Universitatea Tehnică Cluj Napoca
Centrul Universitar Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe

TEZĂ DE DOCTORAT

TEOREME DE PUNCT FIX IN SPAȚII METRICE ÎNZESTRATE CU UN GRAF

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Bojor Florin

Baia Mare
2012

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix este unul dintre cele mai puternice si mai productive instrumente din analiza neliniară şi poate fi considerată ca fiind nucleul analizei neliniare. Cel mai cunoscut rezultat din teoria punctului fix este Principiul Contracţiei al lui Banach (1922), care poate fi considerat începutul acestei teorii. În spaţii metrice acest principiu poate fi formulat astfel:

Fie (X, d) *un spaţiu metric complet şi operatorul* $T : X \to X$ *verifică condiţia*

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \ \forall x, y \in X, \tag{0.1}$$

unde $a \in [0, 1)$*. Atunci operatorul* T *are un unic punct fix care poate fi obţinut prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice punct din spaţiu.*

Un astfel de operator care are un unic punct fix şi pentru care şirul aproximaţiilor succesive $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către acel punct fix pentru orice $x \in X$ se numeşte *operator Picard*. În mare parte teoria metrică a punctului fix studiază condiţiile suficiente în care un operator este un operator Picard. Deci Principiul Contracţiei al lui Banach spune că orice contracţie, adică un operator care verifică relaţia (0.1) este un operator Picard. Unul din modurile de generalizare şi extindere a Principiului Contracţiilor este înlocuirea condiţiei de contracţie (0.1) cu una mai slabă sau cu una independentă de aceasta. Deoarece orice contracţie este un operator continuu, s-a pus următoarea problemă: *Există condiţii contractive care să nu implice continuitatea operatorului?*

Primul răspuns afirmativ la acestă problemă a fost dat de R. Kannan [**52**] în 1968, care a demonstrat o teoremă de punct fix care extinde principiul contracţiilor la operatori care nu trebuie să fie continui, considerând în loc de (0.1) condiţia: există $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât

$$d(Tx, Tz) \leqslant b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right], \ \forall x, y \in X. \tag{0.2}$$

Urmând exemplul Teoremei lui Kannan, Chatterjea [**31**] a demonstrat o teoremă de punct fix în care condiţia de contracţie este duala relaţiei (0.2) şi anume: există $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât

$$d(Tx, Tz) \leqslant b\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right], \ \forall x, y \in X. \tag{0.3}$$

Este binecunoscut faptul, vezi Rhoades [**76**], că cele trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) sunt independente.

Prin combinarea celor trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) L. Ćirić [**34**], S. Reich [**74**] şi I.A. Rus [**81**] au demonstrat o teoremă de punct fix în care au considerat condiţia de contracţie mai generală: există numerele reale pozitive a, b, c cu proprietatea $a+b+c < 1$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty), \ \forall x, y \in X \tag{0.4}$$

În 1972, T. Zamfirescu [**87**] a obţinut o teoremă de punct fix foarte interesantă prin combinarea celor trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) în felul următor: există trei numere reale $a \in [0, 1)$ şi $b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $x, y \in X$ cel puţin una din următoarele condiţii este adevărată:

(z_1) $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y)$;
(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Folosind noţiunea de funcţie de comparaţie, în anul 1983 I.A. Rus [**79**] a obţinut o altă generalizare a Principiului Contracţiei prin înlocuirea condiţiei (0.1) cu următoarea: există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y)), \ \forall x, y \in X. \tag{0.5}$$

O generalizare a Teoremei lui Kannan a fost făcută de R.M.T. Bianchini [**21**] prin inlocuirea condiţiei (0.2) cu următoarea: există $a \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant a \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}, \ \forall x, y \in X. \tag{0.6}$$

În clasificarea făcută de Rhoades [**76**] numărul condiţiilor de contracţie considerate de 125, iar condiţiile de contracţie prezentate mai sus sunt cele pentru care în această teză au fost făcute extinderi şi generalizări.

În anul 2003 W. A. Kirk, P. S. Srinivasan şi P. Veeramani au intordus o nouă metodă de generalizare a condiţiei (0.1) şi anume reducerea numărului perechilor $(x, y) \in X \times X$ care să verifice condiţia de contracţie. Pentru aceasta au considerat că A şi B sunt două mulţimi nevide şi închise ale spaţiului X şi operatorul $T : A \bigcup B \to A \bigcup B$ verifică condiţiile:

(1) $T(A) \subseteq B$, şi $T(B) \subseteq A$;
(2) $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \forall x \in A, \ \forall y \in B$..

În aceste condiţii operatorul T are un unic punct fix. În aceeaşi lucrare W. A. Kirk, P. S. Srinivasan şi P. Veeramani au extins condiţia de contracţie la p mulţimi, unde $p \geq 2$.

Un an mai târziu A. C. M. Ran şi M. C. B. Reurings [**71**] au considerat operatori pe spaţii metrice parţial ordonate, iar condiţia de contracţie (0.1) a fost înlocuită cu următoarea: există $a \in [0,1)$ astfel încât

$$(0.7) \qquad d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y), \ \forall x,y \in X, \ x \leqslant y,$$

unde " $\leq$ " este relaţia de ordine parţială din spaţiul X.

În 2008 J. Jachymski [**44**] a avut excelenta idee să folosească în loc de spaţii metrice parţial ordonate spaţii metrice înzestrate cu un graf orientat, iar condiţia de contracţie (0.1) să fie îndeplinită doar pentru arcele grafului. Acest lucru înseamnă că dacă G este un graf orientat şi $E(G)$ este mulţimea arcelor grafului atunci condiţia de contracţie se scrie:

$$(0.8) \qquad d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y), \ \forall (x,y) \in E(G).$$

Pornind de la aceste rezultate, scopul tezei de faţă este de a face un studiu sistematic al teoremelor de punct fix în spaţii metrice înzestrate cu un graf. Condiţiile de contracţie pe care le vom folosi sunt: Kannan, Zamfirescu, Ćirić-Reich-Rus, $\varphi-$contracţii şi Bianchini.

Lucrarea este structurată în patru capitole, fiecare capitol fiind alcătuit la rândul său din mai multe secţiuni.

În primul capitol sunt prezentate noţiunile de bază din teoria puctului fix, noţiuni pe care se construiesc conceptele introduse în această lucrare. Pe parcursul celor opt secţiuni, se introduc notaţiile folosite în această lucrare, noţiunile de metrică şi spaţiu metric, mulţime ordonată şi spaţiu metric parţial ordonat, graf, funcţie de comparaţie, operatori pe spaţii metrice şi teoremele de punct fix corespunzătoare, precum si teoreme de punct fix pentru operatori în spaţii metrice ordonate şi pentru operatori ciclici.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt: Exemplele 1.4.1, 1.4.2, Definiţia 1.4.4 şi Observaţia 1.4.3.

În capitolul la doilea prezentăm noţiunea de Banach G-contracţie introdusă de J. Jachymski în [**44**] si demonstrăm teoreme de punct fix pentru această noţiune. În continuare demonstrăm că Teoremele de punct fix în spaţii metrice ordonate, Teorema lui Edelstein, Teoremele de punct fix pentru operatori ciclici şi Alternativa punctului fix sunt consecinţe ale Teoremei lui Jachymski 2.1.2. După care prezentăm două aplicaţii ale Alternativei punctului fix la demonstrarea stabilităţii de tip Hyers-Ulam a ecuaţiilor funcţionale.

Contribuţiile originale ale autorului în acest capitol sunt: Teorema 2.2.4, în care se demonstrează stabilitatea de tip Hyers-Ulam generalizată pentru ecuaţia Cauchy generalizată

$$(0.9) \qquad f(a_1(x_1) + a_2(x_2) + ... + a_n(x_n)) = m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_n f(x_n),$$

Teoremele 2.2.5 şi 2.2.6 în care se demonstrează stabilitatea de tip Hyers-Ulam Rassias pentru ecuaţia diferenţială:

$$y'(x) + f(x)\, y(x) + g(x) = 0, \tag{0.10}$$

Corolarele 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 care sunt consecinţele celor două teoreme anterioare în care se demonstrează stabilitatea Hyers-Ulam pentru cele două ecuaţii, Lema 2.2.1, Concluzia 2.2 precum şi demonstraţiile Teoremelor 2.2.2 şi 2.2.3.

În Capitotlul al treilea extindem teoremele clasice de punct fix obţinute de Kannan, Zamfirescu, Reich-Ćirić-Rus, Bianchini pentru cazul spaţiilor metrice înzestrate cu un graf. Din aceste extinderi deducem teoreme de punct fix în spaţii metrice ordonate şi, pentru operatori ciclici. Pentru fiecare concept nou introdus vom demonstrăm că extinderea nu este trivială, prin exemple de operatori care verifică condiţiile respective.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt:
Definiţiile 3.1.1,3.2.1,3.3.1,3.4.1,3.5.1, in care se introduc noţiunile de operatori G-Kannan, G-Zamfirescu, GĆirić-Reich-Rus, (G, φ)-contracţii şi operator G-Zamfirescu
Teoremele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.2, în care se demonstrează teoreme de punct fix pentru operatorii de mai sus
Corolarele 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1, în care particularizând grafurile din teoremele prezentate obţinem teoreme de punct fix în spaţii metrice ordonate şi, pentru operatori ciclici,
Lemele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1, 3.5.2,
Exemplele 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.2, 3.3.3,3.3.4, 3.4.2,3.4.3, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.4,
Observaţiile 3.1.1, 3.2.3, 3.2.2,
demonstraţiile Teoremelor 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2, 3.5.3 precum şi Propoziţia 3.4.1.

În ultimul capitol al tezei, Capitolul 4, extindem teoremele de punct fix din capitolul precedent în două contexte diferite:

a) lucrând în spaţii metrice G-complete;
b) lucrând pe mulţimi înzestrate cu două metrici(teoreme de tip Maia).

Contribuţiile autorului din acest capitol sunt: Definiţia 4.1.2 în care se introduce conceptul de spaţiu G-complet,
Exemplul 4.1.1, Teorema 4.1.1 referitoare la punctele fixe ale operatorilor G-Kannan în spaţii metrice G complete şi Teorema 4.2.2 care este o teoremă de tip Maia pentru operatori $G-$Kannan.

Teza se încheie cu lista bibliografică, precedată de un extras din aceasta cuprinzând lucrările elaborate de autorul tezei.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Există o multitudine de spaţii în care sunt formulate şi demonstrate teoremele de punct fix: spaţii metrice, spaţii topologice, spaţii uniforme spaţii metrice parţial ordonate etc. Având în vedere faptul că în teza de faţă spaţiul ambiental este un spaţiu metric înzestrat cu un graf, vom prezenta doar noţiunile strict necesare pentru a crea cadrul în care vom prezenta rezultatele importante ale tezei.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt: Exemplele 1.4.1, 1.4.2, Definiţia 1.4.4 şi Observaţia 1.4.3.

4. Grafuri

Următoarele definiţii şi exemple sunt binecunoscute, vezi de exemplu [**37**] sau [**51**].

Definiţia 1.4.1. *Un **graf orientat** G este o pereche ordonată $(V(G), E(G))$ formată dintr-o mulţime nevidă $V(G)$ de **noduri** şi o mulţime $E(G)$ de **arce**, disjunctă faţă de $V(G)$ împreună cu o funcţie de incidenţă ψ_G care asociază fiecărui arc din G o pereche ordonată de noduri(nu neapărat distincte) din $V(G)$.*

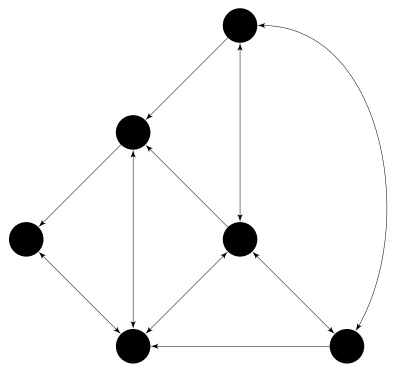

Fig. 1 *Graf orientat G*

Observaţia 1.4.1. *Dacă în definiţia 1.4.1 funcţia ψ_G asociază fiecărui arc din G o pereche neordonată de noduri(nu neapărat distincte) din $V(G)$ atunci G se numeşte **graf neorientat** (Vezi Fig.2).*

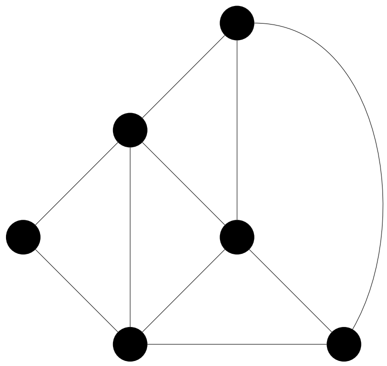

Fig. 2 *Graful neorientat obţinut din G*

Dacă $\psi_G(e) = (a,b)$ atunci vom spune că a şi b sunt nodurile incidente muchiei e sau că muchia e uneşte nodurile a şi b. Dacă $\psi_G(e) = (a,a)$ atunci muchia e se numeşte **buclă** a grafului G. Grafurile în care mulţimea nodurilor este finită se pot reprezenta grafic, proprietate din care provine numele noţiunii. Nodurile unui graf le vom reprezenta prin puncte iar arcele printr-o curbă sau un segment care uneşte cele două noduri incidente.

Inversul grafului orientat G este graful notat G^{-1} şi care se obţine din G prin înlocuirea fiecărui arc $(a,b) \in E(G)$ cu arcul opus (b,a). Prin urmare avem că:

$$V\left(G^{-1}\right) = V(G) \text{ şi } E\left(G^{-1}\right) = \{(b,a) \mid (a,b) \in E(G)\}$$

Vom nota cu $\tilde{G}$ graficul obţinut din G prin adăugarea arcelor opuse ale lui G şi vom obţine că:

$$V\left(\tilde{G}\right) = V(G) \text{ şi } E\left(\tilde{G}\right) = E(G) \cup E\left(G^{-1}\right) \tag{1.11}$$

Graful $\tilde{G}$ este un graf orientat în care mulţimea arcelor este simetrică.

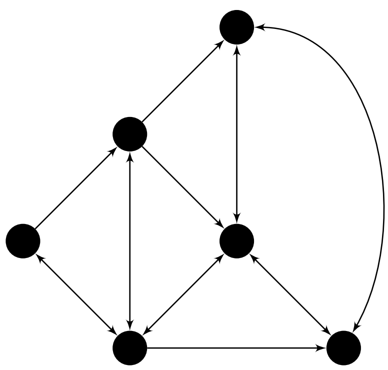

Fig. 3 *Inversul grafului G*

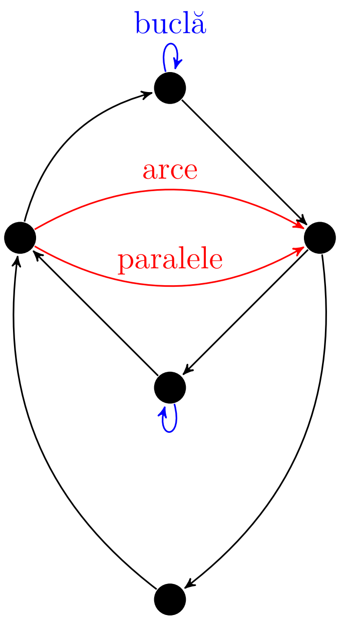

Fig. 4 Graf care conţine arce paralele (multigraf) şi bucle

Vom spune că (V', E') e un subgraf a lui G dacă $V' \subseteq V(G)$, $E' \subseteq E(G)$ şi pentru orice arc $(x, y) \in E'$, $x, y \in V'$.

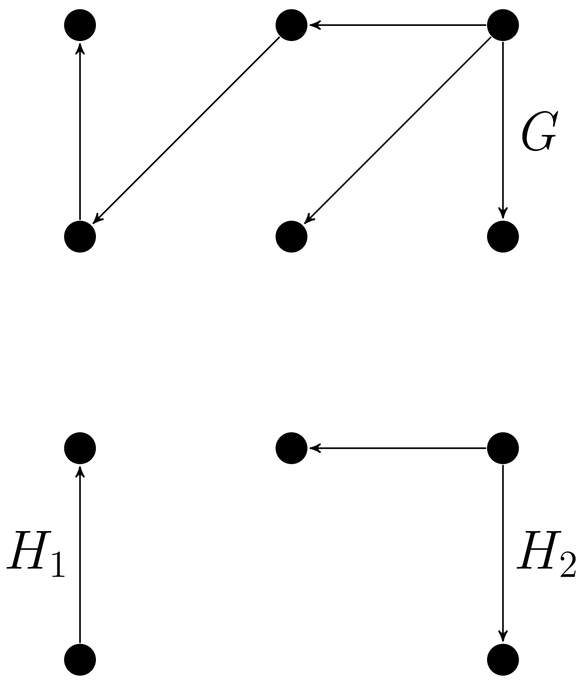

Fig.5 H_1 şi H_2 sunt subgrafuri ale lui G

În continuare vom prezenta câteva noţiuni privind conectivitatea unui graf orientat.

Definiţia 1.4.2. *Dacă x şi y sunt noduri ale grafului orientat G, atunci un* ***drum*** *în G de la x la y de lungime N $(N \in \mathbb{N})$ este un şir $(x_i)_{i=0}^{N}$ de $N+1$ noduri astfel încât $x_0 = x$, $x_N = y$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ pentru $i = 1, ..., N$.*

Definiţia 1.4.3. *Un graf orientat G se numeşte* ***tare conex*** *dacă există cel puţin un drum între orice două noduri din G. Iar G se numeşte* ***slab conex*** *dacă $\tilde{G}$ este conex.*

Dacă graful orientat G are mulţimea arcelor $E(G)$ simetrică şi x este un nod din G, atunci subgraful notat G_x format din toate arcele şi nodurile care sunt conţinute într-un drum oarecare care pleacă din x se numeşte componenta conexă a lui G care-l conţine pe x. În acest caz $V(G_x) = [x]_G$, unde $[x]_G$ este clasa de echivalenţă a lui x în raport cu relaţia R definită pe $V(G)$ prin:

$$yRz \text{ dacă există un drum în } G \text{ de la } y \text{ la } z.$$

Este clar că G_x este tare conex.

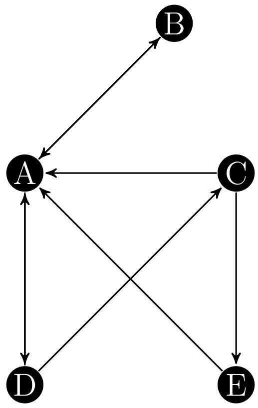

Fig. 6 Graf tare conex. B-A-D-C este un drum de lungime 3

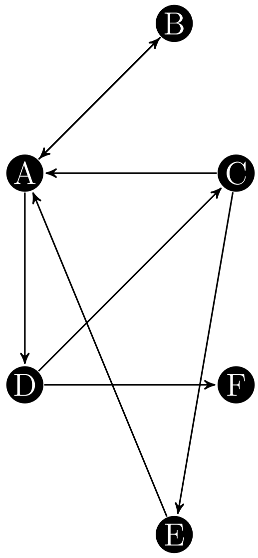

Fig. 7 Graf slab conex dar care nu e tare conex

Observaţia 1.4.2. *Graful din* Fig. 7 *nu este tare conex deoarece nu există niciun drum în G de la F la C, dar există un drum în $\widetilde{G}$ de la F la C şi anume F-D-C iar restul sunt conectate direct în $\widetilde{G}$.*

Definiţia 1.4.4. *Fie X o mulţime nevidă, $T : X \to X$ o funcţie şi G un graf orientat cu proprietatea $V(G) = X$. Spunem că graful G este $T-$**conex** dacă pentru orice noduri x, y din G cu $(x, y) \notin E(G)$, există un drum în G, $(x_i)_{i=0}^{N}$ de la x la y astfel încât $x_0 = x, x_N = y$ şi $(x_i, Tx_i) \in E(G)$ pentru orice $i = 1, ..., N-1$. Un graf orientat G este **slab** $T-$**conex** dacă $\widetilde{G}$ este $T-$conex.*

În cele ce urmează vom exemplifica această proprietatea a grafurilor.

Exemplul 1.4.1. *Fie* $X := [0,1]$ *. Definim graful* G *prin* $V(G) = [0,1]$ *şi*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times [0,1] \mid x \geqslant y\} \cup \{(0,0),(0,1)\}$$

iar funcţia

$$Tx = \frac{x}{10} \text{ pentru } x \in (0,1], \text{ şi } T0 = 1.$$

Perechile de noduri care nu sunt incidente unui arc din G sunt de forma (a,b) cu $a,b \in (0,1)$, $a < b$. Considerăm drumul $(x_i)_{i=0}^{3}$ definit prin

$$x_0 = a,\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = b$$

Este evident că $(a,0),(0,1),(1,b) \in E(G)$ şi $(0,T0) = (0,1) \in E(G)$ respectiv $(1,T1) = \left(1,\frac{1}{10}\right) \in E(G)$. Deci graful G este $T-$conex. Este evident că graful G este şi conex.

Observaţia 1.4.3. *Există grafuri conexe şi funcţii* $T : X \to X$ *astfel încât ele să nu fie grafuri* $T-$*conexe.*

Exemplul 1.4.2. *Fie* $X = \mathbb{Z}$, $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $Tx = x + 3$ *iar* G *graful definit prin* $V(G) = \mathbb{Z}$ *şi* $E(G) = \{(m,m+1) \,|m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(m+1,m) \,|m \in \mathbb{Z}\}$.

Graful G *este tare conex deoarece pentru orice* $a,b \in \mathbb{Z}, a < b$ *există un drum de la* a *la* b *şi anume* $x_0 = a, x_1 = a+1, x_2 = a+2, ..., x_{b-a} = b$, *dar nu este slab* $T-$*conex deoarece, dacă* $a,b \in \mathbb{Z}, a < b-1$ *atunci orice drum în* $\widetilde{G}$ *de la* a *la* b *trece prin* $y = b-1$, *iar* $(y,Ty) = (b-1,b+2) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$.

CAPITOLUL 2

Contracţii în spaţii metrice înzestrate cu un graf

1. Teoreme de punct fix pentru Banach G-contracţii

Scopul principal al acestei lucrări este de a generaliza teoremele de punct fix prezentate în capitolul precedent şi anume de a introduce operatori contractivi pe spaţii metrice înzestrate cu un graf orientat. Primul autor care a considerat astfel de operatori a fost J. Jachymski [**44**], care a introdus noţiunea de Banach G-contracţie şi a demonstrat teoreme de punct fix pentru acest tip de operatori. În acest capitol vom prezenta rezultatele lui Jachymski şi vom arăta că teoremele de punct fix referitoare la contracţii sunt consecinţe ale acestor rezultate. Astfel vom demonstra că teoremele de punct fix în spaţii metrice ordonate, teorema lui Edelstein, teoremele de punct fix pentru operatori ciclici şi Alternativa punctului fix sunt consecinţe ale Teoremei 2.1.2. În finalul capitolului vom prezenta două aplicaţii ale Alternativei punctului fix la demonstrarea stabilităţii de tip Hyers-Ulam pentru ecuaţii liniare si ecuaţii diferenţiale.

Contribuţiile originale ale autorului în acest capitol sunt: Teoremele 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6, Corolarele 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, Lema 2.2.1 şi demonstraţiile Teoremelor 2.2.2 şi 2.2.3.

În ceea ce urmează vom considera că (X, d) este un spaţiu metric şi G este un graf orientat astfel încât $V(G) = X$ şi $\Delta = \{(x, x) \,|x \in X\} \subseteq G$.

Definiţia 2.1.1 ([**44**], Def. 2.1)**.** *Spunem că $f : X \to X$ este o Banach G-contracţie sau simplu o G-contracţie dacă f conservă arcele lui G, adică*

$$\forall x, y \in X\, ((x, y) \in E(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E(G)) \tag{2.12}$$

şi f micşorează lungimile arcelor lui G în modul următor:

$$\exists \alpha \in (0, 1), \forall x, y \in X\, ((x, y) \in E(G) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)) \tag{2.13}$$

Exemplul 2.1.1 ([**44**], Ex. 2.1)**.** *Orice operator constant $f : X \to X$ este o G contracţie deoarece $\Delta \subset E(G)$. De fapt, pentru ca orice operator constant să fie o G-contracţie trebuie ca $\Delta \subset E(G)$.*

Exemplul 2.1.2 ([**44**], Ex. 2.2)**.** *Orice contracţie în sens clasic este o G_0-contracţie unde $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 2.1.3 ([**44**], Ex. 2.3)**.** *Fie " $\preccurlyeq$ " o relaţie de ordine pe X. Definim graful G_1 prin*

$$V(G_1) = X \text{ şi } E(G_1) = \{(x, y) \in X \times X \,|x \preccurlyeq y\}.$$

Pentru acest graf, condiţia (2.12) reprezintă faptul că $f : X \to X$ *este o funcţie crescătoare în raport cu relaţia de ordine* " $\preccurlyeq$ ". *Clasa* G_1*-contracţiilor a fost studiată de Nieto şi Rodriguez-Lopez* [**62**].

Exemplul următor este precedat de următoarea propoziţie

Propoziţia 2.1.1 ([**44**], P. 2.1)**.** *Dacă* $f : X \to X$ *este o* G*-contracţie atunci* f *este atât o* G^{-1}*-contracţie cât şi o* $\widetilde{G}$*-contracţie.*

Exemplul 2.1.4 ([**44**], Ex. 2.4)**.** *Fie* " $\preccurlyeq$ " *o relaţie de ordine pe* X. *Definim graful* G_2 *prin*

$$V(G_2) = X \text{ şi } E(G_2) = \{(x, y) \in X \times X \,|x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x\}.$$

Pentru acest graf, condiţia (2.12) exprimă faptul că f *este monotonă în raport cu relaţia de ordine. Mai mult, dacă* f *verifică relaţia (2.13) cu* $G = G_1$ *de la Exemplul 2.1.3 atunci din Propoziţia 2.1.1, relaţia (2.13) este verificată şi pentru graful* G_2 *deoarece* $G_2 = \widetilde{G}_1$. *Deci operatorii studiaţi de Ran şi Reurings* [**71**] *sunt* G_2*-contraţii. În general (2.12) exprimă faptul că* f *transformă elementele comparabile în elemente comparabile, deci clasa* G_2*-contracţiilor coincide cu clasa operatorilor studiaţi de Petruşel şi Rus* [**68**], *respectiv Nieto şi Rodriguez-Lopez* [**63**].

Primul rezultat care urmează arată legătura dintre covergenţa şirului aproximaţiilor succesive pentru Banach G-contracţii şi conectivitatea grafului G. Vom spune că două şirui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X sunt **Cauchy echivalente** dacă ambele sunt şiruri Cauchy şi $d(x_n, y_n) \to 0$ atunci când $n \to \infty$.

Teorema 2.1.1 ([**44**], T. 3.1)**.** *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) G *este slab conex;*

(ii) pentru orice G*-contractie* $f : X \to X$ *şi pentru* $x, y \in X$ *date, şirurile* $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt Cauchy echivalente;*

(iii) pentru orice G*-contractie* $f : X \to X$, $card(Fix(f)) \leqslant 1$.

Pentru a demonstra teorema anterioară vom folosi următoarea lemă.

Lema 2.1.1 ([**44**], L. 3.1)**.** *Fie* $f : X \to X$ *o* G*-contracţie cu constanta* α. *Pentru orice* $x \in X$ *şi* $y \in [x]_{\tilde{G}}$, *există* $r(x, y) \geqslant 0$ *astfel încât*

$$d(f^n x, f^n y) \leqslant \alpha^n r(x, y), \text{ pentru orice}\, n \in \mathbb{N}.$$

Corolarul 2.1.1 ([**44**], C. 3.1)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) G *este slab conex;*

(ii) pentru orice G*-contractie* $f : X \to X$, *există* $x^* \in X$ *astfel încât* $\lim_{n\to\infty} f^n x = x^*$ *pentru orice* $x \in X$.

Exemplul următor ne arată că nu putem îmbunătăţi Corolarul 2.1.1 prin adăugarea faptului că x^* este un punct fix pentru f.

Exemplul 2.1.5 ([**44**], Ex. 3.2)**.** *Fie $X = [0,1]$ şi d_E metrica euclidiană pe X, atunci (X, d_E) este un spaţiu metric complet. Definim graful G prin $V(G) = X$ şi*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times (0,1] \,|x \leqslant y\} \cup \{(0,0);(0,1)\}.$$

Graful G este slab conex deoarece $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $x, y \in (0,1]$ iar un drum în $\widetilde{G}$ de la 0 la $x \in [0,1]$ este $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = x$. Definim funcţia $f : X \to X$ prin $fx := \frac{x}{2}$ dacă $x \in (0,1]$ şi $f0 := \frac{1}{2}$. Un calcul simplu ne arată că f este o G-contracţie cu constanta $\alpha = \frac{1}{2}$ şi pentru orice $x \in X$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = 0$, dar f nu are puncte fixe.

Demonstraţia teoremei de punct fix pentru Banach G-contracţii se bazează pe următorul rezultat

Propoziţia 2.1.2 ([**44**], P. 3.1)**.** *Presupunem că $f : X \to X$ este o G-contracţie astfel încât pentru un $x_0 \in X$, $fx_0 \in [x_0]_{\widetilde{G}}$. Fie $\widetilde{G}_{x_0}$ componenta lui $\widetilde{G}$ care-l conţine pe x_0. Atunci $[x_0]_{\widetilde{G}}$ este f-invariantă şi $f\Big|_{[x_0]_{\widetilde{G}}}$ este o $\widetilde{G}_{x_0}$-contracţie. Mai mult, dacă $x, y \in [x_0]_{\widetilde{G}}$, atunci $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy echivalente.*

Teorema 2.1.2 ([**44**], Th 3.2)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie tripletul (X, d, G) având următoarea proprietate:*

(2.14)

pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $f : X \to X$ o Banach G-contracţie, şi $X_f = \{x \in X \,|(x, fx) \in E(G)\}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. *$card(Ff) = card\left\{[x]_{\widetilde{G}} \,|x \in X_f\right\}$.*
2. *$Ff \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $X_f \neq \emptyset$.*
3. *f are un unic punct fix dacă şi numai dacă există $x_0 \in X_f$ astfel încât $X_f \subseteq [x_0]_{\widetilde{G}}$.*
4. *Pentru orice $x \in X_f$, $f\Big|_{[x]_{\widetilde{G}}}$ este PO.*
5. *Dacă $X_f \neq \emptyset$ şi G este slab conex, atunci f este PO.*
6. *Dacă $X' := \cup\left\{[x]_{\widetilde{G}} \,|x \in G\right\}$ atunci $f\,|_{X'}$ este WPO.*
7. *Dacă $f \subseteq E(G)$, atunci f este WPO.*

2. Aplicaţii ale Banach G-contracţiilor

În continuare vom demonstra că teoremele de punct fix referitoare la contracţii sunt consecinţe ale Teoremei 2.1.2.

Concluzia 2.1. *Principiul contracţiei al lui Banach este o consecinţă a Teoremei 2.1.2.*

Concluzia 2.2. *Teorema datorată lui Ran şi Reurings* [**71**] *referitoare la contracţii în spaţii metrice parţial ordonate este o consecinţă a Teoremei 2.1.2.*

Teorema 2.1.2 este o generalizare şi a binecunoscutei teoreme de punct fix a lui Edelstein [**38**].

Teorema 2.2.1 (Edelstein, [**38**]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* ϵ*-înlănţuit pentru un* $\epsilon > 0$*, adică, pentru* $x, y \in X$ *date, există* $N \in \mathbb{N}$ *şi un şir* $(x_i)_{i=0}^{N}$ *astfel încât* $x_0 = x, x_N = y$ *şi* $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ *pentru* $i = 1, ..., N$*. Fie* $T : X \to X$ *astfel încât*

$$\exists \alpha \in (0,1), \forall x, y \in X \left(d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x,y)\right). \tag{2.15}$$

Atunci T *este PO.*

Teorema de punct fix a lui W.A. Kirk, P.S. Srinivasan şi P. Veeramani [**54**] este o consecinţă a Teoremei 2.1.2, şi anume:

Teorema 2.2.2 ([**54**]). *Fie* $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$ *şi* $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ *o familie de* p *submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric* (X, d)*. Presupunem că* $T : \{A_i\}_{i=1}^{p} \to \{A_i\}_{i=1}^{p}$ *verifică*

$$d(Tx, Ty) \leqslant kd(x,y),\ \text{pentru orice}\, x \in A_i,\ y \in A_{i+1}, 1 \leq i \leq p \tag{2.16}$$

unde $A_{p+1} = A_1$*. Dacă* $k \in (0,1)$ *atunci* T *are un unic punct fix.*

Ultima consecinţă pe care o vom prezenta în acest capitol exprimă faptul că şi Teorema Luxemburg-Jung [**55**], [**46**] sau Alternativa punctului fix este o consecinţă a Teoremei 2.1.2. După care vom prezenta două aplicaţii ale acestei teoreme la stabilitatea de tip Hyers-Ulam pentru o ecuaţie funcţională generalizată de tip Cauchy respectiv pentru o ecuaţie diferenţială liniară de ordin I. Folosind teoria punctului fix pentru contracţii pe un graf vom prezenta şi vom demonstra de fapt forma acestei teoreme introdusă de V. Radu în [**70**].

Teorema 2.2.3 (Alternativa punctului fix). *Fie* (Ω, d) *un spaţiu metric generalizat şi* $T : \Omega \to \Omega$ *o contracţie cu constanta* $a \in [0, 1)$ *Atunci, pentru fiecare element* $x \in \Omega$*, ori*

$$d\left(T^n x,\, T^{n+1} x\right) = \infty,\ \forall n \geqslant 0,$$

ori există un număr natural n_0 *astfel încât*

i. $d(T^n x,\, T^{n+1} x) < \infty$ *pentru orice* $n \geqslant n_0$*;*
ii. Şirul $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ *este convergent către un punct fix* y^* *a lui* T*;*
iii. y^* *este unicul punct fix a lui* T *în mulţimea* $\Gamma = \{y \in \Omega\, | d(T^{n_0} x, y) < \infty\}$*;*
iv. $d(y, y*) \leqslant \frac{1}{1-a} d(y, Ty)$ *pentru orice* $y \in \Gamma$*.*

În continuare vom prezenta o aplicaţie a Alternativei punctului fix deci şi a Teoremei 2.1.2 la stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei:

$$f\left(a_1\left(x_1\right)+a_2\left(x_2\right)+...+a_n\left(x_n\right)\right)=m_1 f\left(x_1\right)+m_2 f\left(x_2\right)+...+m_n f\left(x_n\right), \tag{2.17}$$

unde $a_i : X \to X$, $i=\overline{1,n}$ sunt n funcţii date, $f : X \to Y$ este funcţia necunoscută şi $m_1+m_2+...+m_n \neq 1$, pe care autorul a demonstrat-o în [**22**].

În completare vom demonstra următoarea lemă:

Lema 2.2.1 (F. Bojor, [**22**]). *Fie X şi Y două spaţii vectoriale şi $a_i : X \to X$, $i=\overline{1,n}$, sunt n funcţii astfel încât cel puţin două dintre ele sunt bijective, iar $m_1+m_2+...+m_n \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. În aceste condiţii orice soluţie a ecuaţiei (2.17) este o funcţie aditivă.*

În continuare vom demonstra stabilitatea Hyers-Ulam generalizată pentru ecuaţia (2.17). Pentru o funcţie $g : X \to Y$ vom nota cu

$$Dg\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=g\left(a_1\left(x_1\right)+a_2\left(x_2\right)+...+a_n\left(x_n\right)\right)-m_1 g\left(x_1\right)-m_2 g\left(x_2\right)-...-m_n g\left(x_n\right)$$

pentru orice $x_1,x_2,...,x_n \in X$.

Teorema 2.2.4 (F. Bojor, [**22**]). *Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:*

i. *X este un spaţiu normat real şi Y este un spaţiu Banach real;*

ii. *$m_1,m_2,...m_n$ sunt n numere reale cu proprietatea $m_1+m_2+...+m_n \overset{not}{=} S \neq 0$*

iii. *$a_i : X \to X$, $i=\overline{1,n}$, sunt n funcţii astfel încât funcţia $A : X \to Y$ definită prin $A(x)=a_1(x)+a_2(x)+...+a_n(x)$, $\forall\, x \in X$ este aditivă , bijectivă şi comută cu fiecare dintre funcţiile a_i, unde $i=\overline{1,n}$;*

iv. *$\varphi : X^n \to [0,\infty)$ este o funcţie cu proprietatea că*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi\left(A^{kj}\left(x_1\right),A^{kj}\left(x_2\right),...,A^{kj}\left(x_n\right)\right)}{|S|^{kj}}=0 \tag{2.18}$$

pentru orice $x_1,x_2,...,x_n \in X$, unde $j \in \{\pm 1\}$, iar funcţia

$$x \mapsto \psi(x)=\varphi\left(A^{-1}(x),A^{-1}(x),...,A^{-1}(x)\right)$$

are proprietatea că $\exists\, M=M(j)\in(0,1)$ astfel încât

$$\psi\left(A^{j}(x)\right)\leqslant |S|^{j} M\psi(x), \forall x \in X, j \in \{\pm 1\} \tag{2.19}$$

v. *$f : X \to Y$ o funcţie care verifică inegalitatea*

$$\left\|Df\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right\| \leqslant \varphi\left(x_1,x_2,...,x_n\right),\ \forall\, x_1,x_2,...,x_n \in X. \tag{2.20}$$

În aceste condiţii există o unică soluţie $L : X \to Y$ a ecuaţiei (2.17) astfel încât inegalitatea

$$\|f(x)-L(x)\| \leqslant \frac{M^{\frac{1-j}{2}}}{(1-M)}\psi(x), \tag{2.21}$$

este adevărată pentru orice $x \in X$.

În ceea ce urmează vom deduce din Teorema 2.2.4 stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.17)

Corolarul 2.2.1 (F. Bojor, [**22**]). *Presupunem îndeplinite următoarele condiţii::*

i. *X este un spaţiu normat real şi Y este un spaţiu Banach real;*

ii. *$m_1, m_2, ...m_n$ sunt n numere reale cu proprietatea $m_1+m_2+...+m_n \overset{not}{=} S \neq 0$*

iii. *$a_i : X \to X$, $i = \overline{1,n}$, n sunt funcţii omogene astfel încât funcţia $A : X \to Y$ definită prin $A(x) = a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) = bx$, $\forall\, x \in X$ unde $b \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$;*

iv. *ε şi p sunt două numere fixate astfel încât $\varepsilon \geq 0$ şi $p \neq \log_{|b|}|S|$ iar $f : X \to Y$ este o funcţie care verifică inegalitatea*

(2.22)
$$\|f(a_1(x_1) + ... + a_n(x_n)) - m_1 f(x_1) - ... - m_n f(x_n)\| \leqslant \theta(\|x_1\|^p + ... + \|x_n\|^p),$$

pentru $\forall\, x_1, ...x_n \in X$

În aceste condiţii există o unică soluţie $L : X \to Y$ a ecuaţiei (2.17) astfel încât inegalitatea

$$\|f(x) - A(x)\| \leqslant \frac{n\varepsilon}{||S| - |b|^p|}\|x\|^p \tag{2.23}$$

este adevărată pentru orice $x \in X$.

Următorul corolar este demonstrarea stabilităţii Hyers-Ulam pentru ecuaţia (2.17).

Corolarul 2.2.2 (F. Bojor, [**22**]). *Se consideră următoarele noţiuni:*

i. *X un spaţiu normat real şi Y un spaţiu Banach real;*

ii. *$m_1, m_2, ...m_n \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $m_1 + m_2 + ... + m_n \overset{not}{=} S \neq 0$*

iii. *$a_i : X \to X$, $i = \overline{1,n}$, n funcţii omogene astfel încât funcţia $A : X \to Y$ definită prin $A(x) = a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) = bx$, $\forall\, x \in X$ unde $b \in R \setminus \{0\}$;*

iv. *$\theta \geq 0$ un număr real fixat şi $f : X \to Y$ o funcţie care verifică inegalitatea*

$$\|f(a_1(x_1) + ... + a_n(x_n)) - m_1 f(x_1) - ... - m_n f(x_n)\| \leqslant \theta, \tag{2.24}$$

pentru $\forall\, x_1, ...x_n \in X$

Atunci există o unică soluţie a ecuaţiei (2.17), $A : X \to Y$ care verifică inegalitatea

$$\|f(x) - A(x)\| \leqslant \frac{\theta}{||S| - 1|},\ \forall x \in X. \tag{2.25}$$

În continuare vom prezenta a doua aplicaţie a Alternativei punctului fix, deci şi a Teoremei 2.1.2 la stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi:

$$y'(x) + f(x)\,y(x) + g(x) = 0 \tag{2.26}$$

în anumite condiţii, altele decât cele din [**50**].

Pentru început vom demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.26) pe intervale de forma $I = [a, b)$ unde $-\infty < a < b \leq \infty$.

Teorema 2.2.5 (F. Bojor, [**25**]). *Fie $f, g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv M astfel încât , $|f(x)| \geq M$ pentru orice $x \in I$. Presupunem că $\psi : I \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă cu proprietatea că $\exists\, P \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_a^x |f(t)| \psi(t)\, dt \leq P\psi(x) \tag{2.27}$$

pentru orice $x \in I$. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : I \to \mathbb{R}$ verifică relaţia:

$$|y'(x) + f(x) y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.28}$$

pentru orice $x \in I$, atunci există o unică soluţie $S : I \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.26) care verifică relaţiile:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP} \psi(x) \tag{2.29}$$

pentru orice $x \in I$ şi $S(a) = y(a)$.

Analog se poate demonstra următoarea teoremă referitoare la stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.26) pe intervale de forma $J = (b, a]$, unde $-\infty \leq b < a < \infty$.

Teorema 2.2.6 (F. Bojor, [**25**]). *Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv M astfel încât $|f(x)| \geq M$ pentru orice $x \in J$. Presupunem că $\psi : J \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă cu proprietatea că $\exists\, P \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_x^a |f(t)| \psi(t)\, dt \leq P\psi(x) \tag{2.30}$$

pentru orice $x \in J$. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ verifică relaţia:

$$|y'(x) + f(x) y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.31}$$

pentru orice $x \in J$, atunci există o unică soluţie $S : J \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.26) care verifică următoarele relaţii:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP} \psi(x) \tag{2.32}$$

pentru orice $x \in J$ şi $S(a) = y(a)$.

Stabilitatea Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.26) pe $\mathbb{R}$ o vom demonstra folosind Teorema 2.2.5 şi Teorema 2.2.6.

Corolarul 2.2.3 (F. Bojor, [**25**])**.** *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv M, astfel încât $|f(x)| \geq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Presupunem că $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă cu proprietatea că $\exists\, P \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\left| \int_0^x |f(t)| \psi(t)\, dt \right| \leq P\psi(x) \tag{2.33}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ verifică relaţia:

$$|y'(x) + f(x)\, y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.34}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci există o unică soluţie $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.26) care verifică următoarele relaţii:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP} \cdot \psi(x) \tag{2.35}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $S(0) = y(0)$.

Folosind Teorema 2.2.5 vom demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei (2.26) pe $I = [a, b)$ unde $-\infty < a < b \leq \infty$.

Corolarul 2.2.4 (F. Bojor,[**25**])**.** *Fie $\varepsilon, M > 0$ şi $f : I \to [M, \infty)$ respectiv $g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : I \to \mathbb{R}$ verifică relaţia*

$$|y'(x) + f(x)\, y(x) + g(x)| \leq \varepsilon \tag{2.36}$$

pentru orice $x \in I$, atunci există o unică soluţie $S : I \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.26) care verifică relaţiile:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M(2q - 1)} \tag{2.37}$$

pentru orice $x \in I$, unde $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi $S(a) = y(a)$.

Ecuaţia (2.26) nu este Hyers-Ulam stabilă pe intervale de forma $J = (-\infty, a]$ în general, aşa cum se poate vedea din următorul exemplu.

Exemplul 2.2.1 (F. Bojor,[**25**])**.** *Fie ecuaţia (2.26) unde $f(x) = x^2$ şi $g(x) = 0$. Soluţia acestei ecuaţii $S : J \to \mathbb{R}$ care verifică condiţia $S(a) = p$ este*

$$S(x) = p \cdot e^{\frac{a^3 - x^3}{3}}. \tag{2.38}$$

O funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ care verifică (2.36) este

$$y(x) = p \cdot e^{\frac{a^3 - x^3}{3}} + \varepsilon \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \int_a^x e^{\frac{t^3}{3}} dt. \tag{2.39}$$

Presupunând că ecuaţia (2.26) este Hyers-Ulam stabilă, va rezulta că există $k > 0$ *astfel încât*

$$|y\,(x) - S\,(x)| \leq \varepsilon \cdot k \tag{2.40}$$

pentru orice $x \in J$. *Prin înlocuire vom obţine că:*

$$\left| \int_a^x e^{\frac{t^3}{3}} dt \right| \leq k e^{\frac{x^3}{3}} \tag{2.41}$$

pentru orice $x \in J$. *Trecând la limită când* $x \to -\infty$ *vom obţine o contradicţie. Deci ecuaţia (2.26) nu este Hyers-Ulam stabilă pe* $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 3

Teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate în spaţii metrice înzestrate cu un graf

În acest capitol, lucrând în spaţii metrice înzestrate cu un graf vom generaliza noţiunile de operatori Kannan, Zamfirescu, Círić-Reich-Rus, Bianchini şi φ- contracţii şi vom da condiţii necesare pentru ca aceşti operatori să fie PO. Toate aceste teoreme vor generaliza şi extinde rezultatele clasice obţinute pentru aceste clase de operatori.

În cele ce urmează vom considera că (X, d) este un spaţiu metric, şi că G este un graf orientat cu proprietăţile $V(G) = X$, $E(G) \supseteq \Delta$ iar G nu are arce paralele adică G este un $1-$graf. Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt:
Definiţiile 3.1.1,3.2.1,3.3.1,3.4.1,3.5.1,
Teoremele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.2,
Corolarele 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1,
Lemele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1, 3.5.2,
Exemplele 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.2, 3.3.3,3.3.4, 3.4.2,3.4.3, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.4,
Observaţiile 3.1.1, 3.1.2, 3.2.3, 3.2.2,
demonstraţiile Teoremelor 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2, 3.4.4, 3.5.3 şi Propoziţia 3.4.1.

1. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Kannan

În această secţiune, folosind ideea lui Jachymski [**44**] pentru Banach contracţii, vom considera următorul concept:

Definiţia 3.1.1 (F. Bojor, [**26**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric şi G un graf. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-Kannan dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.
2. *există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$$

pentru orice $(x, y) \in E(G)$.

Observaţia 3.1.1. *Dacă T este un operator G-Kannan, atunci T este atât operator G^{-1}-Kannan cât şi operator $\widetilde{G}$-Kannan.*

Exemplul 3.1.1. *Orice operator Kannan este un operator G_0-Kannan, unde graful G_0 este definit prin $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.1.2 (F. Bojor, [**26**]). *Fie mulţimea $X = \{0,1,3\}$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Operatorul $T : X \to X$, $Tx = 0$,* pentru $x \in \{0,1\}$ şi $Tx = 1$, pentru $x = 3$ *este operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{1}{3}$ pe spaţiul metric X înzestrat cu graful G definit prin $E(G) = \{(0,1);(1,3);(0,0);(1,1));(3,3)\}$, dar nu este un operator Kannan deoarece $d_E(T0,T3) = 1$ şi $d_E(0,T0) + d_E(3,T3) = 2$.*

Observaţia 3.1.2 (F. Bojor, [**26**]). *La fel ca şi în cazul contracţiilor şi a operatorilor Kannan, există G-contraţii care nu sunt operatori G-Kannan precum şi operatori G-Kannan care nu sunt G-contraţii. Mai mult, există operatori G-Kannan care nu sunt G_1-contraţii pentru orice graf G_1 cu proprietatea $G_1 \neq \Delta$, după cum se poate vedea din exemplul următor.*

Exemplul 3.1.3 (F. Bojor, [**26**]). *Fie mulţimea $X = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ şi operatorul $T : X \to X$ definit prin $Tx = 2x$. Considerăm graful G definit prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \left\{\left(2^k n, 2^k(n+1)\right) : n \in X, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \Delta$$

Atunci T este un operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{2}{5}$ deoarece

$$\begin{aligned} d_E\left(T2^k n, T2^k(n+1)\right) &= 2^{k+1} \leqslant \frac{2}{5}2^k(2n+1) \\ &= \frac{2}{5}\left[d_E\left(2^k n, T2^k n\right) + d_E\left(2^k(n+1), T2^k(n+1)\right)\right] \end{aligned}$$

pentru orice $n \in X$ şi orice $k \in \mathbb{N}$.

Dacă ar exista un graf $G_1 \neq \Delta$ astfel încât operatorul T să fie o G_1-Banach contracţie cu constanta $a \in [0,1)$ atunci ar exista $x, y \in X$ cu $x \neq y$ astfel încât $(x,y) \in G_1$. Dar atunci

$$d_E(Tx,Ty) = 2|x-y| \leqslant a|x-y|$$

de unde $a \geq 2$. Deci operatorul T nu este o G_1-Banach contracţie.

Lema 3.1.1 (F. Bojor, [**26**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator G-Kannan cu constanta a. Dacă graful G este slab $T-$conex atunci, pentru orice $x, y \in X$, există $r(x,y) \geqslant 0$ astfel încât*

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x,y) + ad\left(T^{n-1}y, T^n y\right) \tag{3.42}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Următoarea teoremă este principalul rezultat pentru operatorii G-Kannan.

Teorema 3.1.1 (F. Bojor, [**26**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi*
$T : X \to X$ un operator G-Kannan. Presupunem că:

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) *pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente ale lui* X*, dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *este PO.*

Următorul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Kannan să fie PO.

Exemplul 3.1.4 (F. Bojor, [**26**]). *Fie* $X := [0,1]$ *înzestrat cu metrica euclidiană* d_E*. Definim graful* G *prin*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times (0,1] \,|\, x \geqslant y\} \cup \{(0,0), (0,1)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0,1], \text{ şi } T0 = 1$$

Este simplu de verificat că (X, d_E) *este un spaţiu metric complet,* G *este slab* $T-$*conex şi* T *este un operator* G*-Kannan cu constanta* $a = \frac{3}{7}$ *deoarece pentru orice* $x, y \in (0,1]$ *cu proprietatea* $x \geq y$ *avem că:*

$$d(Tx, Ty) = \frac{|x-y|}{4} \leqslant \frac{x+y}{4} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4} + \frac{3y}{4}\right) = \frac{1}{3}\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *definit prin* $x_n = \frac{1}{n}$*. Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *avem că* $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *dar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *şi* $(x_n, 0) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$*, deci condiţia (ii.) nu este îndeplinită şi evident,* T *nu are puncte fixe.*

Exemplul 3.1.3 ne arată că graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-Kannan T, să fie PO. Evident operatorul T este G-Kannan, graful G este slab conex, deoarece pentru orice $m, n \in X$ cu proprietatea $m < n$ avem că şirul $x_0 = m$, $x_1 = m+1, \ldots, x_{m-n} = n$ este un drum în G de la m la n. Dar graful G nu este slab T-conex deoarece $(2,4) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ şi singurul drum în $\widetilde{G}$ de la 2 la 4 este $y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = 4$ iar $(3, T3) = (3,6) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$.

Din Teorema 3.1.1 putem deduce următorul corolar care se referă la condiţiile suficiente ca un operator Kannan definit pe un spaţiu metric ordonat să fie PO.

Corolarul 3.1.1 (F. Bojor, [**26**]). *Fie* $(X, \leqslant)$ *o mulţime ordonată şi* d *o metrică pe* X *astfel încât spaţiul metric* (X,d) *este complet. Fie* $T : X \to X$ *un operator crescător astfel încât următoarele trei condiţii sunt adevărate:*

(i.) *există* $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *astfel încât* $d(Tx, Ty) \leqslant a\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$ *pentru orice* $x, y \in X$ *cu* $x \leqslant y$;

(ii.) *pentru orice* $x, y \in X$*, elemente incomparabile din* $(X, \leqslant)$*, există* $z \in X$ *astfel încât* $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ *şi* $z \leqslant Tz$;

(iii.) *dacă un şir crescător* (x_n) *converge la* $x^* \in X$*, atunci* $x_n \leqslant x^*$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

În ceea ce urmează vom arăta că teorema de punct fix pentru operatori Kannan ciclici, demonstrată în [**67**] de Petric şi Zlatanov este o consecinţă a Teoremei 3.1.1.

Teorema 3.1.2. *Fie $p \geq 2$ un număr natural şi $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet (X, d). Presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic, care verifică condiţia: există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $(x, y) \in A_i \times A_{i+1}$, cu $i \in \{1, 2, ..., p\}$, are loc relaţia*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right].$$

În aceste condiţii T este PO.

In continuare vom prezenta câteva exemple de operatori G-Kannan care verifică ipoteza Teoremei 3.1.1.

Exemplul 3.1.5 (F. Bojor, [**26**]). *Fie mulţimea $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ înzestrată cu metrica euclidiana d_E şi aplicaţia $T : X \to X$ definită prin:*

$$Tx = \begin{cases} -\left|\sin x\right|, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right) \end{cases}.$$

Considerăm graful G definit prin

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(0, x) : x \in X\}.$$

Graful G este slab T conex şi proprietatea ii. din Teorema 3.1.1 este îndeplinită.

Pentru orice $x \in X$ avem că dacă $(0, x) \in E(G)$ atunci şi $(T0, Tx) = (0, Tx) \in E(G)$ şi folosind elemente de analiză matematică se poate demonstra că T este un operator G-Kannan cu constanta

$$a = \frac{3}{2\pi + 1} < \frac{1}{2}.$$

Aplicând Teorema 3.1.1 operatorul T este PO şi T are un unic punct fix $x^* = 0$.

Operatorul T nu este un operator Kannan deoarece presupunând că există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât

$$d_E(Tx, Ty) \leqslant a\left[d_E(x, Tx) + d_E(y, Ty)\right], \ \forall x, y \in X$$

şi alegând $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6}$ vom obţine că:

$$a \geqslant \frac{3}{4\pi - 9} > \frac{1}{2}.$$

Exemplul 3.1.6 (F. Bojor, [**26**]). *Fie mulţimea $X = [0, 5]$ înzestrată cu metrica euclidiana d_E şi aplicaţia $T : X \to X$ definită prin:*

$$Tx = \begin{cases} x - 4; & x \in (4, 5] \\ \dfrac{x}{4}; & x \in [0, 4] \end{cases}$$

Considerăm graful G definit prin

$$V(G) = X \quad \text{şi} \quad E(G) = \{(4, x) : x \in (4, 5]\} \cup [0, 4] \times [0, 4] \cup \Delta.$$

Graful G este slab T conex şi proprietatea ii. din Teorema 3.1.1 este îndeplinită.

Pentru orice $x \in X$ avem că dacă $(4, x) \in E(G)$ atunci şi $(T4, Tx) = \left(\frac{1}{4}, \frac{x}{4}\right) \in E(G)$ şi T este un operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{1}{3}$, deoarece:

Cazul I. *dacă $x \in (4, 5]$, deci $(4, x) \in E(G)$ avem că*

$$d_E(T4, Tx) = |1 - x + 4| = |5 - x| \leqslant 1 \leqslant \frac{7}{3} \leqslant \frac{1}{3}\left[d_E(4, T4) + d_E(x, Tx)\right]$$

Cazul II. *Dacă $(x, y) \in [0, 4] \times [0, 4]$, atunci*

$$d_E(Tx, Ty) = \left|\frac{x - y}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left[|x| + |y|\right] \leqslant \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{4} + \frac{3y}{4}\right] = \frac{1}{3}\left[d_E(x, Tx) + d_E(y, Ty)\right]$$

Aplicând Teorema 3.1.1 operatorul T este PO şi T are un unic punct fix $x^* = 0$.

Operatorul T nu este o G-Banach contracţie deoarece

$$\left(4, \frac{9}{2}\right) \in E(G),\ d_E\left(4, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ şi } d_E\left(T4, T\frac{9}{2}\right) = d_E\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Zamfirescu

În această secţiune vom extinde noţiunea de operator de tip Zamfirescu la operatori care verifică condiţiile respective doar pe arcele unui graf G şi astfel vom obţine noţiunea de operator G-Zamfirescu.

Definiţia 3.2.1 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-Zamfirescu dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.
2. *există numerele reale α, β şi γ care verifică condiţiile: $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ şi $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$, iar pentru fiecare $(x, y) \in E(G)$, are loc cel puţin una dintre condiţiile următoare:*
   (z_1) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$;
   (z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant \beta\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$;
   (z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant \gamma\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right]$.

Observaţia 3.2.1. *Dacă T verifică condiţia (z_1) pentru orice $(x, y) \in E(G)$ atunci T este o Banach $G-$contracţie şi dacă T verifică condiţia (z_2) pentru orice $(x, y) \in E(G)$ atunci T este operator $G-$Kannan.*

Observaţia 3.2.2. *Dacă T este un operator G-Zamfirescu, atunci T este atât operator G^{-1}-Zamfirescu cât şi operator $\widetilde{G}$-Zamfirescu.*

Exemplul 3.2.1. *Orice operator Zamfirescu este un operator G_0-Zamfirescu, unde graful G_0 este definit prin $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.2.2. *Fie mulţimea* $X = \{0, 1, 2, 3\}$ *înzestrată cu metrica euclidiană. Operatorul* $T : X \to X$, $Tx = 0$, *pentru* $x \in \{0, 1\}$ *şi* $Tx = 1$, *pentru* $x \in \{2, 3\}$ *este un operator G-Zamfirescu verificând* (z_1) *din Definiţia 3.2.1 cu constanta* $\alpha = \frac{2}{3}$, *unde* $G = \{(0, 1) ; (0, 2) ; (2, 3) ; (0, 0) ; (1, 1)) ; (2, 2) ; (3, 3)\}$, *dar nu este un operator Zamfirescu deoarece*

- $d (T1, T2) = 1$ *şi* $d (1, 2) = 1$ *deci* (z_1) *din Definiţia 3.2.1 nu este îndeplinită;*
- $d (T1, T2) = 1$ *şi* $d (1, T1) + d (2, T2) = 2$ *deci* (z_2) *din Definiţia 3.2.1 nu este îndeplinită;*
- $d (T1, T2) = 1$ *şi* $d (1, T2) + d (2, T1) = 2$ *deci* (z_3) *din Definiţia 3.2.1 nu este îndeplinită.*

Prin urmare, noţiunea de operator G-Zamfirescu este mult mai cuprinzătoare decât cea de de operator Zamfirescu, ceea ce justifică studiul existenţelor punctelor fixe pentru opratori G-Zamfirescu.

Pentru început vom demonstra următoarea lema, care este o extindere a unui rezultat din [**16**], pentru operatori Zamfirescu.

Lema 3.2.1 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $T : X \to X$ *un operator G-Zamfirescu. Atunci*

$$d (Tx, Ty) \leqslant 2\delta d (x, Ty) + \delta d (x, y) \tag{3.43}$$

pentru orice $(x, y) \in E (G)$, *unde* $\delta = \max \left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

Observaţia 3.2.3 (F. Bojor, [**28**])**.** *În mod analog cu Lema 3.2.1 se poate obţine că:*

$$d (Tx, Ty) \leqslant 2\delta d (x, Tx) + d (x, y) \tag{3.44}$$

pentru orice $(x, y) \in E (G)$.

Lema 3.2.2 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator G-Zamfirescu astfel încât graful* G *este slab* $T-$*conex.*

Dacă $(x, y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ *atunci există* $r (x, y) \geqslant 0$ *astfel încât*

$$d (T^n x, T^n y) \leqslant n\delta^n r (x, y) \tag{3.45}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, *unde* $\delta = \max \left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

Principalul rezultat din această secţiune este următoarea teoremă.

Teorema 3.2.1 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator G-Zamfirescu. Presupunem că:*

(i.) G *este slab* $T-$*conex;*

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şir de elemente din* X, *dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Următorul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Zamfirescu să fie PO.

Exemplul 3.2.3 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie mulţimea $X := [0,3]$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim graful G prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = E(G) = (0,1] \times (0,1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (1,3] \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}.$$

Definim aplicaţia $T : X \to X$ prin

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, x\,(0,1] \\ \frac{1}{2}, \ x \in (0,1] \cup \{0\} \\ 1, \ x \in [2,3] \end{cases} \cdot$$

E uşor de verificat că (X,d) este un spaţiu metric complet, G este slab $T-$conex. Aplicaţia T este un operator G-Zamfirescu care verifică (z_1) cu $\alpha = \frac{1}{2}$ pentru orice $(x,y) \in (0,1] \times (0,1]$, verifică (z_2) cu $\beta = \frac{1}{3}$ pentru orice $(x,y) \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (1,2] \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$ şi verifică (z_3) cu $\gamma = \frac{1}{3}$ pentru orice $(x,y) \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \times [2,3]$. Este clar că, $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte fixe.

Observaţia 3.2.4. *Se poate demonstra că operatorul T de la exemplul anterior nu este o Banach G-contracţie, nici un operator G-Kannan.*

Următorul exemplu ne arată ca graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-Zamfirescu T să fie PO.

Exemplul 3.2.4 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie $X := [0,3]$ înzestrat cu metrica euclidiană d_E Definim aplicaţia*

$$Tx = \begin{cases} x+2; \ x \in [0,1] \\ \frac{x}{3}; \quad x \in (1,3] \end{cases}.$$

Definim graful G prin $V(G) = X$ şi

$$E(G) = [0,1] \times [0,1] \cup (1,3] \times (1,3] \cup \left\{\left(\frac{3^n - 1}{3^n}, 3\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\frac{3^n - 1}{3^{n-1}}, 1\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Atunci (X, d_E) este un spaţiu metric complet, G este slab conex dar nu este slab $T-$conex deoarece $(1,3) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ şi orice drum în $\widetilde{G}$ de la 1 la 3 trece prin 0 dar $(0, T0) = (0,2) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ sau trece prin $x_0 = \frac{3^n-1}{3^{n-1}}$ cu $n \in N^*$ dar $(x_0, Tx_0) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$.

T este un operator G-Zamfirescu care verifică condiţia (z_2) cu $\beta = \frac{1}{3}$ pentru $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ respectiv condiţia (z_1) cu $\alpha = \frac{1}{3}$ pentru $(x,y) \in E(G) \setminus [0,1] \times [0,1]$. Este evident, $T^n x$ nu converge pentru orice $x \in X$ şi T nu are puncte fixe.

Corolarul 3.2.1 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ o G-contracţie. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Observaţia 3.2.5. *Se observă că rezultatul anterior este mai slab ca cel obţinut de Jachymski în* [**44**]*, deoarece graful G nu trebuie să fie slab $T-$conex pentru ca T să fie PO.*

Corolarul 3.2.2 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator $G-$Kannan. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Corolarul 3.2.3 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator care verifică condiţia (z_3) din Definiţia 3.2.1. (Operatorul T îl vom numi operator G-Chatterjea). Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Din Teorema 3.2.1, vom obţine un corolar referitor la operatori Zamfirescu în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.2.4 (F. Bojor, [**28**])**.** *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată şi d o metrică pe X astfel încât spaţiul metric (X, d) este complet. Fie $T : X \to X$ un operator crescător, care verifică următoarele trei condiţi:*

(i.) *există numerele reale α, β şi γ care verifică condiţile $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < \frac{1}{2}$ şi $0 \le \gamma < \frac{1}{2}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$ cu $x \leqslant y$, cel puţin una dintre relaţiile următoare este adevărată:*

(z_1) $d(Tx, Ty) \le \alpha d(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant \gamma [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

(ii.) *pentru orice $x, y \in X$, elemente incomparabile ale $(X, \leqslant)$, există $z \in X$ astfel încât $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ şi $z \leqslant Tz$;*

(iii.) dacă un şir crescăror (x_n) converge la x din X, atunci $x_n \leqslant x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

În cele ce urmează vom arăta că teorema de punct fix pentru operatori ciclici Zamfirescu demonstrată în [**67**] de Petric şi Zlatanov este o consecinţă a Teoremei 3.2.1.

Teorema 3.2.2 ([**67**], T 3.1)**.** *Fie $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric (X, d) şi presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic, pentru care există numerele reale $a \in [0, 1)$, $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şi $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $(x, y) \in A_i \times A_{i+1}$, pentru $i \in \{1, 2, ..., p\}$, cel puţin una din relaţiile următoare este adevărată:*

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Atunci T este PO.

3. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Ćirić-Reich-Rus

În această secţiune vom extinde noţiunea de operator Ćirić-Reich-Rus introdusă de Rus [**80**] şi Reich [**75**] pentru spaţii metrice înzestrate cu un graf şi vom da condiţii suficiente ca un astfel de operator să fie PO.

Definiţia 3.3.1 (F. Bojor, [**24**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-C̀irìc-Reich-Rus dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.
2. *există numerele pozitive a, b, c cu $a + b + c < 1$, astfel încât, pentru orice $(x, y) \in E(G)$, are loc relaţia:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty).$$

Exemplul 3.3.1. *Orice operator C̀irìc-Reich-Rus este un operator G_0-C̀irìc-Reich-Rus, unde graful G_0 este definit prin $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.3.2 (F. Bojor, [**24**])**.** *Fie mulţimea $X = \{0, 1, 2, 3\}$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim $T : X \to X$, prin $Tx = 0$, for $x \in \{0, 1\}$ and $Tx = 1$, for $x \in \{2, 3\}$. Atunci T este un operator G-C̀irìc-Reich-Rus cu constantele $a = \frac{1}{3}, b = 0$ şi $c = \frac{1}{3}$, unde $G = \{(0, 1); (0, 2); (2, 3); (0, 0); (1, 1)); (2, 2); (3, 3)\}$, dar nu este un operator C̀irìc-Reich-Rus deoarece $d(T1, T2) = 1$, $d(1, 2) = 1$, $d(1, T1) = 1$ şi $d(2, T2) = 1$.*

Observaţia 3.3.1 (F. Bojor, [**24**])**.** *Dacă $T : X \to X$ este un operator G-C̀irìc-Reich-Rus, $a \neq b$ şi arcele grafului G nu sunt simetrice atunci condiţia 2. din Definiţia 3.3.1* ***nu*** *este echivalentă cu următoarea:*

2'. există numerele pozitive a, b cu proprietatea $a + 2b < 1$ astfel încât, pentru orice $(x, y) \in E(G)$, are loc relaţia:

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)].$$

ci doar $2' \Rightarrow 2$.

Pentru început prezentăm următoarea lema.

Lema 3.3.1 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Ćirič-Reich-Rus. Dacă $x \in X$ verifică condiţia $(x, Tx) \in E(G)$ atunci*

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \alpha^n d(x, Tx) \tag{3.46}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha = \frac{a+b}{1-c}$.

Lema 3.3.2 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Ćirič-Reich-Rus astfel încât graful G este $T-$conex. Pentru orice $x \in X$ şirul $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy.*

Teorema de punct fix corespunzătoare operatorilor G-Ćirič-Reich-Rus este următoarea:

Teorema 3.3.1 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi*
$T : X \to X$ un operator G-Ćirič-Reich-Rus. Presupunem că:

(i.) G este $T-$conex;

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şir de elemente din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că există un subşir $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Următoarul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Ćirič-Reich-Rus să fie PO.

Exemplul 3.3.3 (F. Bojor, [**24**]). *Fie mulţimea $X := [0, 1]$ inzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim graful G prin*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \mid x \geqslant y\} \cup \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0, 1], \text{ şi } T0 = 1$$

Este uşor de verificat că (X, d) este un spaţiu metric complet, G este $T-$conex şi T este un operator G-Ćirič-Reich-Rus cu constantele $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{16}$, $c = \frac{1}{8}$. Este evident că, $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte fixe.

Următorul exemplu ne arată că graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-C̀irič-Reich-Rus T să fie PO.

Exemplul 3.3.4 (F. Bojor, [**24**]). *Fie mulţimea $X = [0, \infty)$ inzestrată cu metrica euclidiană d_E şi*

$$T : X \to X, \quad Tx = x + 5$$

Definim graful G prin

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x, x+\alpha), (x+\alpha, x) : x \in X, \alpha \in [0,1]\}$$

Atunci (X, d) este un spaţiu metric complet, G este conex deoarece pentru orice $x, y \in X$ şirul $x_0 = x, x_1 = x+\alpha, x_2 = x+2\alpha, ..., x_n = x+n\alpha = y$, unde $n = [x-y]+1$ şi $\alpha = \frac{x-y}{n}$ este un drum în G de la x la y. Graful G nu este $T-$conex deoarece $(x, Tx) \notin E(G)$ pentru orice $x \in X$.

Pentru orice $(x, y) \in E(G)$ ne rezultă că $(Tx, Ty) = (x+5, y+5) \in E(G)$ şi T verifică relaţia 2. din Definiţia 3.3.1 cu constantele $a = \frac{1}{6}, b = c = \frac{1}{3}$ deoarece pentru orice $x \in X, \alpha \in [0,1]$ avem că

$$d_E(Tx, T(x+\alpha)) = |x+5-x-\alpha-5| = \alpha \leqslant 1$$

iar

$$ad_E(x, x+\alpha) + bd_E(x, Tx) + cd_E(x+\alpha, T(x+\alpha)) = \frac{1}{6}\alpha + \frac{10}{6} > 1.$$

Evident, şirul $(T^n x)_{n \in mathbbN}$ nu este convergent pentru orice $x \in X$ şi T nu are puncte fixe.

Corolarul 3.3.1 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) există numerele pozitive a şi b cu proprietatea $a + 2b < 1$ astfel încât, pentru orice $(x, y) \in E(G)$, vom avea că $(Tx, Ty) \in E(G)$ şi

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + b[d(x, Tx) + d(y, Ty)];$$

(iii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Corolarul 3.3.2 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ o Banach G-contracţie. Presupunem că:*

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Corolarul 3.3.3 (F. Bojor, [**24**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator $G-$Kannan. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Din Teorema 3.3.1, vom obţine următorul corolar referitor la operatorul de tip C̀iriè-Reich-Rus în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.3.4 (F. Bojor, [**24**]). *Fie $(X,\leqslant)$ o mulţime parţial ordonată şi d o metrică pe X astfel încât spaţiul metric (X,d) este complet. Fie $T : X \to X$ un operator crescător care verifică relaţiile:*

(i.) *există numerele reale pozitive $a,b > 0$ cu $a + 2b < 1$, astfel încât, pentru orice $x,y \in X$ cu $x \leqslant y$ avem că*

$$d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y) + b[d(x,Tx) + d(y,Ty)].$$

(ii.) *pentru orice $x,y \in X$, elemente incomparabile din $(X,\leqslant)$, există $z \in X$ astfel încât $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ şi $z \leqslant Tz$;*

(iii.) *dacă un şir crescător (x_n) converge la x în X, atunci $x_n \leqslant x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

În aceste condiţii T este PO.

În ceea ce urmează vom demonstra că teorema de punct fix pentru operatorii C̀iriè-Reich-Rus ciclici demonstrată de [**65**] by Petric este o consecinţă a Teoremei 3.3.1 .

Teorema 3.3.2 (M. Petric, [**65**]). *Fie $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet (X,d). Presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic,şi există numerele pozitive a,b,c cu proprietatea $a+b+c < 1$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in A_i \times A_{i+1}$, cu $i \in \{1,2,...,p\}$, avem că*

$$d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty).$$

Atunci T este PO.

4. Teoreme de punct fix pentru $(G,\varphi)-$contracţii

Folosind aceiaşi tehnică ca în secţiunile precedente vom introduce noţiunea de (G,φ)-contracţie şi vom da condiţii suficiente pentru ca o astfel de contraţie să fie

PO, condi
c tii care vor generaliza teoremele existente referitoare la φ-contracţii.

Definiţia 3.4.1 (F. Bojor, [**23**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G. Aplicaţia $T:X\to X$ se numeşte (G,φ) − contraction dacă:*

1. $\forall\, x,y\in X\, ((x,y)\in E(G)\Rightarrow (Tx,Ty)\in E(G))$.
2. *există o funcţie de comparaţie $\varphi: R_+\to\mathbb{R}_+$ astfel încât:*

$$d(Tx,Ty)\leqslant \varphi(d(x,y))$$

pentru orice $(x,y)\in E(G)$.

Observaţia 3.4.1. *Dacă T este o (G,φ) −contracţie, atunci T este atât (G^{-1},φ) −contracţie cât şi $\left(\widetilde{G},\varphi\right)$ −contracţie. Aceasta fiind o consecinţă a simetriei distanţei şi a relaţiei* 1.

Exemplul 3.4.1. *Orice $\varphi-$contracţie este o (G_0,φ) −contracţie, unde graful G_0 este definit prin $E(G_0)=X\times X$.*

Exemplul 3.4.2. *Orice $G-$contracţie este o (G,φ) −contracţie, unde funcţia de comparaţie este $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ \varphi(t)=at$.*

Primul rezultat referitor la această noţiune este următorul:

Teorema 3.4.1 (F. Bojor, [**23**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T:X\to X$. Presupunem că:*

- *(i.)* *G este slab conex;*
- *(ii.)* *există $x_0\in X$ astfel încât $(x_0,Tx_0)\in E\left(\widetilde{G}\right)$, iar şirul $(T^nx_0)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea: există k, $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încât $\left(T^{kn}x_0,T^{km}x_0\right)\in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $m,n\in\mathbb{N}$ $m,n\geqslant n_0$;*
- *$(iii.)_a$* *T este orbital continuu*

  sau
- *$(iii.)_b$* *T este orbital G-continuu şi există un subşir $(T^{n_k}x_0)_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului $(T^nx_0)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $(T^{n_k}x_0,x^*)\in E(G)$ pentru orice $k\in N$;*
- *(iv.)* *există o funcţie de comparaţie $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ astfel încât T este o (G,φ) −contracţie;*
- *(v.)* *metrica d este completă.*

În aceste condiţii T este PO.

Observaţia 3.4.2 (F. Bojor, [**23**]). *Teorema 3.4.1 este o generalizare a Teoremei 3.3 din* [**64**].

Dacă îmbunătăţim proprietăţile operatorului T vom putea să renunţăm la unele proprietăţi ale grafului G. În continuare vom considera că φ este funcţie de (c) −comparaţie.

În cele ce urmează vom demonstra că covergenţa şirului aproximaţiilor succesive ale unei $(G,\varphi)-$contracţie este strâns legată de conectivitatea grafului G.

Teorema 3.4.2 (F. Bojor, [**23**])**.** *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) G *este slab conex;*

(ii) pentru orice $(G,\varphi)-$*contracţie* $T : X \to X$ *si* $x, y \in X$ *date, şirurile* $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt echivalente Cauchy;*

(iii) pentru orice $(G,\varphi)-$*contracţie* $T : X \to X$, $\operatorname{card}(F_T) \leqslant 1$.

O consecinţă imediată a Teoremei 3.4.2, este:

Corolarul 3.4.1 (F. Bojor, [**23**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf* G *slab conex. Pentru orice* $(G,\varphi)-$*contracţie* $T : X \to X$, *există un unic* $x^* \in X$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$ *pentru orice* $x \in X$.

Următorul exemplu ne arată că nu putem îmbunătăţi Corolarul 3.4.1 adăugând că x^* este un punct fix a lui T.

Exemplul 3.4.3 (F. Bojor, [**23**])**.** *Fie mulţimea* $X := [0, 1]$ *înzestrată cu metrica euclidiană. Definim graful* G *prin*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \,|x \geqslant y\} \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0, 1], \text{ şi } T0 = \frac{1}{4}$$

Este simplu de verificat că G *este slab conex şi* T *este o* $(G,\varphi)-$*contracţie cu* $\varphi(t) = \frac{t}{4}$. *Evident,* $T^n x \to 0$ *pentru orice* $x \in X$, *dar* T *nu are puncte.*

Demonstrarea teoremelor de punct fix depind de următorul rezultat

Propoziţia 3.4.1 (F. Bojor, [**23**])**.** *Presupunem că* $T : X \to X$ *este o* $(G,\varphi)-$*contracţie astfel încâtpentru un* $x_0 \in X$, $Tx_0 \in [x_0]_{\widetilde{G}}$. *Fie* $\widetilde{G}_{x_0}$ *componenta lui* $\widetilde{G}$ *care-l conţine pe* x_0. *Atunci* $[x_0]_{\widetilde{G}}$ *este invariantă în raport cu* T *şi* $T|_{[x_0]_{\widetilde{G}}}$ *este o* $\left(\widetilde{G}_{x_0},\varphi\right)-$*contracţie. Mai mult, dacă* $x, y \in [x_0]_{\widetilde{G}}$, *atunci* $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt Cauchy echivalente.*

Teorema 3.4.3 (F. Bojor, [**23**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet, şi fie tripletul* (X, d, G) *având următoarea proprietate:*

(3.47)

pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* X, *dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Fie $T : X \to X$ *o* $(G,\varphi)-$*contracţie, şi* $X_T = \{x \in X \,|(x, Tx) \in E(G)\}$. *Atunci au loc următoarele relaţii.*

(1) $\operatorname{card} F_T = \operatorname{card}\left\{[x]_{\widetilde{G}} \,|x \in X_T\right\}$.

(2) $F_T \neq \emptyset$ *dacă şi numai dacă* $X_T \neq \emptyset$.

(3) T *are un unic punct fix dacă şi numai dacă există* $x_0 \in X_f$ *astfel încât* $X_T \subseteq [x_0]_{\widetilde{G}}$.

(4) Pentru orice $x \in X_T$, $T\big|_{[x]_{\widetilde{G}}}$ *este PO.*

(5) Dacă $X_T \neq \emptyset$ *şi* G *este slab conex, atunci* T *este PO.*

(6) Dacă $X' := \cup\left\{[x]_{\widetilde{G}} | x \in G\right\}$ *atunci* $T|_{X'}$ *este WPO.*

(7) Dacă $T \subseteq E(G)$, *atunci* T *este WPO.*

Corolarul 3.4.2 (F. Bojor, [**23**]). *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet* ε*-înlănţuit pentru un* $\varepsilon > 0$, *adică, pentru* $x, y \in X$ *date, există* $N \in \mathbb{N}$ *şi un şir* $(x_i)_{i=0}^{N}$ *astfel încât*

$$x_0 = x, x_N = y \text{ şi } d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon \text{ pentru orice } i = 1, ..., N.$$

Fie $T : X \to X$ *un operator şi* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de* $(c)-$*comparaţie astfel încât*

$$\forall x, y \in X\,(d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x,y))) \tag{3.48}$$

Atunci T *este PO.*

În continuare vom demonstra că teorema de punct fix pentru φ contraţii ciclice introdusă de Păcurar şi Rus [**69**] este o consecinţă a Teoremei 3.4.3. Vom prezenta şi demonstra o variantă puţin modificată a acestei teoreme.

Teorema 3.4.4 (Păcurar, Rus, [**69**]). *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet,* $A_1, A_2, ..., A_p \in Pcl(X)$, $Y = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de (c)-comparţie şi* $T : Y \to Y$ *un operator. Presupunem că* $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ *este o reprezentare ciclică a lui* Y *în raport cu* T *şi* T *este o* $\varphi-$*contracţie ciclică, adică verifică relaţia:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x,y)) \tag{3.49}$$

pentru orice $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$, *unde* $1 \leqslant i \leqslant p$ *şi* $A_{p+1} = A_1$. *Atunci* T *are un unic punct fix* $x^* \in \bigcap_{i=1}^{p} A_i$ *iar şirul Picard* $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* x^* *pentru orice valoare iniţială* $x \in Y$.

5. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Bianchini

În această secţiune, vom generaliza condiţia de contracţie introdusă de Bianchini în [**21**] şi implicit teorema de punct fix corespunzătoare.

Definiţia 3.5.1 (F. Bojor, [**27**]). *Fie* (X,d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G. *Operatorul* $T : X \to X$ *se numeşte un operator G-Bianchini dacă:*

1. *Pentru orice* $(x,y) \in E(G)$ *avem că* $(Tx, Ty) \in E(G)$.

2. *există* $a \in [0, 1)$ *astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

pentru orice $(x, y) \in E(G)$.

Exemplul 3.5.1. *Orice operator Bianchini este un operator* G_0*-Bianchini, unde graful* G_0 *este definit prin* $E(G_0) = X \times X$.

Exemplul 3.5.2 (F. Bojor, [**27**]). *Fie* $X = \{0, 1, 2\}$ *înzestrat cu metrica euclidiană* d_E. *Operatorul* $T : X \to X$, $Tx = 0$, *for* $x \in \{0, 1\}$ şi $Tx = 1$, *for* $x = 2$ *este un operator* G*-Bianchini cu constanta* $a = \frac{1}{2}$, *unde* $G = \{(0, 1); (0, 0); (1, 1)); (2, 2)\}$, *dar nu este operator Bianchini deoarece* $d(T0, T2) = 1$ *şi*

$$max\{d(0, T0), d(2, T2)\} = \max\{0, 1\} = 1$$

. *Însa este simplu de observat că iteraţia Picard* $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge la 0 pentru orice* $x \in X$.

Observaţia 3.5.1. *Dacă* T *este un operator* G*-Bianchini, atunci* T *este atât operator* G^{-1}*-Bianchini cât şi operator* $\widetilde{G}$*-Bianchini.*

Notaţie 3.5.1. *Fie* X *o mulţime nevidă,* G *un graf cu proprietatea* $V(G) = X$, $T : X \to X$ *un operator şi* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Vom nota*

$$X_{T^{n_0}} := \left\{x \in X \,\middle|\, \left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)\right\}.$$

Lema 3.5.1 (F. Bojor, [**27**]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator* G*-Bianchini cu constanta* a. *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *şi* $x \in X$ *astfel încât* $x \in X_T^{n_0}$ *atunci:*

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant a^{n-n_0} d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) \tag{3.50}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Lema 3.5.2 (F. Bojor, [**27**]). *Fie* (X, d) *înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator* G*-Bianchini cu constanta* a. *Dacă graful* G *este slab conex şi*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{T^n} = X \tag{3.51}$$

atunci, pentru $x, y \in X$ *fixate, există* $r(x, y) \geqslant 0$ *şi* $k(x, y) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant a^{n-k(x,y)} r(x, y) \tag{3.52}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq k(x, y)$.

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următoarea teoremă.

Teorema 3.5.2 (F. Bojor, [**27**]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator* G*-Bianchini. Presupunem că:*

(i.) *G este slab conex;*

(ii.) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{T^n} = X$*;*

(iii.) *pentru orice* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *din* X*, dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*.*

Atunci T este PO.

Exemplul următor ne arată că (*iii.*) este o condiţie suficientă pentru ca un operator G-Bianchini să fie PO.

Exemplul 3.5.3 (F. Bojor, [**27**])**.** *Fie* $X := [0, 10]$ *înzestrat cu metrica euclidiană* $d(x, y) = |x - y|$, *pentru orice* $x, y \in X$. *Definim graful* G *prin*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 10] \times (0, 10] \mid x \geqslant y\} \cup \{(0, 0), (0, 10)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ for } x \in (0, 10], \text{ and } T0 = \frac{5}{2}$$

Este simplu de verificat că (X, d) *este un spaţiu metric complet,* G *este slab conex şi* T *este un operator G-Bianchini cu constanta* $a = \frac{1}{3}$. *Pentru orice* $x \in (0, 10]$ *vom avea că* $(x, Tx) = \left(x, \frac{x}{4}\right) \in E(G)$ *deoarece* $x \geqslant \frac{x}{4}$ *deci* $(0, 10] \subset X_{T^0}$ *şi* $(T0, T^2 0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{8}\right) \in E(G)$ *deci* $0 \in X_{T^1}$. *În consecinţă* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{T^n} = X$. *Dar ,* $T^n x \to 0$ *pentru orice* $x \in X$ *şi* T *nu are puncte fixe.*

Următorul exemplu ne arată că graful G trebuie să fie slab conex pentru ca un operator G-Bianchini să fie PO.

Exemplul 3.5.4 (F. Bojor, [**27**])**.** *Fie* $X := [0, 1]$ *înzestrat cu metrica euclidiană* $d(x, y) = |x - y|$, *pentru orice* $x, y \in X$ *şi*

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0, 1], \text{ şi } T0 = 1$$

Definim graful G *prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x, y) \in [0, 1) \times [0, 1) \mid x \geqslant y\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Atunci (X, d) *este un spaţiu metric complet,* G *nu este slab conex deoarece nu există nici un drum în* $\widetilde{G}$ *de la 0 la 1, condiţiile* (ii) *şi* (iii) *sunt adevărate şi* T *este un operator G-Bianchini cu constanta* $a = \frac{1}{3}$. *Şirul* $T^n x$ *converge la 0 pentru orice* $x \in X$, *dar* T *nu are puncte fixe.*

Prima consecinţă a teoremei de mai sus se referă la punctele fixe ale unui operator Bianchini în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.5.1 (F. Bojor, [**27**])**.** *Fie* $(X, \leqslant)$ *o mulţime parţial ordonată* d *o metrică pe* X *astfel încât spaţiul metric* (X, d) *să fie complet. Fie* $T : X \to X$ *un operator crescător astfel încât următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Există* $a \in [0,1)$ *astfel încât* $d(Tx,Ty) \leqslant a \cdot \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\}$ *pentru orice* $x, y \in X$ *cu* $x \leqslant y$;
2. *Pentru orice* $x \in X$ *există* $n_x \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $T^{n_x}x$ *şi* $T^{n_x+1}x$ *sunt elemente comparabile în* $(X, \leqslant)$;
3. *Dacă un şir* (x_n) *converge la* x *în* X, *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $x_{k_n} \leqslant x$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *este PO.*

În ceea ce urmează vom demonstra că teorema de punct fix pentru operatori ciclici Bianchini demonstrată în [**?**] de Petric este o consecinţă a Teoremei 3.5.2.

Teorema 3.5.3 (M. Petric, [**65**])**.** *Fie* $p \leqslant 2$ *şi* $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ *submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet* (X,d) *şi presupunem că* $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ *este un operator ciclic pentru care există* $a \in [0,1)$ *astfel încât pentru orice pereche* $(x,y) \in A_i \times A_{i+1}$, *cu* $i \in \{1,2,...,p\}$, *avem că*

$$d(Tx,Ty) \leqslant a \cdot \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\}.$$

Atunci T *este PO.*

CAPITOLUL 4

Câteva extinderi ale teoremelor de punct fix în spaţii metrice înzestrate cu un graf

În ultimul capitol al tezei, Capitolul 4, extindem teoremele de punct fix din capitolul precedent în două contexte diferite:

a) lucrând în spaţii metrice G-complete;

b) lucrând pe mulţimi înzestrate cu două metrici(teoreme de tip Maia).

Contribuţiile autorului din acest capitol sunt: Definiţia 4.1.2, Exemplul 4.1.1 şi Teoremele 4.1.1, 4.2.2

1. Teoreme de punct fix în spaţii metrice G-complete

În anul 1971 Ćirić [**33**] a extins teoremele de punct fix pentru operatorii contractivi pentru spaţii metrice care nu sunt complete dar care sunt orbital complete.

Definiţia 4.1.1 (Ćirić [**33**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ un operator. Spunem că spaţiul X este orbital complet dacă orice şir Cauchy inclus în $O(x, \infty) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, pentru un $x \in X$ este convergent*

Folosind acest concept mai mulţi autori au introdus şi au demonstrat teoreme de punct fix [**32**], [**33**], [**6**], [**84**], în acest cadru mai general.

În cele ce urmează vom considera că (X, d) este un spaţiu metric înzestrat cu un graf G cu proprietăţile $V(G) = X$ şi $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq E(G)$ şi vom generaliza conceptul din definiţia anterioară pentru astfel de spaţii.

Definiţia 4.1.2. *Spunem că spaţiul metric (X, d) este G-complet dacă orice şir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea*

$$(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

este convergent.

Se observă că orice spaţiu metric complet este un spaţiu metric G-complet pentru orice graf G dar reciproca este în general falsă după cum se poate vedea din exemplul următor.

Exemplul 4.1.1. *Fie mulţimea $X = [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ care în raport cu metrica euclidiană este un spaţiu metric. Definim graful G prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x, 0) \,|x \in X\}$$

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy cu proprietatea

$$(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir constant 0 deci este convergent la 0. Dar spaţiu metric X nu este complet deoarece şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ nu este convergent în X.

În continuare vom extinde Teorema 3.1.1 [**26**] la spaţii metrice G complete.

Teorema 4.1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G astfel încât spaţiul (X, d) să fie $\widetilde{G}$ complet. Dacă:*

i. $T : X \to X$ este un operator G-Kannan cu constanta a;
ii. graful G este slab T-conex;
iii. pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X, cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

În mod analog se pot demonstra teoreme de punct fix pentru operatori G-Zamfirescu, G-Ćirić-Reich-Rus, G-Bianchini în spaţii metrice G-complete.

2. Teoreme de tip Maia pentru operatori G-Kannan

În [**56**] Maia a demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 4.2.1 (Maia, [**56**])**.** *Fie X o mulţime nevidă, d şi ρ două metrici pe X şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

i. $d(x, y) \leqslant \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$;
ii. (X, d) este un spaţiu metric complet;
iii. $T : (X, d) \to (X, d)$ este continuu;
iv. $T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ este o a contracţie cu constanta $a \in [0, 1)$;

Atunci T este PO.

Alte extinderi şi generalizări ale teoremei lui Maia au fost făcute în [**59**], [**58**]. Extinderea Teoremei lui Maia pentru operatori G-Kannan pe spaţii metrice înzestrate cu un graf este dată de următoarea:

Teorema 4.2.2. *Fie X o mulţime nevidă înzestrată cu un graf G, d şi ρ două metrice pe X şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

i. $d(x, y) \leqslant \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$;

ii. (X, d) *este un spaţiu metric complet;*

iii. $T : (X, d) \to (X, d)$ *este continuu;*

iv. $T : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *este un operator* G*-Kannan cu constanta* $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$*;*

v. graful G *este slab* T*-conex.*

Atunci T *este PO.*

În mod analog se pot obţine teoreme de punct fix de tip Maia pentru operatori G-Zamfirescu, G-Ćirić-Reich-Rus, G-Bianchini.

3. Lista lucrarilor ştiinţifice ale autorului

Lucrări ştiinţifice publicate

(1) *Fixed point theorems for Reich type contractions on metric spaces with a graph*, Nonlinear Anal., **75** (2012), 3895 – 3901.

(2) *Note on the stability of first order liniar differential equation*, Opuscula Math., **32** (2012), no. 1, 67 – 74.

(3) *Fixed point of φ-contraction in metric spaces endowed with a graph*, Ann. Univ. Craiova, Math. Comput. Sci. Ser., **37** (2010), no. 4, 85 – 92.

(4) *Generalized additive Cauchy equations and their Ulam-Hyers stability*, Creative Math & Info., **18** (2009), no. 2, 129 – 135.

(5) *On the stability of quartic type functional equation*, Creative Math & Info., **17** (2008), no. 2, 319 – 325.

Lucrări ştiinţifice acceptate

(1) *Fixed points of Bianchini mappings in metric spaces endowed with a graph*, Carpathian J. Math.

(2) *Fixed points of Kannan mappings in metric spaces endowed with a graph*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat.

Lucrări ştiinţifice trimise spre publicare

(1) *Fixed point theorem of Zamfirescu mappings in metric spaces endowed with a graph*

Bibliografie

[1] **Berinde V.**, *Some remarks on a fixed point theorem for Ćirić-type almost contractions*, Carpathian J. Math„ **25** (2009), no. 2, 157–162.

[2] **Aczel J.**, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York- San Francisco- London, 1966.

[3] **Albu M.**, *A fixed point theorem of Maia-Perov type*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.„ **23** (1978), 76–79.

[4] **Alsina C., Ger R.**, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. Inequal. Appl, **2** (1998), 373–380.

[5] **Aoki T.**, *On the stability of the linear transformation in spaces.*, J. Math. Soc.Japan, **2** (1950), 64–66.

[6] **Babu G. V. R., Kameswari M. V. R.** , *Some fixed point theorems relating to the orbital continuity*, Tamkang J. Math., **36(1)** (2005), 73–80.

[7] **Badea C.**, *On the Hyers-Ulam stability of mappings: the direct method*, Hadronic Press (1994), 7–13.

[8] **Banach S.** , *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[9] **Banach, S.**, *Theories des Operations Linearies*, Monografie Matematyczne, 1932.

[10] **Berinde V.** , *Approximating fixed points of weak φ-contractions using the Picard iteration*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 2, 131–142.

[11] **Berinde, V.**, *A fixed point theorem of Maia type in K-metric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory, Babeş-Bolyai Univ., Cluj-Napoca, **3** (1991), 7–14.

[12] **Berinde V.**, *Contracţii generalizate şi aplicaţii*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.

[13] **Berinde V.**, *On the approximation of fixed points of weak φ-contractive operators*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 2, 131–142.

[14] **Berinde V.**, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, **9(1)** (2004), 43–53.

[15] **Berinde V.**, *A convergence theorem for Mann iteration in the class of Zamfirescu operators*, An. Univ. Vest Timiš. Ser. Mat.-Inform., **45** (2007), 33–41.

[16] **Berinde V.**, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg New York, 2007.

[17] **Berinde V.**, *General constructive fixed point theorems for Ćirić-type almost contractions in metric spaces*, Carpathian J. Math., **24** (2008), 10–19.

[18] **Berinde V. Berinde M.**, *On Zamfirescu's fixed point theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **50** (2005), 443–453.

[19] **Berinde, V., Păcurar, M.**, *A note on the paper "Remarks on fixed point theorems of Berinde"*, Nonlinear Analysis Forum, **14** (2009), 119–124.

[20] **Bianchini R.M., Grandolfi M.**, *Transformazioni di tipo contractivo generalizato in uno spazio metrico*, Ann. Acad. Naz. Lincei, **45** (1968), 212–216.

[21] **Bianchini R.M.T.**, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Bolletino U.M.I., **4(5)** (1972), 103–106.

[22] **Bojor F.**, *Generalized additive Cauchy equations and their Ulam-Hyers stability*, Creative Math. and Info., **18** (2009), no. 2, 129–135.

[23] **Bojor F.**, *Fixed point of φ-contraction in metric spaces endowed with a graph*, Ann. Univ. Craiova, Math. Comput. Sci. Ser., **37** (2010), no. 4, 85–92.

[24] **Bojor F.**, *Fixed point theorems for Reich type contractions on metric spaces with a graph*, Nonlinear Anal., **75** (2012), 3895–3901.

[25] **Bojor F.**, *Note on the stability of first order liniar differential equation*, Opuscula Math., **32** (2012), no. 1, 67–74.

[26] **Bojor F.**, *Fixed point of Kannan mapping in metric spaces endowed with a graph*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. ((acceptat)).

[27] **Bojor F.**, *Fixed points of Bianchini mappings in metric spaces endowed with a graph*, Carpathian J. Math. ((acceptat)).

[28] **Bojor F.**, *Fixed point theorems for Zamfirescu mappings in metric spaces endowed with a graph*, ((trimis)).

[29] **Borelli C., Forti L.**, *On a general Hyers-Ulam stability rezult*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **18** (1995), 229–236.

[30] **Bourbaki, N.**, *Topologie générale*, Herman, 1961.

[31] **Chatterjea, S.K.**, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci., **25** (1972), 727–730.

[32] **Ćirić, Lj. B.**, *Generalized contractons and fixed point theorem*, Publ. L'Inst. Math., **12** (1971), 19–26.

[33] **Ćirić, Lj. B.**, *On contraction type mappings*, Math. Balkanica, **1** (1971), 52–57.

[34] **Ćirić, Lj. B.**, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc.Am. Math. Soc., **45** (1974), 267–273.

[35] **Cădariu L. Radu V**, *On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed points approach*, Grazer Math. Ber., Bericht Nr., **346** (2004), 323–350.

[36] **Diaz J.B., Margolis B.**, *A fixed point theorem of the alternative, for contraction on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 305–309.

[37] **Diestel R.**, *Graduate texts in mathematics*, Springer-Verag, 2005.

[38] **Edelstein M.**, *An extension of Banach's contracţie principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 7–10.

[39] **Euler L.**, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sci. Imper. Petropol., **8** (1736), no. 2, 128–140.

[40] **Fréchet, M.**, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[41] **Gajda Z.**, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431–434.

[42] **Găvruţă P.**, *A generalization of the Hyers-Ulam-Rassias Stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **1849** (1994), 431–436.

[43] **Hyers D. H.**, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci., **27** (1941), 222–224.

[44] **Jachymski J.**, *The contracţie principle for mappings on a metric space with a graph*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (2008), 1359–1373.

[45] **Jachymski J., Jóźwik I.**, *Nonlinear contractive conditions: A comparison and related problems*, Banach Center Publ., **77** (2007), 123–146.

[46] **Jung C. F. K.**, *On generalized complet metric spaces*, Bull. A.M.S., **75** (1969), 113–116.

[47] **Jung S. M.**, *Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order*, Appl. Math. Lett., **17** (2004), 1135–1140.

[48] **Jung S. M.**, *Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order (II)*, Appl. Math. Lett., **19** (2006), 854–858.

[49] **Jung S. M.**, *A Fixed Point Approach to the Stability of a Volterra Integral Equation*, Fixed Point Theory Appl., **Article ID 57064** (2007).

[50] **Jung S. M.**, *A Fixed Point Approach to the Stability of Differential Equations* $y' = F(x, y)$, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **33** (2010), no. 2, 47–56.

[51] **Jungnickel, D.**, *Graphs, networks and algorithms*, Springer, 2008.

[52] **Kannan, R.**, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10** (1968), 71–76.

[53] **Kannan R.**, *On certain sets and fixed point theorems*, Roum. Math. Pure. Appl., **14** (1969), 51–54.

[54] **Kirk W.A., Srinivasan P.S., Veeramani P.**, *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 1, 79–89.

[55] **Luxemburg W. A. J.**, *n the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **20** (1958), 540–546.

[56] **Maia M. G.**, *Unósservazione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **40** (1968), 139–143.

[57] **Miura T.** , *On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map*, Sci. Math. Japan, **55** (2002), 17–24.

[58] **Mureşan A.S.**, *Some fixed point theorems of Maia type*, Sem. on Fixed Point Theory, Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca, **Preprint No. 3** (1988), 35–42.

[59] **Mureşan A.S.**, *From Maia fixed point theorem to fixed point theory in a set with two metrics*, Carpathian J. Math (2007), 133–140.

[60] **Nicolae A., O'Regan D. Petrusel A.**, *Fixed point theorems for singlevalued and multivalued generalized contractions in metric spaces endowed with a graph*, Georgian Math. J., **18** (2011), 307–327.

[61] **Nieto J. J., Pouso R. L. Rodríyguez-López R**, *Fixed point theorems in ordered abstract spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 2505–2517.

[62] **Nieto J. J., Rodríyguez-López R.**, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, **22** (2005), 223–239.

[63] **Nieto J. J., Rodríyguez-López R.**, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Acta Math. Sinica, English Ser. (2007), 2205–2212.

[64] **O'Reagan D., Petruşel A.**, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 1241–1252.

[65] **Petric M.A.**, *Some remarks concerning Círíc-Reich-Rus operators*, Creative Math. & Info., **18** (2009), 188–193.

[66] **Petric M.A.**, *Fixed points and best proximity points theorems for cyclical contractive operators*, Teză de doctorat, 2011.

[67] **Petric M.A., Zlatanov B. G.**, *Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions*, (accepted).

[68] **Petruşel A., Rus I.A.**, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134)** (2006), 411–418.

[69] **Păcurar M., Rus I.A.**, *Fixed point theorems for cyclic φ-contractions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **72** (2010), 1181–1187.

[70] **Radu V.**, *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory, **4** (2003), 91 –96.

[71] **Ran A.M.C., Reurings M.C.B.**, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 1435–1443.

[72] **Rassias J. M.**, *Solution of a stability problem of Ulam*, Discuss. Math., **12** (1992), 431–434.

[73] **Rassias Th. M.**, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **72** (1978), 297–300.

[74] **Reich S.**, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. U.M.I., **4** (1971), 1–11.

[75] **Reich S.**, *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), 121–124.

[76] **Rhoades B. E.**, *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **226** (1977), 257–290.

[77] **Rus I. A.** , *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Ist. di Matem. Unic. di Trieste, **3** (1971), 1–4.

[78] **Rus I. A.**, *O metodâ posledoviseleninâh priblijenii*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **17** (1972), 1433–1437.

[79] **Rus I. A.**, *Generalized Contractions*, Seminar on fixed point theory, Univ. Cluj-Napoca, Preprint 3 (1983), 1–130.

[80] **Rus I. A.**, *Cyclic representatioms and fixed points*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, **3** (2005), 171–178.

[81] **Rus I.A.**, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[82] **Rus I.A.**, *Generalized contractions and Applications*, Cluj University Press, 2001.

[83] **Rus I.A., Petruşel A, Petruşel G.**, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008.

[84] **Samet B, Vetro C.**, *Berinde mappings in orbitally complete metric spaces*, Chaos Solitons Fract., **44** (2011), 1075–1079.

[85] **Trif T.**, *On the stability of a functional equation deriving from an inequality of Popoviciu for convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **272** (2002), 604 –616.

[86] **Ulam S.M.**, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publ. New York, 1960.

[87] **Zamfirescu T.**, *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel) (1972), 292–298.