UNIVERSITATEA TEHNICA DIN CLUJ-NAPOCA
CENTRUL UNIVERSITAR NORD BAIA MARE
FACULTATEA DE ŞTIINŢE

Rezumat teză de doctorat

PUNCTE TRIPLE FIXE PENTRU OPERATORI DEFINIŢI PE SPAŢII METRICE PARŢIAL ORDONATE

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Marin Borcut

Baia Mare
2012

Cuprins

Prefaţă

Tema tezei face parte din domeniul analizei neliniare şi anume, din teoria punctului fix. Rezultatul fundamental din teoria metrică a punctului fix este **Principiul Contracţiilor Banach-Caccioppoli-Picard** [**17**] care, în esenţă, afirmă că într-un spaţiu metric complet, un operator $F : X \to X$ care îndeplineşte condiţia de contracţie:

$$d(F(x), F(y)) \leq ad(x, y) \ \forall \ x, y \in X, a \in [0, 1), \tag{0.1}$$

are un punct fix unic care poate fi obţinut prin metoda iteraţiilor Picard.

Pornind de la acest rezultat, în ultimii 50 de ani s-a dezvoltat o teorie foarte bogată, după cum se poate vedea în lucrările: [**106**], [**118**],[**119**], [**120**], [**121**], [**122**] [**27**], [**28**], [**29**], [**30**]. Printre aceste contribuţii se numără şi contribuţiile şcolii româneşti de teoria punctului fix de la Cluj, condusă de Prof. Univ. Dr. Ioan Rus. Aceste contribuţii se referă atât la teoria punctului fix în sine, cât şi la aplicaţiille acestei teorii la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale, a ecuaţiilor diferenţiale, a ecuaţiilor integrale, a ecuaţiilor integro-diferenţiale ş.a.m.d.

Un moment important în evoluţia teoriei punctului fix este marcat de lucrarea [**108**] din anul 2004 a lui **Ran** şi **Reurings**, care consideră condiţia de contracţie (0.1) într-un **spaţiu metric parţial ordonat** şi care nu trebuie să fie satisfăcută de orice $x, y \in X$, ci numai de elementele comparabile în sensul relaţiei de ordine definite pe X:

$$\exists \ 0 < c < 1 : \ d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y) \ \forall \ x \geq y. \tag{0.2}$$

Ran şi Reurings au obţinut existenţa şi unicitatea punctului fix pentru astfel de contracţii pentru spaţii metrice parţial ordonate, impunând şi o condiţie de monotonie asupra lui F şi au indicat aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii matriciale.

Această nouă direcţie de cercetare a atras foarte mulţi cercetători şi a fost foarte fructuoasă. Printre cei care au obţinut rezultate în această direcţie sunt **Nieto** şi **R. Rodríguez-López** în lucrarea [**97**], care au stabilit existenţa şi unicitatea punctului fix în condiţiile în care operatorul $F : X \to X$ verifică condiţia de contracţie (0.2), este monoton crescător, dar nu este neapărat continuu. Pentru a fi posibil acest fapt, autorii au introdus condiţia adiţională asupra spaţiului X:

$$\text{dacă există un şir crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n. \tag{0.3}$$

Dacă operatorul $F : X \to X$ este monoton descrescător, atunci în condiţia (0.3) se consideră un şir descrescător.

Sintetizând rezultatele din lucrarea lui Nieto [**97**], **Bhaskar** şi **Lakshmikantham**, în lucrarea [**61**] au propus studiul punctelor cuplate fixe pentru operatori $F : X \times X \to X$, în prezenţa unei condiţii de contracţie de forma

$$d\left(F(x,y),F(u,v)\right) \le \frac{k}{2}\left[d(x,u)+d(y,v)\right], \text{ pentru } x \ge u, y \le v. \tag{0.4}$$

Tematica punctelor cuplate după lucrarea lui Bhaskar şi Lakshmikantham s-a bucurat de un interes imens. Numai în baza de date Scopus există peste [85] de lucrări: [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**10**], [**8**], [**11**], [**12**], [**13**], [**14**], [**16**], [**18**], [**19**], [**20**], [**21**], [**22**], [**23**], [**24**], [**25**], [**43**], [**46**], [**48**], [**49**], [**50**], [**53**], [**54**], [**55**], [**57**], [**59**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**69**], [**70**], [**71**], [**72**], [**75**], [**78**], [**79**], [**82**], [**86**], [**87**], [**88**], [**90**], [**93**], [**94**],[**95**], [**96**], [**97**], [**98**], [**99**], [**102**], [**103**], [**123**], [**124**], [**125**], [**126**], [**127**], [**128**], [**129**], [**130**], [**131**], [**132**], [**133**], [**134**], [**136**], [**137**], [**140**], [**141**], [**142**], [**135**], [**100**], [**101**], [**77**], [**52**], [**26**], [**40**],[**114**], [**91**], [**15**], [**58**], [**62**], lucrări în care s-au obţinut atât rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor fixe cuplate pentru operatori ce verifică diferite tipuri de contracţie, cât şi aplicaţii pentru aceste rezultate în rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale şi integrale.

Pornind de la aceste rezultate ne-am propus studiul punctelor fixe triple, care se referă la operatori $F : X \times X \times X \to X$, motivaţi de faptul că, prin intermediul tehnicii punctelor fixe cuplate nu putem rezolva un sistem de forma:

$$\begin{cases} x^2+2yz-6x+3=0 \\ y^2+2zx-6y+3=0 \\ z^2+2xy-6z+3=0 \end{cases}. \tag{0.5}$$

În articolele [**31**] **"Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** şi [**32**] **"Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** autorii **Berinde-Borcut** respectiv **Borcut-Berinde** au introdus conceptele de **punct fix triplu** şi **punct coincident triplu** şi au stabilit rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctului triplu fix, respectiv a punctului triplu coincident pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate ce verifică condiţie de contracţie de tipul:

există $j,k,l \in [0,1)$ cu $j+k+l<1$, astfel încât

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \le jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right), \tag{0.6}$$

$\forall x \ge u, y \le v, z \ge w$, respectiv o condiţie de forma

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \le jd\left(g\left(x\right),g\left(u\right)\right)+kd\left(g\left(y\right),g\left(v\right)\right)+ \\ +ld\left(g\left(z\right),g\left(w\right)\right), \tag{0.7}$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w \in X$ cu $g\left(x\right) \le g\left(u\right),\ g\left(y\right) \ge g\left(v\right),\ g\left(z\right) \le g\left(w\right)$.

Pornind de la aceste rezultate, scopul principal al acestei teze este de a prezenta conceptele şi rezultatele de bază ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple fixe, respectiv a punctelor triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Ca fundament pentru această nouă teorie, s-a prezentat un pachet minimal din teoria punctului fix, a punctelor cuplate fixe şi a punctelor cuplate coincidente.

Lucrarea este structurată în 4 capitole şi se încheie cu lista referinţelor bibliografice.

Capitolul I, intitulat **Elemente de bază din teoria punctului fix**, este un capitol ce cuprinde pachetul minimal de noţiuni şi rezultate din teoria punctului fix, exemple şi aplicaţii. Acest capitol este format din 4 paragrafe.

În **Paragraful 1.1. Noţiuni din teoria punctului fix** sunt prezentate diverse noţiuni de bază din teoria punctului fix, respectiv: **spaţiu metric, spaţiu metric complet, spaţiu ordonat, spaţiu parţial ordonat**, **punct fix**, **operator continuu, operator Lipschitz, a-contracţie, φ-contracţie.** Subparagraful 1.1.3 conţine trei teoreme de punct fix [Principii de Contracţie], fundamentale pentru această lucrare. Aceste teoreme sunt: **Teorema Banach-Caccioppoli-Picard, Teorema Matkowski, Teorema Ran-Reurings**. Ultima teoremă este de fapt Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard aplicat pe spaţii metrice parţial ordonate.

Paragraful 1.2: Puncte cuplate fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate cuprinde trei subparagrafe. Subparagraful 1.2.1 conţine următoarele concepte: spaţiu metric produs $X \times X$ parţial ordonat, operator mixt-monoton $F : X \times X \to X$, punct cuplat fix pentru F, compunerea simetrică a doi operatori şi proprietăţile acestora. În paragrafele 1.2.2 şi 1.2.3 sunt prezentate 8 teoreme de existenţă şi unicitate a punctelor cuplate fixe pentru operatori mixt-monotoni şi continui, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, operatori de tip Picard (extensii sau generalizări ale condiţiei de contracţie) sau φ-contracţii. În absenţa continuităţii lui F se impune condiţii asupra spaţiului X, şi anume faptul că dacă şirul $\{x_n\}$ converge crescător la un element $x \in X$, atunci avem $x_n \leq x, \forall n$. Analog, şi pentru şiruri ce converg descrescător. Pentru a avea unicitatea punctului fix cuplat, la ipotezele teoremelor de existenţă se impune o condiţie de comparare a elementelor din $X \times X$, condiţie legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat spaţiul $X \times X$.

Paragraful 1.3: Puncte cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Acest paragraf este structurat pe trei subparagrafe, în subparagraful 1.3.1 fiind prezentate conceptele: operator mixt-g-monoton, punct cuplat coincident şi comutativitatea operatorilor F şi g. În paragrafele 1.3.2 şi 1.3.3 sunt redate 2 teoreme de existenţă şi 3 teoreme de unicitate a punctelor cuplate coincidente pentru operatori mixt-g-monotoni de tip φ-contracţie [Matkowski].

Paragraful 1.4: Exemple. Aplicaţii. În acest paragraf sunt prezentate exemple ce ilustrează importanţa aplicativă a rezultatelor din acest capitol. Ca aplicaţie, s-a studiat existenţa şi unicitatea soluţiei problemei la limită cu valori periodice, aplicaţie a teoremei 1.2.38 preluat din [**61**]

Contribuţiile autorului la acest capitol sunt: Exemplul 1.4.59; Exemplul 1.4.60; Exemplul 1.4.61; Exemplul 1.4.62.

Capitolele II şi III formează nucleul tezei şi sunt în totalitatea lor contribuţiile autorului. Aceste două capitole conţin **12 definiţii, 27 teoreme, 3 corolare, 4 propoziţii, 12 exemple şi o aplicaţie**. Fiecare capitol are trei paragrafe, care la rândul lor sunt divizate în subparagrafe.

Capitolul II. Puncte triple fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate.

Paragraful 2.1. Puncte triple fixe pentru operatori mixt-monotoni: Primul subparagraf este dedicat definirii noilor concepte. Pentru $(X, d, \leq)$ un spaţiu metric complet parţial ordonat se definesc: spaţiul metric produs $X \times X \times X = X^3$ parţial ordonat, metrica pe acest spaţiu, iar pentru operatorul $F : X^3 \to X$ definim: proprietatea de mixt-monotonie, punctul triplu fix pentru operatori mixt-monotoni astfel: $(x, y, z) \in X^3$ este punct triplu fix dacă

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y), z = F(z, y, x).$$

În subparagrafele 2.1.2 respectiv 2.1.3 sunt prezentate teoreme de existenţă, respectiv teoreme de unicitate a punctelor fixe triple pentru operatori de tip Picard. Pentru a avea unicitatea punctului triplu fix, la ipotezele teoremelor de existenţă se introduce o condiţie suplimentară cu privire la compararea elementelor, ce trebuie să o îndeplinească spaţiul X^3.

Paragraful 2.2 Puncte fixe triple pentru operatori monotoni: Structura acestui paragraf este asemănătoare cu cea a paragrafului precedent, numai că operatorii sunt monotoni, iar definiţia punctului triplu fix este cu totul alta, şi anume: $(x, y, z) \in X^3$ este punct triplu fix pentru operatorul monoton F dacă

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z), z = F(z, y, x).$$

Rezultatele privind existenţa şi, respectiv, unicitatea punctelor triple fixe pentru operatori monotoni, sunt prezentate în subparagrafele 2.2 şi respectiv 2.3.

Paragraful 2.3 Exemple. Aplicaţii. În acest paragraf sunt prezentate exemple de operatori mixt-monotoni (monotoni) ce au unul sau mai multe puncte triple fixe.

Ca aplicaţie la teoria punctelor fixe, este prezentată rezolvarea ecuaţiei integrale:

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x(s)) + g(s,x(s)) + h(s,x(s))]ds + a(t), t \in [0,T], T > 0.$$

Considerăm spaţiul $X = C([0,T],\mathbb{R})$ a operatorilor continui definiţi pe $[0,T]$ cu valori reale, înzestrat cu metrica

$$d(u,v) = \max_{0\leq t\leq T} |u(t) - v(t)|\,, \text{ pentru } u, v \in X,$$

şi operatorul $F : X^3 \to X$ definit astfel:

$$F(x_1,x_2,x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x_1(s)) + g(s,x_2(s)) + h(s,x_3(s))]ds + a(t), t \in [0,T],$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in X$, îndeplineşte condiţiile Teoremei 2.1.15.

Capitolul III. Puncte triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, capitol în care se introduce conceptul de punct triplu coincident atât pentru operatori mixt-g-monotoni, cât şi pentru operatori g-monotoni. Ca şi capitolul II, capitolul III este structurat pe trei paragrafe, iar primele două paragrafe sunt impărţite în câte trei subparagrafe.

Paragraful 3.1 Puncte triple coincidente pentru operatori mixt-g-monotoni. În subparagraful 3.1.1 sunt prezentate definiţiile: pentru mixt-g-monotonia operatorului $F : X^3 \to X$, unde $g : X \to X$ este o funcţie oarecare; pentru comutativitatea operatorului F cu funcţia g; pentru punct coincident triplu al operatorului F şi a funcţiei g dată astfel $(x,y,z) \in X^3$ este punct coincident triplu dacă

$$F(x,y,z) = g(x), F(y,x,y) = g(y), F(z,y,x) = g(z).$$

În subparagrafele 3.1.2 respectiv 3.1.3 sunt prezentate teoreme de existenţă, respectiv teoreme de unicitate pentru punctele triple coincidente.

Paragraful 3.2 Puncte triple coincidente pentru operatori g-monotoni. Structura acestui paragraf este la fel ca la paragraful 3.1, numai că apare diferenţă de conţinut, prin faptul că operatorii sunt g-monotoni şi implicit definiţia punctului triplu coincident este cu totul alta. Dacă $F : X^3 \to X$ este un operator g-monoton atunci $(x,y,z) \in X^3$ este punct triplu coincident pentru F şi g dacă

$$F(x,y,z) = g(x), F(y,x,z) = g(y), F(z,y,x) = g(z).$$

Exemple de puncte triple coincidente pentru operatorul F şi funcţia g sunt prezentate în paragraful 3.3.

Capitolul IV Concluzii În acest capitol sunt prezentate concluziile acestei teze şi sunt indicate câteva direcţii de cercetare viitoare, pornind de la rezultatele prezentate în lucrarea de faţă.

CAPITOLUL 1

Elemente de bază din teoria punctului fix

Teoria punctului fix a fost construită pentru operatori definiţi pe diferite spaţii, cum ar fi: spaţii metrice, spaţii Banach, spaţii topologice, spaţii metrice parţial ordonate, spaţii uniforme etc. În această lucrare vom aborda teoria punctului fix, în mod special pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. De aceea, acest capitol abordează doar câteva noţiuni de bază, strict necesare pentru capitolele II şi III.

1. Noţiuni din teoria punctului fix

În acest paragraf sunt prezentate noţiunile fundamentale din teoria punctului fix (**punct fix, spaţiu metric complet, spaţiu parţial ordonat, operator Lipschitz, a-contracţie, φ-contracţie**), precum şi trei principii de existenţă, existenţă şi unicitate a punctului fix (**Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard**, **Principiul Matkowski de φ-Contracţie** , **Principiul Ran-Reurings**). Lucrările bibliografice utilizate pentru redactarea acestui paragraf sunt: [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**56**], [**60**], [**84**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**].

2. Puncte cuplate fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

În acest paragraf vom prezenta teoria de bază a punctelor fixe cuplate, teorie introdusă de Bhaskar şi Lakshmintham în lucrarea [**61**] în anul 2006. Această lucrare este fundament atât pentru foarte multe lucrări ştiinţifice, cât şi pentru această teză. Acest paragraf conţine trei subparagrafe în care am prezentat atât definiţii pentru: spaţiul produs $X \times X$ parţial ordonat, operatorul mixt-monoton $F : X \times X \to X$, punctul cuplat fix pentru operatorul F, compunerea simetrică a operatorilor F, G şi proprietăţile acestuia [subparagraful 1.2.1], cât şi teoreme de existenţă a punctelor cuplate fixe pentru operatorul F [subparagraful 1.2.2] şi teoreme de unicitate pentru puncte cuplate fixe a operatorului F [subparagraful 1.2.3].

Referinţele bibliografice consultate pentru redactarea acestui subparagraf sunt: [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**61**],[**19**], [**29**], [**30**], [**42**], [**43**], [**97**], [**65**], [**98**], [**123**], [**124**], [**94**].

3. Puncte cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

În acest paragraf este prezentată teoria punctelor cuplate coincidente într-o formă minimală, bazată pe lucrarea [**85**], lucrare apărută în anul 2009. Autorii acestei lucrări, Lakshmikantham şi Ćirić generalizează noţiunea de punct fix cuplat şi introduc conceptul de punct coincident cuplat. Lucrările bibliografice folosite pentru acest paragraf sunt: [**85**], [**2**], [**8**], [**11**], [**20**], [**21**], [**23**], [**122**], [**118**], [**120**], [**119**], [**121**], [**27**], [**29**], [**30**], [**16**], [**43**], [**18**], [**48**], [**49**], [**50**], [**65**], [**61**], [**70**], [**71**], [**72**].

CAPITOLUL 2

Puncte triple fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

Organizarea acestui capitol este următoarea: introducem noile concepte, dăm rezultate de bază privind existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple fixe atât pentru operatori mixt-monotoni, cât şi pentru operatori monotoni, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate şi ilustrăm rezultatele teoretice cu exemple şi aplicaţii.

Capitolul în integralitate conţine contribuţii ale autorului, contribuţii ce constau în **7 definiţii**, **19 teoreme**, **4 propoziţii**, **6 exemple**, **1 aplicaţie**.

Rezultatele acestui capitol sunt cuprinse în lucrările:

[31] **Berinde, V.,Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Nonlinear Anal., 74, (2011) 4889-4897**;

[34] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*** **Carpathian J. Math. (Acceptat)**.

[36] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Aplied Mathematics and Computation, (Submitted)**;

[37] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Mathematics and Computers in Simulation, (Submitted)**;

[38] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (Submited)**;

Referinţele bibliografice ce stau la baza acestui capitol sunt: [**31**], [**38**], [**34**], [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**61**],[**19**], [**29**], [**30**], [**42**], [**43**], [**97**], [**65**], [**98**], [**123**], [**124**], [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**56**], [**60**], [**84**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**137**], [**8**], [**10**], [**11**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**69**], [**71**], [**72**], [**79**], [**82**], [**88**], [**90**], [**95**], [**102**], [**104**], [**94**].

1. Puncte triple fixe pentru operatori mixt-monotoni

Acest paragraf este dedicat teoriei punctelor triple fixe pentru operatori mixt-monotoni, unde se prezintă în primul subparagraf, definiţiile pentru: spaţiul produs $X \times X \times X$ parţial ordonat, mixt-monotonia operatorului F, punct triplu fix, metrica spaţiului produs $X \times X \times X$, compunerea simetrică a doi operatori şi proprietăţiile acesteia. În subparagrafele 2.1.2 şi respectiv 2.1.3 sunt prezentate teoremele de existenţă şi respectiv teoremele de unicitate a punctelor fixe triple.

1.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Spaţiul produs $X \times X \times X$ este parţial ordonat dacă:

$$\text{pentru } (x, y, z), (u, v, w) \in X \times X \times X, (u, v, w) \leq (x, y, z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 2.1.1 (Borcut, [**38**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi $F : X \times X \times X \to X$. Spunem că F este mixt-monoton dacă $F(x, y, z)$ este monoton crescător în x, şi z şi monoton descrescător în y, adică pentru orice $x, y, z \in X$,*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1, z) \geq F(x, y_2, z)$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, z_2 \leq z_1 \Rightarrow F(x, y, z_2) \geq F(x, y, z_1)$$

Definiţia 2.1.2 (Berinde-Borcut, [**31**]). *Un element $(x, y, z) \in X \times X \in X$ este punct triplu fix pentru operatorul F, dacă*

$$F(x, y, z) = x, F(y, x, y) = y, F(z, y, x) = z.$$

Definiţia 2.1.3 (Berinde-Borcut, [**31**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Pe spaţiul $X \times X \times X$, considerăm metrică funcţia $d : X \times X \times X \to X$ cu*

$$d[(x, y, z), (u, v, w)] = d(x, u) + d(y, v) + d(z, w).$$

Pentru a simplifica unele demonstraţii, definim compunerea simetrică a operatorilor cu trei variabile.

Definiţia 2.1.4 (Borcut, [**38**]). *Fie X, Y, Z mulţimi nevide şi $F : X \times X \times X \to X$, $G : Y \times Y \times Y \to Z$. Definim compunerea simetrică (sau, s-compunerea) pentru F şi G, operatorul $G * F : X \times X \times X \to Z$, cu*

$$(G * F)(x, y, z) = G(F(x, y, z), F(y, x, y), F(z, y, x))\,(x, y, z \in X).$$

Pentru mulţimea nevidă X, notăm cu P_x funcţia proiecţie pe primul factor al produsului cartezian

$$P_X : X \times X \times X \to X, P(x, y, z) = x \text{ pentru } x, y, z \in X.$$

Compunerea simetrică are următoarele proprietăţi:

Propoziţia 2.1.5 (Borcut, [**38**]). *(Asociativitatea). Dacă* $F : X \times X \times X \to Y$, $G : Y \times Y \times Y \to Z$ *şi*

$$H : Z \times Z \times Z \to W, \text{ atunci } (H * G) * F = H * (G * F).$$

Propoziţia 2.1.6 (Borcut, [**38**]). *(Elementul neutru). Fie* $F : X \times X \times X \to Y$, *atunci*

$$F * P_X = P_Y * F = F.$$

Propoziţia 2.1.7 (Borcut, [**38**]). *(Mixt-monotonia). Dacă* $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$, $(Z, \leq)$ *sunt spaţii parţial ordonate şi operatorii* $F : X \times X \times X \to Y, G : Y \times Y \times Y \to Z$ *sunt mixt-monotoni, atunci* $G * F$ *este mixt-monoton.*

Propoziţia 2.1.8 (Borcut, [**38**]). *Dacă* $(X, \leq)$ *este parţial ordonat şi* F *este mixt-monoton, atunci* $F^n = F * F^{n-1} = F^{n-1} * F$ *este mixt-monoton pentru orice* n.

1.2. Teoreme de existenţă

În baza noilor definiţii introduse în subparagraful 2.1.1, în continuare vom prezenta 4 rezultate obţinute legate de existenţa punctelor fixe triple.

Teorema 2.1.9 (Borcut, [**38**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica* d *pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator continuu şi mixt-monoton . Presupunem că există* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d\left(F\left(x, y, z\right), F\left(u, v, w\right)\right) \leq \frac{k}{3}\left[d\left(x, u\right) + d\left(y, v\right) + d\left(z, w\right)\right] \tag{2.8}$$

$$\text{pentru oricare } x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F\left(x_0, y_0, z_0\right), y_0 \geq F\left(y_0, x_0, y_0\right) \text{ şi } z_0 \leq F\left(z_0, y_0, x_0\right), \tag{2.9}$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F\left(x, y, z\right), y = F\left(y, x, y\right) \text{ şi } z = F\left(z, y, x\right).$$

Acum ne punem problema dacă rezultatul anterior rămâne valabil prin eliminarea proprietăţii de continuitate a operatorului F. Concluzia teoremei va rămâne aceeaşi dacă spaţiului metric X i se va atribui o proprietate în plus, proprietate privind existenţa în X a două şiruri monotone, unul crescător şi unul descrescător, condiţie introdusă de Nieto şi R. Rodríguez-López în lucrarea [**97**], folosită şi de Bhaskar şi Lakshmikantham, în lucrarea [**61**]. Vom prezenta acest fapt în teorema următoare.

Teorema 2.1.10 (Borcut, [**38**])**.** *Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica d pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator mixt-monoton . Presupunem că există $k \in [0,1)$ cu*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \leq \frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right]$$

$$\textit{pentru orice } x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Presupunem că pe X avem următoarele proprietăţi:

(i) *dacă există un şir crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,*

(ii) *dacă există un şir descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.*

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), y_0 \geq F\left(y_0,x_0,y_0\right) \text{ şi } z_0 \leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$x = F\left(x,y,z\right), y = F\left(y,x,y\right) \text{ şi } z = F\left(z,y,x\right).$$

Acum vom prezenta anumite rezultate în ceea ce priveşte existenţa punctului fix triplu pentru un operator $F : X \times X \times X \to X$, unde $X \times X \times X$ este spaţiu produs parţial ordonat, generalizând contracţia de tip Picard astfel:

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right),$$

unde $j, k, l \in [0,1)$ cu $j+k+l<1$.

Teorema 2.1.11 (Berinde-Borcut, [**31**])**.** *Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica d pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator continuu şi mixt-monoton . Presupunem că există $j, k, l \in [0,1)$ cu $j+k+l<1$, astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right), \tag{2.10}$$

pentru orice $x \geq u, y \leq v, z \geq w$. Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), y_0 \geq F\left(y_0,x_0,y_0\right) \text{ şi } z_0 \leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$x = F\left(x,y,z\right), y = F\left(y,x,y\right) \text{ şi } z = F\left(z,y,x\right).$$

În teorema următoare vom studia existenţa punctelor fixe triple pentru un operator care nu este continuu, dar spaţiul metric X are o proprietate în plus, legată de existenţa a două şiruri monotone.

Teorema 2.1.12 (Berinde-Borcut, [**31**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica* d *pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator mixt-monoton . Presupunem că există* $j, k, l \in [0, 1)$ *cu* $j + k + l < 1$, *astfel încât* (2.10) *este îndeplinită pentru orice* $x \geq u, y \leq v, z \geq w$.

Presupunem că X *are următoarele proprietăţi:*

(i) *dacă există un şir crescător* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n,

(ii) *dacă există un şir descrescător* $\{y_n\} \to y$, *atunci* $y_n \geq y$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

1.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

În lucrarea [**61**], autorii au prezentat, pe lângă rezultatele ce dovedesc existenţa punctului cuplat fix, şi rezultate care asigură unicitatea punctului cuplat fix. Pentru a obţine aceste rezultate, autorii au înzestrat spaţiul produs $X \times X$ cu o proprietate suplimentară legată de relaţia de ordine pe acest spaţiu.

Similar se va proceda pentru a obţine unicitatea punctului fix triplu, înzestrând spaţiul produs X^3, cu o proprietate suplimentară legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat acest spaţiu.

Teorema 2.1.13 (Borcut, [**38**]). *Dacă se adaugă la ipotezele teoremei 2.1.9 condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X \times X \times X$ *comparabil cu* (x, y, z) *şi cu* (x_1, y_1, z_1), *atunci există un unic punct fix triplu pentru operatorul F.*

În următoarea teoremă vom presupune că orice triplet format cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X, atunci punctul triplu fix va fi unic cu componentele egale.

Teorema 2.1.14 (Borcut, [**38**]). *La ipotezele Teoremei 2.1.9 (respectiv ale Teoremei 2.1.10), adăugăm condiţia: presupunem că fiecare triplet format cu elemente din* X *au o limită inferioară sau o limită superioară în* X. *Atunci operatorul* F *are un unic punct triplu fix* (x, y, z) *şi* $x = y = z$.

Dacă la ipotezele din Teoremele 2.1.9, 2.1.10 se adaugă faptul că x_0, y_0, z_0 sunt comparabile, atunci vom obţine iarăşi un rezultat de unicitate a punctului triplu fix, după cum vom vedea în teorema următoare.

Teorema 2.1.15 (Borcut, [**38**]). *La ipotezele Teoremei 2.1.9 (respectiv ale Teoremei 2.1.10, presupunem că* $x_0, y_0, z_0 \in X$ *sunt comparabile. Atunci* $x = y = z$.

În continuare, vom demonstra că punctul triplu fix dat de Teoremele 2.1.11 şi 2.1.12 este unic, dacă spaţiului $X \times X \times X$ i se atribuie şi proprietatea suplimentară: pentru orice două triplete, există al treilea triplet comparabil cu amândouă.

Teorema 2.1.16 (Berinde-Borcut, [**31**]). *La ipotezele teoremei 2.1.11, dacă adăugăm condiţia: pentru orice $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$ care este comparabil cu (x, y, z) şi cu (x_1, y_1, z_1), atunci F are un unic punct fix triplu.*

Dacă fiecare triplet format cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X, vom demonstra faptul că, componentele unicului punct fix triplu, sunt egale.

În următoarea teoremă vom stabili acest fapt.

Teorema 2.1.17 (Berinde-Borcut,[**31**]). *Dacă la ipotezele Teoremei 2.1.11 (respectiv ale Teoremei 2.1.12, presupunem că avem îndeplinită şi următoarea condiţie: orice triplet cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X. Atunci $x = y = z$.*

Teorema 2.1.18 (Berinde-Borcut, [**31**]). *În condiţiile Teoremei 2.1.11 (respectiv ale Teoremei 2.1.12), presupunem că $x_0, y_0, z_0 \in X$ sunt comparabile. Atunci, $x = y = z$.*

Exemplul 2.1.19. *Fie $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ şi $F(x, y, z) = \frac{2x-3y+4z+1}{12}$.*

Acest operator este mixt-monoton, are un unic punct triplu fix $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ şi verifică ipotezele teoremei 2.1.11, demonstraţie prezentată în paragraful 2.3.1.

Exemplul 2.1.20. *Fie $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ şi $F(x, y, z) = \frac{2x+2y+2z+1}{12}$.*

Pentru operatorul din acest exemplu nu se pot aplica teoremele obţinute, deoarece F nu este mixt-monoton, dar este monoton. Totuşi F are punct triplu fix unic pe $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. De aceea se impune o teorie a punctelor triple fixe şi pentru această clasă de operatori. Aceasta se face în paragraful următor.

2. Puncte triple fixe pentru operatori monotoni

În acest paragraf vom prezenta rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe triple pentru operatori monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Spaţiul produs $X \times X \times X$ pe care este definit operatorul F, îl vom defini ca parţial ordonat ca şi în paragraful anterior, metrica cu care vom opera este aceeaşi, dar în schimb, operatorul nu este mixt-monoton, ci monoton, iar punctul triplu fix are o altă formă.

2.1. Definiţii

Fie$(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Spaţiul produs $X \times X \times X$ este parţial ordonat dacă: pentru

$(x,y,z), (u,v,w) \in X \times X \times X$,

$$(u,v,w) \leq (x,y,z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 2.2.21 (Borcut, [**34**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi operatorul $F : X \times X \times X \to X$. Spunem că F este monoton, dacă $F(x,y,z)$ este monoton crescătoare în x, y şi z, adică: pentru orice $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ avem*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1, z) \leq F(x, y_2, z),$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, z_1 \leq z_2 \Rightarrow F(x, y, z_1) \leq F(x, y, z_2).$$

Definiţia 2.2.22 (Borcut, [**34**]). *Un element $(x,y,z) \in X \times X \times X$ este punct fix triplu pentru $F : X \times X \times X \to X$, dacă*

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,z) = y, \text{ şi } F(z,y,x) = z.$$

Observaţia 2.2.23. *Noţiunea de punct fix triplu din acest context este diferită de cea din secţiunea anterioară.*

2.2. Teoreme de existenţă

Teorema 2.2.24 (Borcut, [**34**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator continu şi monoton pe X. Presupunem că există $k \in [0,1)$, astfel încât*

$$d(F(x,y,z), F(u,v,w)) \leq \frac{k}{3}[d(x,u) + d(y,v) + d(z,w)] \tag{2.11}$$

$$\text{pentru orice } x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0), \tag{2.12}$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$x = F(x,y,z), y = F(y,x,z) \text{ şi } z = F(z,y,x).$$

Ne punem problema acum, dacă rezultatul anterior rămâne valabil atunci când F nu este continuă. Răspunsul este afirmativ dacă spaţiul produs $X \times X \times X \to X$ este înzestrat cu o condiţie suplimentară, condiţie ce impune existenţa unui şir monoton convergent. Următoarea teoremă redă cele menţionate.

Teorema 2.2.25 (Borcut, [**34**]). *Fie*$(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator monoton pe* X. *Presupunem că există* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq \frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right]$$

$$\textit{pentru orice } x\geq u, y\leq v, z\geq w.$$

Presupunem că avem următoarea proprietate pe X*:*

(*i*) *dacă există şirul crescător* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), y_0 \leq F\left(y_0,x_0,z_0\right) \ \textit{şi}\ z_0 \leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F\left(x,y,z\right), y = F\left(y,x,z\right) \ \textit{şi}\ z = F\left(z,y,x\right).$$

Dacă în teoremele 2.2.24 şi 2.2.25, condiţia de contracţie (2.11) este înlocuită cu o condiţie ce o generalizează şi este de forma:

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right),$$

$\forall x \geq u, y \leq v, z \geq w$, atunci vom vedea în următoarele două teoreme că, rămâne aceeaşi concluzie.

Teorema 2.2.26 (Borcut, [**34**]). *Fie*$(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator continuu şi monoton pe* X. *Presupunem că există constantele* $j, k, l \in [0, 1)$ *cu* $j + k + l < 1$, *astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right), \tag{2.13}$$

$\forall x \geq u, y \leq v, z \geq w$. *Dacă există* $x_0, y_0, z_0 \in X$ *astfel încât*

$$x_0 \leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), y_0 \leq F\left(y_0,x_0,z_0\right) \ \textit{şi}\ z_0 \leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x, y, z \in X$ *astfel încât*

$$x = F\left(x,y,z\right), y = F\left(y,x,z\right) \ \textit{şi}\ z = F\left(z,y,x\right).$$

Teorema 2.2.27 (Borcut, [**34**]). *Fie*$(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator monoton pe* X. *Presupunem că există constantele* $j, k, l \in [0, 1)$ *cu* $j + k + l < 1$, *astfel încât condiţia de contracţie* (2.13) *este verificată pentru orice* $x \geq u, y \leq v, z \geq w$. *Presupunem că* X *are următoarea proprietate:*

(*i*) *dacă există un şir crescător cu* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

2.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

În acest subparagraf vom prezenta patru teoreme de unicitate a punctelor triple fixe pentru operatori monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Dacă la ipotezele teoremelor de existenţă se adaugă o condiţie de comparare a elementelor din spaţiul produs $X \times X \times X$, atunci punctul fix triplu va fi unic.

Teorema 2.2.28 (Borcut, [**34**]). *Dacă la ipotezele teoremei 2.2.24 adăugăm condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X \times X \times X$ *comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1), *atunci* F *are un punct fix triplu unic.*

În următoarea Teoremă, sunt prezentate condiţiile în care punctul fix triplu este unic şi componentele lui sunt egale.

Teorema 2.2.29 (Borcut, [**34**]). *În condiţiile Teoremei 2.2.24 (respectiv ale Theoremei 2.2.25), presupunem că orice triplet cu elemente din* X *are o limită inferioară sau o limită superioară în* X. *Atunci* $x = y = z$.

Similar, ca şi în teoremele 2.2.28 şi 2.2.29, se poate demonstra unicitatea punctului fix triplu din Teoremele 2.2.26 şi 2.2.27, cu condiţia ca spaţiul produs $X \times X \times X$ înzestrat cu relaţia de ordine menţionată mai sus să aibă o proprietate suplimentară. Vom prezenta două teoreme de unicitate.

Teorema 2.2.30 (Borcut, [**34**]). *În condiţiile teoremei 2.2.26 presupunem că: pentru orice* $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X \times X \times X$ *comparabil cu* (x, y, z) *şi cu* (x_1, y_1, z_1). *Atunci* F *are un unic punct fix triplu.*

Teorema 2.2.31 (Borcut, [**34**]). *În condiţiile Teoremei 2.2.26 (respectiv ale Theorem 2.2.27), presupunem că orice triplet cu elemente din* X *are o limită inferioară sau o limită superioară în* X. *Atunci* $x = y = z$.

3. Exemple şi aplicaţii

În acest paragraf vom prezenta atât exemple de operatori ce îndeplinesc condiţiile unor teoreme de existenţă, existenţă şi unicitate prezentate în acest capitol, cât şi o aplicaţie la rezolvarea ecuaţiei integrale

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x(s)) + g(s,x(s)) + h(s,x(s))]ds + a(t), t \in [0,T], T > 0. \tag{2.14}$$

CAPITOLUL 3

Puncte triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

Scopul vizat în acest capitol este de a prezenta teoria punctelor triple coincidente atât pentru operatori mixt-monotoni, cât şi pentru operatori monotoni, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Conţinutul constă din: definiţiile noilor concepte, din rezultatele cu privire la existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple coincidente, precum şi din exemple.

Acest capitol **conţine în totalitate contribuţiile autorului**, contribuţii ce cuprind **5 definiţii**, **8 teoreme**, **3 corolare**, **6 exemple**.

Rezultatele acestui capitol sunt în articolele:

[**32**] **Borcut, M., Berinde, V.,** ***Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*** **, Aplied Mathematics and Computation, 218 (10) (2012) pp. 5929-5936**;

[**38**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces***, **Aplied Mathematics and Computation, 218 (2012) pp. 7339-7346** ;

[**35**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces***, **Creative Mathematics and Informatics, (acceptat)**;

[**39**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****Filomat J. (submitted)**.

Lucrările bibliografice ce stau la baza acestui capitol sunt: [**32**], [**33**], [**35**], [**39**], [**85**], [**2**], [**8**], [**11**], [**20**], [**21**], [**23**], [**122**], [**118**], [**120**], [**119**], [**121**], [**27**], [**29**], [**30**], [**16**], [**43**], [**18**], [**48**], [**49**], [**50**], [**65**], [**61**], [**70**], [**71**], [**72**]. [**31**], [**38**], [**34**], [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**61**],[**19**], [**29**], [**30**], [**42**], [**43**], [**97**], [**65**], [**98**], [**123**], [**124**], [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**56**], [**60**], [**84**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**137**], [**8**], [**10**], [**11**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**69**], [**71**], [**72**], [**79**], [**82**], [**88**], [**90**], [**95**], [**102**], [**104**], [**94**].

1. Puncte triple coincidente pentru operatori mixt-monotoni

În acest paragraf sunt prezentate definiţiile noilor concepte şi teoreme de existenţă şi unicitate a punctelor coincidente triple. Conceptele noi introduse sunt: mixt-g-monotonia, punct coincident pentru un operator mixt-g-monoton [Subparagraful 3.1.1].

Rezultatele ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor coincidente sunt prezentate în subparagrafele 3.1.2 şi 3.1.3.

1.1. Definiţii

Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este metric complet. Definim spaţiul parţial ordonat $X\times X\times X$, astfel:

$$\text{pentru } (x,y,z),(u,v,w)\in X\times X\times X,(u,v,w)\leq (x,y,z)\Leftrightarrow x\geq u,y\leq v,z\geq w.$$

Definiţia 3.1.1 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat, operatorul $F: X\times X\times X\ \rightarrow X$ şi funcţia $g:X\rightarrow X$. Spunem că F este mixt-g-monoton dacă $F(x,y,z)$ este g-monoton crescător în x, şiz, şi este g-monotonă descrescător în y, adică, pentru orice $x,y,z\in X$,*

$$x_1,x_2\in X,g(x_1)\leq g(x_2)\Rightarrow F(x_1,y,z)\leq F(x_2,y,z),$$

$$y_1,y_2\in X,g(y_1)\leq g(y_2)\Rightarrow F(x,y_1,z)\geq F(x,y_2,z)$$

şi

$$z_1,z_2\in X,g(z_2)\leq g(z_1)\Rightarrow F(x,y,z_2)\geq F(x,y,z_1).$$

Definiţia 3.1.2 (Borcut, [**35**]). *Un element $(x,y,z)\in X\times X\in X$ este punct triplu coincident pentru operatorul F şi funţia g dacă*

$$F(x,y,z)=g(x)\,,\ F(y,x,y)=g(y)\,,F(z,y,x)=g(z)\,.$$

Definiţia 3.1.3 (Borcut, [**35**]). *Fie X nevidă, $F:X\times X\times X\rightarrow X$ un operator şi $g:X\rightarrow X$ o funcţie. Spunem că F şi g sunt comutative (F comută cu g) dacă:*

$$g(F(x,y,z))=F(g(x)\,,\,g(y)\,,g(z))\,,\forall x,y,z\in X.$$

1.2. Teoreme de existenţă

Teorema 3.1.4 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F: X\times X\times X\rightarrow X$ un operator şi $g:X\rightarrow X$ o funcţie, astfel încât F este mixt-g-monoton. Presupunem că există $j,k,l\in[0,1)$ cu $j+k+l<1$, astfel încât*

$$d(F(x,y,z),F(u,v,w))\leq jd(g(x),g(u))+kd(g(y),g(v))+ \tag{3.15}$$

$$+ld(g(z),g(w)),$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w\in X$ cu $g(x)\leq g(u)\,,\ g(y)\geq g(v)\,,\ g(z)\leq g(w)$.

Presupunem că $F(X\times X\times X)\subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi că avem următoarele proprietăţi:

(a) F este continuu sau

(b) X are următoarele propietăţi:

$$(i) \text{ dacă există şirul crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii) \text{ dacă există şirul descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Corolarul 3.1.5 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X, d) să fie spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ şi $g : X \to X$, astfel încât F să fie mixt-g-monoton. Presupunem că există $a \in [0, 1)$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \frac{a}{3}[d(g(x), g(u)) + d(g(y), g(v)) + d(g(z), g(w))] \tag{3.16}$$

$$\text{pentru orice } x, y, z, u, v, w \in X \text{ cu } g(x) \leq g(u), g(y) \geq g(v), g(z) \leq g(w).$$

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem următoarele proprietăţi:

(a) F este continuu sau

(b) X verifică următoarele:

$$(i) \text{ dacă avem şirul crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii) \text{ dacă avem şirul descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Teorema 3.1.6 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie, astfel încât F este mixt-g-monoton. Presupunem că există funcţia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ şi $\lim_{r \to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \varphi(\max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\}) \tag{3.17}$$

$$\text{pentru orice } x, y, z, u, v, w \in X \text{ cu } g(x) \leq g(u), g(y) \geq g(v), g(z) \leq g(w).$$

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, *g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem următoarele condiţii îndeplinite:*

(a) F este continuu sau

(b) X are propietăţiile:

$$(i)\ dac\breve{a}\ avem\ şirul\ cresc\breve{a}tor\ \{x_n\} \to x, atunci x_n \leq x\ pentru\ orice\ n,$$

$$(ii)\ \ dac\breve{a}\ avem\ şirul\ descresc\breve{a}tor\ \{y_n\} \to y,\ \ atunci\ y_n \geq y\ pentru\ orice\ n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0)\ \ şi\ g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y)\ \ şi\ g(z) = F(z, y, x).$$

Corolarul 3.1.7 (Borcut, [**35**])**.** *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât* (X, d) *să fie spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *şi* $g : X \to X$, *astfel încât F să fie mixt-g-monoton . Presupunem că există* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \tag{3.18}$$

$$\leq k(\max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\})$$

$$pentru\ orice\ x, y, z, u, v, w \in X\ \ cu\ g(x) \leq g(u),\ g(y) \geq g(v),\ g(z) \leq g(w).$$

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, *g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem următoarele proprietăţi:*

(a) F este continuu sau

(b) X verifică următoarele:

$$(i)\ dac\breve{a}\ avem\ şirul\ cresc\breve{a}tor\{x_n\} \to x,\ \ atunci\ x_n \leq x\ pentru\ orice\ n,$$

$$(ii)\ \ dac\breve{a}\ avem\ şirul\ descresc\breve{a}tor\{y_n\} \to y,\ \ atunci\ y_n \geq y\ pentru\ orice\ n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0)\ \ şi\ g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y)\ \ and\ g(z) = F(z, y, x).$$

1.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

Pentru a avea unicitatea punctului triplu coincident, este nevoie de a introduce o condiţie suplimentară la ipotezele teoremelor de existenţă, condiţie legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat spaţiul X^3. Acest fapt va fi prezentat în teoremele următoare.

Teorema 3.1.8 (Borcut, [**35**]). *În condiţiile teoremei 3.1.6, dacă: pentru orice* (x, y, z), $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X^3$ *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *sunt comparabile cu* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$*, atunci* F *şi* g *au un unic punct triplu coincident.*

Teorema 3.1.9 (Borcut, [**35**]). *În condiţiile teoremei 3.1.6 dacă avem îndeplinită şi condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *atunci există* $(u, v, w) \in X^3$, *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *este comparabilă* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$*, atunci* F *şi* g *au un unic punct triplu coicident.*

2. Puncte triple coincidente pentru operatori monotoni

În acest paragraf sunt prezentate rezultatele de existenţă, existenţă şi unicitate a punctelor triple coincidente pentru operatori monotoni, iar definiţia punctului triplu coincident este cu totul alta, aşa cum s-a văzut în paragraful 2.2.

2.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Construim spaţiul produs $X \times X \times X$ care este parţial ordonat dacă:

$$\text{pentru } (x, y, z), (u, v, w) \in X \times X \times X, (u, v, w) \leq (x, y, z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 3.2.10 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat, operatorul $F : X \times X \times X \ \rightarrow X$ şi funcţia $g : X \rightarrow X$. Spunem că F este g-monoton, dacă $F(x, y, z)$ este g-monoton crescător (descrescător) in x, y, z , adică pentru orice $x, y, z \in X$, avem*

$$x_1, x_2 \in X, g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, g(y_1) \leq g(y_2) \Rightarrow F(x, y_1, z) \leq F(x, y_2, z)$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, g(z_2) \leq g(z_1) \Rightarrow F(x, y, z_2) \geq F(x, y, z_1).$$

Definiţia 3.2.11 (Borcut, [**35**]). *Un element $(x, y, z) \in X \times X \in X$ este punct triplu coincident pentru operatorul F şi funcţia g dacă*

$$F(x, y, z) = g(x),\ F(y, x, z) = g(y), F(z, y, x) = g(z).$$

2.2. Teoreme de existenţă

Teorema 3.2.12 (Borcut, [**35**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \rightarrow X$ un operator şi $g : X \rightarrow X$ o funcţie astfel încât F este g-monoton. Presupunem că există $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq jd(g(x), g(u)) + kd(g(y), g(v)) \quad (3.19)$$

$$+ld(g(z), g(w)),$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ cu $g(x) \leq g(u),\ g(y) \geq g(v),\ g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem :

(a) F este continuu sau

(b) X are următoarea proprietate:

(i) dacă avem şirul crescător $\{x_n\} \rightarrow x$, cu $x_n \leq x$ pentru orice n,

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Teorema 3.2.13. *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator şi* $g : X \to X$ *o funcţie astfel încât* F *este g-monoton. Presupunem că există funcţia de comparaţie* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *cu* $\varphi(t) < t$ *şi* $\lim_{r \to t} \varphi(r) < t$ *pentru orice* $t > 0$, *astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \tag{3.20}$$

$$\leq \varphi(\max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\})$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ *cu* $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g *este continuă şi comută cu* F *şi de asemenea presupunem că*

(a) F *este continuu sau*

(b) X *are următoarele proprietăţi:*

(i) *dacă există şirul descrescător* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n,

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Corolarul 3.2.14. *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator şi* $g : X \to X$ *o funcţie, astfel încât* F *este g-monoton. Presupunem că există constanta* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \tag{3.21}$$

$$\leq k(max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\})$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ *cu* $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g *este continuă şi comută cu* F *şi de asemenea, presupunem că*

(a) F *este continuu sau*

(b) X *are următoarea proprietate:*

(i) *dacă există şirul crescător cu* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

2.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

Teorema 3.2.15 (Borcut, [**35**]). *În condiţiile Teoremei 3.1.4, dacă este îndeplinită şi condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X^3$ *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *este comparabil cu* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, *atunci* F *şi* g *are un unic punct triplu coincident.*

Teorema 3.2.16. *Dacă la ipotezele Teoremei 3.2.13 adăugăm condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X^3$ *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *este comparabil cu* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, *atunci* F *şi* g *au un unic punct coincident triplu.*

3. Exemple.

Vom da în acest paragraf exemple de operatori atât mixt-monotoni, cât şi monotoni, ce au puncte triple coincidente şi verifică ipotezele teoremelor de existenţă şi unicitate prezentate în paragrafele 3.1 şi 3.2.

CAPITOLUL 4

Concluzii

După cum am prezentat în prefaţă, rolul teoriei punctului fix este major în dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii, atât prin contribuţiile pur teoretice cât şi cele aplicative. Fără îndoială, rolul central al acestei teorii îl are **Principiul Banach-Caccioppoli-Picard**, principiu promotor al întregii teorii a punctului fix. În secolul precedent, studiul acestei teorii s-a făcut predominant pentru operatori definiţi pe **spaţii metrice complete**.

În anul 2004, Ran şi Reueings, în lucrarea [**108**], aplică Principiul Banach-Caccioppoli-Picard pe **spaţii metrice complete parţial ordonate**.

Pornind de la rezultatele acestei lucrări, Bhaskar şi Laksmikantham, în articolul[**61**] apărut în anul 2006, extind această teorie la **spaţii metrice parţial ordonate produs** $X \times X$ şi introduc conceptul de **punct cuplat fix** pentru **operatori mixt-monotoni** de tip Picard, obţinând rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea acestor puncte.

După trei ani, în articolul [**85**] Lakshmikantham şi Ćirić generalizează noţiunea de punct fix cuplat şi introduc conceptul de **punct coincident cuplat**, obţinând rezultate de existenţă şi unicitate a punctelor coincidente pentru **operatori mixt-g-monotoni** ce verifică condiţia de contracţie de tipul **Matkowski-Rus**.

Berinde în lucrările [**23**], [**24**], obţine rezultate mai generale prin considerarea unor condiţii de contracţie mai slabe, cum ar fi:

$$d(F(x,y), F(u,v)) + d(F(y,x), F(v,u)) \leq k[d(x,u) + d(y,v)].$$

După cum s-a văzut, această teorie a fost prezentată în capitolul I. Din anul 2009 până în prezent au apărut peste 80 de lucrări ce abordează atât teoria punctelor cuplate fixe, cât şi teoria punctelor cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe diferite spaţii şi ce verifică diferite tipuri de contracţii.

Trendul de extindere a teoriei punctului fix continuă, şi în anul 2011 se lansează o nouă extindere în lucrările [**31**] **"Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** şi [**32**] **"Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** de autorii Berinde-Borcut, respectiv Borcut-Berinde, unde introduc conceptele de **puncte fixe triple** şi respectiv **puncte coincidente triple**. După cum s-a văzut în capitolele II şi III, rezultatele acestei teorii au fost obţinute pentru operatori monotoni şi mixt-monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, iar condiţiile de contracţie folosite sunt:

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq \frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right],\ \text{cu } k\in[0,1);$$

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right),$$

unde $j,k,l\in[0,1)$ cu $j+k+l<1$, şi pentru oricare $x\geq u, y\leq v, z\geq w$;

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(g\left(x\right),g\left(u\right)\right)+kd\left(g\left(y\right),g\left(v\right)\right)+ld\left(g\left(z\right),g\left(w\right)\right);$$

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(x),g(u));d(g(y),g(v));d(g(z),g(w))\right\}\right)$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w\in X$ cu $g\left(x\right)\leq g\left(u\right)$, $g\left(y\right)\geq g\left(v\right)$, $g\left(z\right)\leq g\left(w\right)$, iar φ este o funcţie de comparaţie.

Consider că aceaste rezultate obţinute privind punctele fixe triple au o mare importanţă în ansamblul teoriei punctelor fixe, deoarece, pe lângă directa aplicabilitate în rezolvarea ecuaţiilor integrale (paragraful 2.3), au generat apariţia a noi articole pe temă [**1**], [**109**], [**15**], [**110**], [**9**] iar articolul [**31**] **Berinde, V.,Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Nonlinear Anal., 74, (2011) 4889-4897**; are **12 citări date de L. Ciric, E. Karapinar, B. Samet, M. Abbas, H. Aydi, K.P.R. Rao** şi se poate continua cercetarea pe următoarele direcţii:

1. Obţinerea de rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru operatori mixt monotoni (monotoni) definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, în care operatorul să verifice un alt tip de contracţie, cum ar fi: **Rakotch, Kannan, Ćirić-Reich-Rus, Ćirić, Zanfirescu, Meir-Keeler, Istrăţescu, Rus-Kasahara-Rhoades şi altele**. Acum vom da pentru exemplificare, condiţia de contracţie de tipul **Kannan** pentru puncte fixe, puncte fixe cuplate şi pentru puncte fixe triple:

Fie operatorul $F:X\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$,

$$d(F(x),F(y))\leq k\left[d(x,F(x))+d(y,F(y))\right];$$

Fie operatorul $F:X^2\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$, atunci

$$d(F(x,y),F(u,v))\leq \frac{k}{2}\left[d(x,F(x,y))+d(y,F(y,x))+d(u,F(u,v))+d(v,F(v,u))\right];$$

Fie operatorul $F:X^3\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$ atunci

$$d(F(x,y,z),F(u,v,w))\leq \frac{k}{4}\left[d(x,F(x,y,z))+d(y,F(y,x,y))+d(z,F(z,y,x))\right.$$
$$\left.+d(u,F(u,v,w))+d(v,F(v,u,v))+d(w,F(w,v,u))\right].$$

Tot pe această direcţie se poate studia existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple pentru operatori ce îndeplinesc condiţii de contracţie mai slabe cum ar fi:

$$d\left(F(x,y,z),F(u,v,w)\right)+d\left(F(y,x,y),F(v,u,v)\right)+d\left(F(z,y,x),F(w,v,u)\right)$$
$$\leq k\left[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)\right].$$

2. Obţinerea de rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru operatori mixt monotoni (monotoni) definiţi pe alt tip de spaţii:

3. Obţinerea de noi rezultate pentru extinderea la puncte fixe cvadruple, extindere introdusă de către Karapinar şi, respectiv, Karapinar-Berinde, în lucrările [**80**] şi respectiv [**81**], extindere fundamentată pe teoria punctelor fixe triple.

4. Deoarece există operatori care nu sunt nici monotoni şi nici mixt-monotoni, după definiţia 2.1.1 se justifică considerarea unei teorii a punctelor triple fixe pentru operatori ce îndeplinesc o proprietate de monotonie hibridă, şi anume: să fie crescător pe primele două componente şi descrescător pe a treia componentă.

În lucrarea [**41**], Berzig şi Samet introduc conceptul de m-mixt monoton şi de punct fix de ordinul N pentru un operator $F : X^N \to X$, unde F este monoton crescător pe primele m componente, iar pe următoarele $N - m$ componente este monoton descrescător. Un studiu de cercetare poate fi aprofundarea a ceea ce a propus Berzig şi Samet.

Bibliografie

[1] Abbas, M., Aydi, H., M., Karapýnar, E., *Tripled Fixed Points of Multivalued Nonlinear Contraction Mappings in Partially Ordered Metric Spaces*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2011, Article ID 812690, 12 pages, doi:10.1155/2011/812690 **217** (2010), no. 1, 195–202.

[2] Abbas, M., Ali Khan, M., Radenović, S., *Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), no. 1, 195–202.

[3] Abbas, M.; Damjanovic, B.; Lazovic, R., *Fuzzy common fixed point theorems for contractive mappings*, Applied Mathematics Letters Volume 23, Issue 11, November 2010, 1326-1330.

[4] Abbas, M.; Hajj-Diab, A., *Common zeros of exponential polynomials and Shapiro conjecture*, JP J. Algebra Number Theory Appl., **16** (2010), no. 2, 143–152.

[5] Abbas, M.; Jungck, G., *Common fixed point resul for noncommuting mappings without continuity incone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341**,(2008), 416-420.

[6] Aczel, J.: *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York- San Francisco- London, 1966.

[7] Aydi, H., *Some coupled fixed point results on partial metric spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, (2011), art. no. 647091.

[8] Aydi, H., Karapnar, E., Shatanawi, W., *Coupled fixed point results for* (ψ, φ) *- weakly contractive condition in ordered partial metric spaces*, Computers and Mathematics with Applications, **62 (12)** (2011), 4449-4460 .

[9] Aydi, H., Karapnar, E., *Triple fixed point in ordered metric spaces*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 4 Issue 1 (2012.), 197-207.

[10] Aydi, H., Damjanovic' Bosko, B., Samet, B., Shatanawi, W., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered G-metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **54 (9-10)** (2011)2443-2450 .

[11] Aydi, H., Postolache, M., Shatanawi, W., *Coupled fixed point results for (?, f) -weakly contractive mappings in ordered G-metric spaces*, Computers and Mathematics with Applications, **63 (1)** (2012), 298-309.

[12] Altun, Ishak., *Common fixed point theorem for maps satisfying a general contractive condition of integral type*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 22 (2010), 195–206.

[13] Altun, I., Damjanović, B. Djorić, D., *Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces*, Appl. Math. Lett. **23** (2010), no. 3, 310–316.

[14] Altun, I., Rakocević, V., *Ordered cone metric spaces and fixed point results*, Comput. Math. Appl., **60** (2010), no. 5, 1145–1151.

[15] Amini-Harandi, A., *Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem*, Mathematical and Computer Modelling, (2012) Article in Press.

[16] Azam, A.; Beg, I.; Arshad, M. *Fixed point in topological vector space-valued cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Art ID. 604084, 9

[17] Banach, S., *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133-181.

[18] Bartoszewski, Z., *Solving boundary value problems for delay differential equations by a fixed-point method*, Journal of Computational and Applied Mathematics. , **236** **(6)** (2011) 1576-1590 .

[19] Beg, I., Abbas, M., *Fixed points and invariant approximation in random normed spaces*, Carpathian J. Math. **26** (2010), no. 1, 36–40

[20] Beg, I.; Butt, A. R. *Common fixed point for generalized set valued contractions satisfying an implicit relation in partially ordered metric spaces*, Math. Commun. **15** (2010), no. 1, 65-76.

[21] Beg, I.; Butt, A. R., *Fixed point for set-valued mappings satisfying an implicit relation in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009) 3699-3704.

[22] Beg, I.; Sedghi, S.; Shobe, N., *Common fixed point of uniformly R-subweakly commuting mappings in fuzzy Banach spaces*, J. Fuzzy Math. **18** (2010), no. 1, 75-84.

[23] Berinde, V., *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74** **(18)** (2011), 7347-7355 .

[24] Berinde, V., *Coupled fixed point theorems for ϕ-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **75** **(6)** (2012), 3218-3228 .

[25] Berinde, V., *Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*, Computers and Mathematics with Applications, Revised 11 January 2012. Accepted 2 February 2012. Available online 22 February 2012.

[26] Berinde, V., *Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*, Nonlinear Analysis, Computers and Mathematics with Applications, Article in Press.

[27] Berinde, V., *Iterative approximation of fixed points*. Second edition, Lecture Notes in Mathematics, 1912, Springer, Berlin, 2007

[28] Berinde, V., Păcurar, M., *A note on the paper "Remarks on fixed point theorems of Berinde"*, Nonlinear Analysis Forum, 14 (2009), 119-124.

[29] Berinde, V., *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, 9 (2004), No. 1, 43-53.

[30] Berinde V., *Contracţii generalizate şi aplicaţii*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.

[31] Berinde, V.,Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **74** (2011), 4889-4897.

[32] Borcut, M., Berinde, V., *Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Aplied Mathematics and Computation, **218 (10)** (2012), 5929-5936.

[33] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Aplied Mathematics and Computation, **218** (2012), 7339-7346.

[34] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for monotone contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Carpathian J. MAath., (Acceptat).

[35] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for monotone contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Creative Mathematics and Informatics, (Acceptat).

[36] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for operators which verify the contraction-type condition Chatterjea in partially ordered metric spaces*, Aplied Mathematics and Computation, (Submitted).

[37] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for operators which verify the contraction-type condition Kannan in partially ordered metric spaces*, Mathematics and Computers in Simulation, (Submitted).

[38] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems in partially ordered metric spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (Submited).

[39] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for monotone ϕ-contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Filomat J. (submitted).

[40] Berzig, M., *Solving a class of matrix equations via the Bhaskar-Lakshmikantham coupled fixed point theorem*Computers and Mathematics with Applications, (2012), Article in Press.

[41] Berzig, M., Samet, B., *An extension of coupled fixed point's concept in higher dimension and applications*, Computers and Mathematics with Applications, (2012), Article in Press.

[42] Ćirić, Lj. B., *Generalized contractons and fixed point theorem*, Publ. L'Inst. Math., **12** (1971), 19-26.

[43] Ćirić, Lj. B., Lakshmikantham, V., *Coupled random fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Stochastic Analysis and Applications, **27 (6)** (2009), 1246-1259.

[44] Ćirić, Lj. B., *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Am. Math. Soc., **45** (1974), 267-273.

[45] Chatterjea, S.K., *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25 (1972), 727-730.

[46] Cho, Y.J., Shah, M.H., Hussain, N., *Coupled fixed points of weakly F-contractive mappings in topological spaces*, Applied Mathematics Letters, **24 (7)** (2011), 1185-1190.

[47] Cho, Y.J., Kadelburg, Z., Saadati, R., Shatanawi, W., *Coupled fixed point theorems under weak contractions*, Discrete Dynamics in Nature and Society, (2012), art. no. 184534.

[48] Choudhury, B. S., *A coincidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings*, Nonlinear Anal., **73** (2010), 2524–2531.

[49] Choudhury, B.S., Maity, P., *Coupled fixed point results in generalized metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **54 (1-2)** (2011), 73-79.

[50] Ding, H.S., Li, L., *Coupled fixed point theorems in partially ordered cone metric spaces*, Filomat, **25 (2)** (2011), 137-149.

[51] Diaz, J.B.; Margolis, B., *A fixed point theorem of the alternative, for contraction on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc., **74**(1968), 305-309.

[52] Doric, D., Kadelburg, Z., Radenovic, S., *Coupled fixed point results for mappings without mixed monotone property*, Applied Mathematics Letters, Article in Press.

[53] Drici, Z., McRae, F.A., Vasundhara Devi, J., *Fixed point theorems for mixed monotone operators with PPF dependence*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **69 (2)**(2008), 632-636.

[54] Du, W. S., *Nonlinear contractive conditions for coupled cone fixed point theorems*, Fixed Point Theory and Applications, (2010), art. no. 190606.

[55] Du, W. S., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, (2010), art. no. 876372.

[56] Edelstein, M., *An extension of BanachŠs contracţie principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7Ű10.

[57] Eshaghi Gordji, M., Baghani, H., Cho, Y.J., *Coupled fixed point theorems for contractions in intuitionistic fuzzy normed spaces* , Mathematical and Computer Modelling, **54 (9-10)** (2011), 1897-1906 .

[58] Eshaghi Gordji, M., Ghods, S., Ghods, M., Hadian, M., *Coupled fixed point theorem for generalized fuzzy meir-keeler contraction in fuzzy metric spaces* , Journal of Computational Analysis and Applications, **14 (2)** (2012), 271-277.

[59] Figueroa, R., Pouso, R.L., *Coupled fixed points of multivalued operators and first-order ODEs with state-dependent deviating arguments*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (18)** (2011), 6876-6889.

[60] Fréchet, M., *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[61] Bhaskar, T.G., Lakshmikantham, V., *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal., **65** (2006), no. 7, 1379-1393

[62] Ghods, S., Eshaghi Gordji, M., Ghods, M., Hadian, M., *Comment on "coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces" [Lakshmikantham and c ťiric ť, nonlinear anal. tma 70 (2009) 4341-4349]*, Journal of Computational Analysis and Applications, **14(5)** (2012), 958-96.

[63] Golubovic, Z., Kadelburg, Z., Radenovic, S., *Coupled coincidence points of mappings in ordered partial metric spaces*, Abstract and Applied Analysis, (2012), art. no. 192581.

[64] Gordji, M.E., Cho, Y.J., Ghods, S., Ghods, M., Dehkordi, M.H., *Coupled fixed-point theorems for contractions in partially ordered metric spaces and applications*, Mathematical Problems in Engineering, (2012), art. no. 150363.

[65] Harjani, J; López, B; Sadarangani, K., *Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integral equations* , Nonlinear Anal., **74** (2011), 1749-1760.

[66] Huang, Xi.; Zhu, Ch.; Wen, Xi., *Common fixed point theorem for four non-self-mappings in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2010**, Art. ID 983802, 14.

[67] Huang, Xi.; Zhu, Ch; Wen, Xi., *A common fixed point theorem in cone metric spaces*, Int. J. Math. Anal., (Ruse) **4** (2010), no. 13-16, 721-726.

[68] Huang,L.G.; Zhang, H., *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **332**,(2007), 1468-1476.

[69] Hu, X.Q., *Common coupled fixed point theorems for contractive mappings in fuzzy metric spaces* , Fixed Point Theory and Applications, (2011), art. no. 363716.

[70] Hu, X.Q., Ma, X.Y., *Coupled coincidence point theorems under contractive conditions in partially ordered probabilistic metric spaces* , Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **54 (11-12)** (2011), 2816-2826.

[71] Hu, X.Q., Ma, X.Y., *Coupled coincidence point theorems under contractive conditions in partially ordered probabilistic metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (17)** (2011), 6451-6458.

[72] Hussain, N., Shah, M.H., Kutbi, M.A., *Coupled coincidence point theorems for nonlinear contractions in partially ordered quasi-metric spaces with a Q-function*, Fixed Point Theory and Applications, (2011), art. no. 703938.

[73] Jachymski, J.; Jóźwik, I., *Nonlinear contractive conditions: A comparison and related problems*, Banach Center Publ., 77 (2007), 123Ű146.

[74] Jachymski, J. , *The contracţie principle for mappings on a metric space with a graph*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (136) (2008), 1359-1373.

[75] Kadelburg, Z.; Pavlovic, M.; Radenovic, S., *Common fixed point theorems for ordered contractions and quasicontractions in ordered cone metric spaces*, Comput. Math. Appl., **59** (2010), no. 9, 3148-3159.

[76] Kannan, R. *Some results on fixed points,*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10** (1968), 71-76.

[77] Karapinar, E., Luong, N.V., *Quadruple fixed point theorems for nonlinear contractions*, Computers and Mathematics with Applications , (2012), Article in Press.

[78] Karapinar, E., Türkoglu, D., *Best approximations theorem for a couple in cone Banach space*, Fixed Point Theory and Applications, (2010), art. no. 784578.

[79] Karapinar, E., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in cone metric spaces*, Comput. Math. Appl., **59** (2010), no. 12, 3656-3668.

[80] Karapinar, E., *Quadruple Fixed Point Theorems for Weak ö-Contractions* , International Scholarly Research Network, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2011, Article ID 989423, 15 pages , doi:10.5402/2011/989423.

[81] Karapinar, E., *Qoadruplr fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*,Banach J. Math. Anal., **6** (2012), no. 1, 74-89.

[82] Karapinar, E.; Turkojlu, Duran., *Best aproximations theorem for a coupled in cone Banach space*, Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Aplications, Volume 2010,Article I D 784578,9.

[83] Kannan, R., *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10**(1968), 71-76.

[84] Kirk, W.A.; Srinivasan, P.S. and Veeramani, P., *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 1, 79Ű89.

[85] Lakshmikantham, V., Ćirić, L., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **70** (2009), 4341Ű4349.

[86] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (3)** (2011), 983-992.

[87] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings and an application to integral equations*, Computers and Mathematics with Applications, **62 (11)** (2011), 4238-4248.

[88] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed point theorems in partially ordered G-metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **55 (3-4)** (2012), 1601-1609.

[89] Matkowski, j., *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math., **127** (1975).

[90] Mitrovic, Z. D., *A coupled best approximation theorem in normed spaces*, Nonlinear Anal., **72** (2010), 4049-4052.

[91] Mitrovic, Z. D., *On a coupled fixed point problem in topological vector spaces*, Mathematical and Computer Modelling, (2012), Article in Press.

[92] Mureşan, A.S., *From Maia fixed point theorem to the fixed point theory in a set with two metrics,*, Carpathian J. Math., **23** (2007), 133-140.

[93] Nashine, H.K., Shatanawi, W., *Coupled common fixed point theorems for a pair of commuting mappings in partially ordered complete metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **62 (4)** (2011), 1984-1993.

[94] Nguyen V. L., Nguyen X. T., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces* , Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 2 Issue 4 (2010), 16-24.

[95] Nguyen V. L., Nguyen X. T., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Anal., **74** (2011), 983-992.

[96] Nieto, J. J.; Pouso, R. L. and Rodríyguez-López, R., *Fixed point theorems in ordered abstract spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 2505Ű2517.

[97] Nieto,Juan J.; Rodriguez-Lopez, Rosana., *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary diferential equations* , Order**22** (2005), no. 3, 223-239 (2006).

[98] Nieto,Juan J.; Rodriguez-Lopez, Rosana., *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations* , Acta. Math. Sin., (Engl. Ser.) **23**(2007), no. 12, 2205–2212.

[99] Olatinwo, M.O., *Stability of coupled fixed point iteration and the continuous dependence of coupled fixed points*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, **19 (2)** (2012), 71-83.

[100] Olatinwo, M.O., *Coupled fixed point theorems in cone metric spaces*, Annali dell'Universita di Ferrara, **57 (1)** (2011), 173-180.

[101] Parvaneh, V., *Existence of common coupled fixed point for a class of mappings in partially ordered metric spaces*, Applied Mathematical Sciences, **6(17-20)** (2012), 987-994.

[102] Păcurar, M.; I.A. Rus, *Fixed point theorems for cyclic φ-contractions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **72** (2010), no. Issues 3-4, 1181Ű1187.

[103] Petric, M.A. *Fixed points and best proximity points theorems for cyclical contractive operators*, Teză de doctorat, Universitatea de Nord Baia Mare, Facultatea de Ştiinţe 2011.

[104] Petric, M.A.; Zlatanov, B.G. *Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions*, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, Bulgaria, 187Ű194.

[105] Petric, M.A. *Some remarks concerning Círíc-Reich-Rus operators*, Creative Math. Inform., **18** (2009), 188Ű193.

[106] Petruşel, A.; Rus, I. A.*Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2006), 411Ű418.

[107] Radu, V. *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory **4**(1)(2003), 91-96.

[108] Ran, A. C. M., Reurings, M. C. B., *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 5, 1435–1443.

[109] Rao, K. P. R., Kishore, G.N.V., Srinivasa Rao, N., *A Unique Common 3-tupled fixed point theorem for $\psi - \phi$ contractions in partial metric spaces*, Mathematica Aeterna, Vol. 1, (2011), no. 07, 491-507.

[110] Rao, K. P. R., Kishore, G.N.V.„ *A Unique Common tripled fixed point theorem in partially ordered cone metric spaces*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 3 Issue 4(2011), 213-222.

[111] Rassias, J.M.: *Solution of a stability problem of Ulam*, Discuss. Math., **12** (1992), 431-434.

[112] Rassias, Th. M.: *Communication, 27-th International Symposium on Functional Equation* Bielsko-Biala, Katowice, Krokow, Poland, 1989.

[113] Rassias, Th. M.: *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **72**(1978), 297-300.

[114] Razani, A., Zadeh, H.H., Jabbari, A.: *Coupled fixed point theorems in partially ordered metric spaces which endowed with vector-valued metrics*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, (2012), **6(2)**, 124-129.

[115] O'Reagan, D.; Petruşel, A., *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 1241Ű1252.

[116] Reich, S., *Kannan's fixed point theorem*, Boll. U.M.I., **4** (1971), 1-11.

[117] Rhoades, B. E., *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 257-290.

[118] I.A. Rus, *Cyclic representatioms and fixed points*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, **3** (2005), 171Ű178.

[119] Rus, I.A., *O metodâ posledoviseleninâh priblijenii*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **17** (1972), 1433-1437.

[120] Rus, I.A., *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Ist. di Matem., Univ. di Trieste, 3 (1971), fasc. 2, 1-4.

[121] Rus, I. A., *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[122] Rus, I. A., Petruşel, A., Petruşel, G., *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[123] Rus, M-D., *Fixed point theorems for generalized contractions in partially ordered metric spaces with semi-monotone metric*, Nonlinear Anal.

[124] Sabetghadam, F., Masiha, H.P., Sanatpour, A.H., *Some coupled fixed point theorems in cone metric spaces*, Fixed Point Theory. Appl., **2009**, Art. ID 125426, 8

[125] Samet, B., *Coupled fixed point theorems for a generalized Meir-Keeler contraction in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **72** (2010), no. 12, 4508–4517.

[126] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., *Fixed point theorems for a ?-contractive type mappings*,Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **75 (4)** (2012), 2154-2165.

[127] Samet, B., Vetro, C., *Coupled fixed point theorems for multi-valued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (12)** (2011), 4260-4268.

[128] Sedghi, S., Altun, I., Shobe, N., *Coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces*, Nonlinear Anal., **72** (2010), no. 3-4, 1298-1304.

[129] Sedghi, Shaban; Choudhury, Binayak S.; Shobe, Nabi., *Unique common fixed point theorem for four weakly compatible mappings in complete fuzzy metric spaces*, J. Fuzzy Math., **18**, (2010), no. 1, 161-170.

[130] Shatanawi, W., *Partially ordered cone metric spaces and coupled fixed point results*, Computers and Mathematics with Applications, **60 (8)** (2010), 2508-2515.

[131] Shatanawi, W., *Some common coupled fixed point results in cone metric spaces*, International Journal of Mathematical Analysis, **4 (45-48)** (2010), 2381-2388.

[132] Shatanawi, W., *Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **54 (11-12)** (2011), 2816-2826.

[133] Shatanawi, W., *Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **40 (3)** (2011), 441-447.

[134] Shatanawi, W., Samet, B., Abbas, M., *Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in ordered partial metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, **55 (3-4)** (2012), 680-687.

[135] Shatanawi, W., *On w-compatible mappings and common coupled coincidence point in cone metric spaces*, Applied Mathematics Letters, **25 (6)** (2012), 925-931.

[136] Turkoglu, D.; Sedghi, S.; Shobe, N., *A common fixed point theorem in complete fuzzy metric spaces*, Novi Sad J. Math., **39** (2009), no. 1, 11–20.

[137] Turkoglu, D., Binbasioglu, D., *Some fixed-point theorems for multivalued monotone mappings in ordered uniform space*, Fixed Point Theory and Applications, (2011), art. no. 186237.

[138] Ulam, S. M. *A Collection of Mathematical Problems* , Interscience Publ. New York, 1960.

[139] Zamfirescu, T., *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel), **23**(1972), 292-298.

[140] Zhu, X.-H., Xiao, J.-Z., *Note on "coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces"*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (16)** (2011), 5475-5479 .

[141] Zhang, Xi., *Fixed point theorems of multivalued monotone mappings in ordered metric spaces*, Applied Mathematics Letters, **23** (2010), 235-240.

[142] Xiao, J.Z., Zhu, X.H., Cao, Y.F., *Common coupled fixed point results for probabilistic f-contractions in Menger spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **74 (13)** (2011), 4589-4600.