
- [86] J. KOU and Y. LI, *Modified Chebyshev-Halley methods with sixth-order convergence*, Appl. Math. Comput., **188** (2007), 681–685.
- [87] J. KOU, Y. LI, and X. WANG, *A family of fifth-order iterations composed of Newton and third-order methods*, Appl. Math. Comput., **186** (2007), 1258–1262.
- [88] J. KOU, Y. LI, and X. WANG, *A family of fourth-order methods for solving non-linear equations*, Appl. Math. Comput., **188** (2007), 1031–1036.
- [89] J. KOU, Y. LI, and X. WANG, *A variant of super-Halley method with accelerated fourth-order convergence*, Appl. Math. Comput., **186** (2007), 535–539.
- [90] L.E. KOZMA and **G. ARDELEAN**, *A possible visual image of the extended monogenous functions*, Creative Math. and Inf., **18** (2009), 182–187.
- [91] L. E. KOZMA, *Analiză matematică - funcții complexe*, Ed. RISO-PRINT Cluj-Napoca, 2006.
- [92] H. T. KUNG and J. F. TRAUB, *Optimal order of one-point and multipoint iteration*, Journal of the ACM, **21** (1974), 643–651.
- [93] A. LUPAȘ, *Metode numerice*, Editura Tehnică, București, 1989.

- [94] B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, New York: Freeman, 1982.
- [95] M. MARDEN, *Geometry of Polynomials*, 1966.
- [96] ȘT. MĂRUȘTER, *The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **63**(1) (1977), 69–73.
- [97] ȘT. MĂRUȘTER, *On the tangent parabola method for nonlinear equations in one variable*, Seminar of Informatics and Computational Mathematics, Depart. of Informatics, West Univ., Timișoara, Vol. 1 (1977), 1–9.
- [98] ȘT. MĂRUȘTER, *Numerical experiments on attraction basin*, Anals Computer Science Series, **2**, 162–171.
- [99] ȘT. MĂRUȘTER, *Metode numerice în rezolvarea ecuațiilor neliniare*, Editura Tehnică, București, 1981.
- [100] I. NEWTON, *Method of Fluxions*, 1671(publicat in 1736).
- [101] M. A. NOOR, W. A. KHAN, and A. HUSSAIN, *A new modified Halley method without second derivatives for nonlinear equation*, Appl. Math. Comput., **189** (2007), 1268–1273.
- [102] M. A. NOOR, W. A. KHAN, and A. HUSSAIN, *A new modified Halley method without second derivatives for nonlinear equations*, Appl. Math. Comput., **189** (2007), 1268–1273.
- [103] M. A. NOOR and K. I. NOOR, *Modified iterative methods with cubic convergrnce for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput., **184** (2007), 322–325.
- [104] J. J. O’CONNOR and E. F. ROBERTSON, *Joseph Raphson*, (1996).
- [105] A. M. OSTROWSKI, *Solution of Equations and Systems of Equations*, Academic Press, New York, 1960.
- [106] A. M. OSTROWSKI, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Space*, Academic Press, New York, 1973.
- [107] A. Y. OZBAN, *Some New Variants of Newton’s Method*, Appl. Math. Lett., **17** (2004), 677–682.

- [108] H. PEITGEN, D. SAUPE, and V. F. HAESELER, *Cayley's problem and Julia sets*, Mathematics Intelligencer, **6** (1984), 11–20.
- [109] H. O. PEITGEN and P. H. RICHTER, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [110] G. PETERS and J. H. WILKINSON, *Practical problems arising in the solution of polynomial equations*, IMAJNA, **8** (1971), 16–35.
- [111] L. D. PETKOVIĆ and M. S. PETKOVIĆ, *A note on some recent methods for solving nonlinear equations*, Appl. Math. Comput., **185** (2007), 368–374.
- [112] M. S. PETKOVIĆ and L. D. PETKOVIĆ, *A one parameter square root family of two-step root-finders*, Appl. Math. Comput., **188** (2007), 339–344.
- [113] M. S. PETKOVIĆ and L. D. PETKOVIĆ, *Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations*, Appl. Anal. Discrete Math., **4** (2010), 1–22.
- [114] C. A. PICKOVER, *A note on chaos and Halley's methods*, ACMCOM, **31** (1988).
- [115] S. PLAZA and N. ROMERO, *Attracting cycles for relaxed Newton's method*, J. Comput. Appl. Math., **235** (2011), 3238–3244.
- [116] I. POP, *Topologie Algebrică*, Editura Științifică, București, 1990.
- [117] V. PREJMEREAN, *Grafică pe calculator și prelucrări de imagini*, Universitatea de Nord, Baia Mare, 2000.
- [118] I. PĂVĂLOIU, *Introducere în Teoria Aproximării Soluțiilor Ecuațiilor*, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1976.
- [119] I. PĂVĂLOIU, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Editura Dacia, Cluj Napoca, 1981.
- [120] I. PĂVĂLOIU and E. CĂTINAȘ, *On a Steffensen-Hermite method of order three*, Appl. Math. Comput., **215** (2009), 2663–2672.
- [121] I. PĂVĂLOIU and N. POP, *Interpolare și aplicații*, RISOPRINT Cluj Napoca, 2005.

- [122] A. RALTSON and P. RABINOWITZ, *A First Course in Numerical Analysis*, New York:McGrow-Hill, 1978.
- [123] J. RAPHSO, *Analysis aequationum universalis*, London, 1690.
- [124] R. K. ROEDER, *Topology For the Basins of Attraction of Newton's Method in two complex variables*, A Disertation Presented to the Faculty of the Graduate School of Cornell University (2005).
- [125] Y. SAAD and M. H. SCHULTZ, *GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Equations*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **7** (1986), 856–869.
- [126] M. L. SAHARI and I. DJELLIT, *Fractal Newton basins*, Discrete Dynamics in Nature and Society, 28756(Article ID) (2006), 16 pages.
- [127] M. L. SAHARI and I. DJELLIT, *Fractalization du bassin d'attractions dans l'algorithme de Newton modifié*, Esaim:Proceedings, **20** (2007), 208–216.
- [128] E. SCHRÖDER, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann., **2** (1870), 317–365.
- [129] T. SIMPSON, *Essays ... on Mathematics*, London, 1740, 81.
- [130] H. SUSANTO and N. KARJANTO, *Newton's method basin of attraction revisited*, Appl. Math. Comput., **215** (2009), 1084–1090.
- [131] S. SUTHERLAND, *Finding roots of complex polynomials with Newton's method*, Preprint, Institute for Mathematical Sciences: SUNY Stony Brook (1990).
- [132] J. F. TRAUB, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Chelsea Publishing Company, New York, 1982.
- [133] R. VALK, *Topologische Wortmengen, topologische Automaten, Zustandsendliche stetige Abbildungen*, Mitteilungen der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, **19** (1972).
- [134] J. L. VARONA, *Graphic and numerical comparison between iterative methods*, Math. Intell., **24** (2002), 37–46.

- [135] M. VLADA, A. POSEA, I. NISTOR, and ȘI ALȚII, *Grafica pe calculator în limbajele Pascal și C, Implementare și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1992.
- [136] Website, Maple, <http://www.maplesoft.com/>.
- [137] Website, Matlab, <http://www.mathworks.com/>.
- [138] Website, Mathcad, <http://www.ptc.com/>.
- [139] Website, Mathematica, <http://www.wolfram.com/>.
- [140] S. WEERAKOON and T. G. I. FERNANDO, *A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence*, Appl. Math. Lett., **13** (2000), 87–93.
- [141] J. H. WILKINSON, *The perfidious polynomial*, Studies in Numerical Analysis (G. H. Golub ed.) Washington, D. C.:MAA (1984), 1–28.
- [142] Z. XIAOJIAN, *A class of Newton's methods with third-order convergence*, Appl. Math. Lett., **20** (2007), 1026–1030.
- [143] T. YAMAMOTO, *Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods*, J. Comput. Appl. Math., **124** (2000), 1–23.
- [144] D. M. YOUNG and R. T. GREGORY, *A survey of Numerical Mathematics Vols. 1 and 2*, Reading Mass.:Addison-Wesley (Reprinted New York: Dover 1988)., 1972.