Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Centrul Universitar Nord din Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe
Departmentul de Matematică-Informatică

Rezumatul tezei de doctorat

STABILITATEA METODELOR ITERATIVE DE PUNCT FIX

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Ioana Dărăban (Timiş)

Baia Mare
2013

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix este un domeniu foarte vast al analizei neliniare, cu o evoluţie expansivă în ultimele decenii, iar literatura de specialitate cuprinde, astfel, o multitudine de lucrări pe această importantă temă de cercetare.

Rezultatul fundamental din teoria punctului fix este Principiul Contracţiei al lui Picard-Banach-Caccioppoli [**11**], care a generat importante direcţii de cercetare şi aplicaţii ale acestei teorii la ecuaţii funcţionale, ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale etc.

Problema rezolvării unei ecuaţii neliniare implică aproximarea punctelor fixe ale operatorilor de contracţie corespunzători. În acest sens, există diverse metode de aproximare a punctelor fixe, cum ar fi iteraţia Picard, aceasta fiind cea mai utilizată în cazul operatorilor strict contractivi, dar şi iteraţiile Krasnoselskij, Mann, Ishikawa etc.

În aplicaţiile practice, este important să se stabilească dacă aceste metode sunt numeric stabile sau nu. O iteraţie de punct fix este numeric stabilă dacă micile modificări de aproximaţie datorate calculelor vor produce, de asemenea, mici modificări ale valorii aproximate a punctului fix, calculat folosind metoda respectivă.

Conceptul de stabilitate este fundamental în multe domenii matematice, precum Ecuaţiile Diferenţiale, Ecuaţiile cu Diferenţe, Sistemele Dinamice, Analiza Numerică etc. În cazul nostru, domeniul de interes este teoria stabilităţii în Sistemele Dinamice Discrete.

În acest context, unul dintre conceptele de stabilitate folosite în lucrare este cel considerat de către Harder [**44**], Harder şi Hicks [**45**], [**46**], care au studiat în mod sistematic această problemă. Alte rezultate de stabilitate pentru diverse metode iterative de punct fix şi pentru variate clase de operatori neliniari au fost obţinute de către Berinde [**21**], [**22**], [**23**], Imoru şi Olatinwo [**49**], Osilike [**63**], [**64**], Osilike şi Udomene [**65**], Rhoades [**78**], [**79**] şi mulţi alţii.

Subiectul acestei lucrări tratează problema stabilităţii iteraţiilor de punct fix, punct fix comun, puncte de coincidenţă şi puncte triple fixe, pentru diferite clase de operatori.

Materialul de studiu este organizat pe şase capitole, adăugând o introducere şi o listă a resurselor bibliografice, după cum urmează:

Primul capitol, intitulat **Preliminarii**, furnizează terminologia, conceptele de bază şi notaţiile din teoria punctului fix folosite în această teză. Marea majoritate a materialului cuprins este preluat din monografia dlui prof. univ. dr. V. Berinde [**22**], intitulată "Iterative Approximation of Fixed Points". De asemenea, au fost utilizate şi alte resurse bibliografice: [**1**], [**6**], [**48**], [**50**], [**52**], [**85**], [**86**].

Al doilea capitol, denumit **Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definite în mod explicit**, prezintă conceptul de stabilitate a metodelor iterative de punct fix şi studiază cele mai importante contribuţii în acest domeniu.

Una dintre acestea a fost realizată de către dl. prof. univ. dr. V. Berinde [**22**], care a introdus un concept mai natural de stabilitate, numit *stabilitate slabă*, adoptând şirurile aproximante în locul şirurilor arbitrare, în definiţia stabilităţii. Urmând acest concept, am continuat studiul problemei stabilităţii slabe pentru iteraţii de punct fix comun, pentru anumite clase de operatori de contracţie.

Contribuţiile originale ale acestui capitol sunt: Definiţia 5.9, Teorema 4.4, Teorema 4.5, Exemplele 6.2-6.4, Exemplul 6.5, Exemplul 6.6, Definiţia 7.11 şi Teorema 7.7.

Multe dintre acestea au fost publicate în lucrările: [**94**] (Timiş, I., *On the weak stability of fixed point iterative methods*, prezentată la ICAM7, Baia Mare, 1-4 Sept. 2010), [**95**] (Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 37 (2) (2010), 106-114), [**96**] (Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings and coincidence theorems*, International Journal of Computer Applications 37 (4) (2012), 9-13) şi [**105**] (Timiş, I. and Berinde, V., *Weak stability of iterative procedures for some coincidence theorems*, Creative Math. Inform. 19 (2010), 85-95).

Al treilea capitol, intitulat **Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definiţi în mod implicit**, studiază stabilitatea iteraţiei Picard şi a iteraţiei Jungck pentru puncte fixe comune şi puncte de coincidenţă, pentru operatori de contracţie care satisfac diverse relaţii implicite, cu un anumit număr de parametri.

Mai multe teoreme de punct fix şi punct fix comun au fost recent unificate prin considerarea unor condiţii generale de contracţie exprimate prin relaţii implicite. Această construcţie a fost iniţiată de către dl. prof. univ. dr. V. Popa [**70**], [**71**], [**72**], iar apoi, urmând acest mod de abordare, s-a constituit o parte semnificativă a literaturii de specialitate, cu teoreme de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă, pentru cazul univoc sau multivoc, în diverse tipuri de spaţii.

Deoarece pentru aceste noi teoreme de punct fix nu existau studii asupra stabilităţii, dl. prof. univ. dr. V. Berinde [**14**], [**24**] a obţinut rezultate de stabilitate corespunzătoare pentru iteraţii de punct fix ascociate cu operatori de contracţie definiţi în mod implicit.

Noi am continuat studiul stabilităţii iar rezultatele obţinute sunt generalizări ale teoremelor de punct fix, respectiv ale teoremelor de stabilitate pentru iteraţia Picard existente în literatură: vezi Berinde [**15**], [**19**], [**21**] [**22**], [**23**], [**25**], Chatterjea [**35**], Harder şi Hicks [**45**], [**46**], Hardy şi Rogers [**47**], Imoru şi Olatinwo [**49**], Jungck [**51**], Kannan [**53**], Olatinwo [**59**], Osilike [**64**], [**63**], Ostrowski [**66**], Popa [**71**], Reich [**74**], Reich şi Rus [**90**], Rhoades [**77**], [**78**], [**79**], Rus [**82**], [**83**], Zamfirescu [**106**], cât şi multe dintre referinţele acestora.

Rezultatele originale din acest capitol sunt: Exemplul 1.8, Teorema 1.9, Corolarul 1.1, Corolarul 1.2, Teorema 2.10, Exemplele 3.12-3.13, Exemplul 3.15, Teorema 3.11, Corolarul 3.3 şi Corolarul 3.4.

Multe dintre acestea au fost publicate în [**97**] (Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for some contractive type mappings via implicit relations*, Miskolc Math. Notes 13 (2) (2012), 555-567), [**99**] (Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points and contractive mappings via implicit relations*, lucrare prezentată la ICAM8, Baia Mare, 27-30 Oct. 2011) şi [**100**] (Timiş, I., *Stability of the Picard iterative procedure for mappings which satisfy implicit relations*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 19 (2012), no. 4, 37-44).

Ideea celui de-al patrulea capitol, denumit **Un nou punct de vedere asupra stabilităţii metodelor iterative de punct fix**, se datorează dlui. prof. univ. dr. I. A. Rus [**81**], care a reunit noţiunile de stabilitate din domeniul ecuaţiilor diferenţiale, sistemelor dinamice, teoria operatorilor şi din analiza numerică, prin noi noţiuni.

Luând în considerare aceste noţiuni, în acest capitol am studiat stabilitatea iteraţiei Picard pentru operatori care satisfac diferite condiţii de contracţie. În acest sens, am ilustrat rezultatele obţinute şi prin exemple.

Contribuţiile originale din acest capitol sunt: Teorema 1.12, Propoziţia 1.1, Corolarul 1.5, Corolarul 1.6, Corolarul 1.7, Exemplul 1.19, Corolarul 1.8, Teorema 2.13, Corolarul 2.9, Exemplul 2.20, Teorema 2.14, Corolarul 2.10, Exemplele 3.21 - 3.28, Definiţia 4.15, Definiţia 4.16, Propoziţia 4.2, Teorema 4.15, Teorema 4.16 şi Teorema 5.17.

Unele dintre acestea sunt incluse în [**92**] (Timiş, I., *New stability results of Picard iteration for common fixed points and contractive type mappings*, lucrare prezentată la SYNASC 2012, Timişoara, 26-29 Sept. 2012).

În capitolul al cincilea, **Stabilitatea metodelor iterative de puncte triple fixe**, am luat în considerare rezultatele obţinute de dl. prof. univ. dr. V. Berinde şi dl. prof. dr. M. Borcut [**26**], [**32**], care au introdus conceptul de puncte triple fixe. Noi am continuat cercetarea, prin introducerea noţiunii de stabilitate pentru procese iterative de puncte triple fixe şi am obţinut rezultate de stabilitate pentru operatori monotoni şi mixt monotoni, care satisfac diferite condiţii de contracţie. Pentru ilustrarea acestor rezultate, sunt prezentate şi exemple.

Contribuţiile originale din acest capitol sunt: Definiţia 2.19, Teorema 2.18, Corollary 2.11, Teorema 2.19, Teorema 2.20, Lema 3.3, Definiţia 3.21, Teorema 3.21, Corolarul 3.12, Teorema 3.22, Teorema 3.23, Exemplul 4.29 şi condiţiile de contracţie (2.19)-(2.24), (3.27)-(3.32).

Majoritatea dintre acestea sunt publicate în [**102**] (Timiş, I., *Stability of tripled fixed point iteration procedures for monotone mappings*, Ann. Univ. Ferrara (2012) DOI 10.1007/s11565-012-0171-7).

Capitolul al şaselea, destinat **Concluziilor**, face o trecere în revisă a rezultatelor obţinute şi a contribuţiilor originale din această teză, menţionând, de asemenea, posibile direcţii de cercetare ce pot fi urmate, pornind de la rezultatele noastre.

Mulţumiri

Mulţumesc în primul rând Bunului Dumnezeu, că mi-a vegheat paşii şi mi-a luminat mintea pentru a pricepe învăţăturile cele bune şi folositoare.

Reuşita oricărui proiect depinde în mare măsură de încurajarea şi suportul celorlalţi. Cercetarea ştiinţifică şi elaborarea unei teze de doctorat poate fi realizată numai printr-o îndrumare deosebită, pe care am avut-o din partea Dlui. Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde, care m-a ghidat permanent în activitatea de pregătire din cadrul programului de studii doctorale, mi-a fost un mentor şi un exemplu demn de urmat. Pentru tot efortul acesta, pentru răbdarea şi arta cu care m-a sprijinit, nu pot decât să îi mulţumesc, asigurându-l de profunda mea recunoştinţă.

Mulţumesc în mod deosebit referenţilor, Dlui. Prof. Univ. Em. Dr. Ioan A. Rus, Dlui. Prof. Univ. Dr. Mihai Postolache şi Dlui. Prof. Univ. Dr. Mircea Balaj, pentru atenta citire a acestui manuscris, cât şi pentru preţioasele observaţii şi sugestii. De asemenea, mulţumesc membrilor comisiei de avizare a tezei, respectiv Dlui. Prof. Univ. Dr. Nicolae Pop, Dlui. Conf. Univ. Dr. Dan Bărbosu şi Dlui. Lect. Univ. Dr. Andrei Horvat-Marc, pentru sprijin şi pentru sugestiile constructive. Totodată, mulţumesc membrilor Departamentului de Matematică şi Informatică, pentru contribuţia la formarea mea, întâi ca studentă, apoi ca doctorandă, pentru sfaturile acordate cu multă bunăvoinţă, pentru atmosfera de cercetare ştiinţifică deosebită din cadrul Seminarului Ştiinţific al Departamentului de Matematică şi Informatică, cât şi pentru observaţiile pertinente primite la susţinerea tezei în cadrul acestuia. Îi mulţumesc în mod special Dlui. Lect. Univ. Dr. Andrei Horvat-Marc, pentru ajutor şi consiliere tehnică în probleme de LaTeX.

Se cuvine, de asemenea, să mulţumesc tuturor dascălilor pe care i-am avut de-a lungul anilor şi care, contribuind la formarea mea, şi-au pus implicit amprenta asupra a ceea ce sunt astăzi. Mulţumesc în mod deosebit Dnei. Prof. Gabriela Boroica, pentru că m-a format şi m-a pregătit să intru în lumea matematicienilor.

Dincolo de cuvinte este recunoştinţa pe care o datorez familiei, părinţilor şi socrilor, care, prin îndelungă răbdare şi nenumărate sacrificii, contribuie activ la toate realizările mele profesionale. Îi sunt profund recunoscătoare şi îi mulţumesc din suflet mamei mele, că mi-a fost cea dintâi profesoară de matematică şi mi-a insuflat afecţiunea pentru această disciplină deosebită.

Păstrez pentru final cea mai frumoasă mulţumire, adresată soţului meu Ilie, pentru devotamentul, sprijinul şi dragostea cu care m-a înconjurat mereu.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Scopul acestui capitol este de a furniza terminologia, conceptele de bază şi notaţiile din teoria punctului fix, folosite în această teză.

Marea majoritate a materialului cuprins este preluat din monografia dlui prof. univ. dr. V. Berinde [**22**], intitulată "Iterative Approximation of Fixed Points".

De asemenea, au fost utilizate şi alte resurse bibliografice: [**1**], [**6**], [**48**], [**50**], [**52**], [**85**], [**86**].

1. Noţiuni generale din teoria punctului fix

Fie X o mulţime nevidă şi un operator $T : X \to X$. Vom spune că $x \in X$ este un puct fix al lui T, dacă

$$T(x) = x,$$

şi vom nota cu F_T sau $Fix(T)$ mulţimea tuturor punctelor fixe ale lui T.

Pentru oricare $x \in X$ dat, definim $T^n(x)$ în mod inductiv, prin

$$T^0(x) = x, \quad T^{n+1}(x) = T\left(T^n(x)\right),$$

şi numim *iterata de ordin n a lui x pentru operatorul T*. Pentru simplificarea notaţiilor, vom utiliza Tx în loc de $T(x)$.

Pentru oricare $x_0 \in X$, şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ definit prin

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, ...,$$

se numeşte *şirul aproximaţiilor succesive cu valoarea iniţială x_0*. Acesta este cunoscut, de asemenea, ca fiind *iteraţia Picard* pornind de la x_0.

Pentru un operator dat, sunt adevărate următoarele proprietăţi:

(1) $F_T \subset F_{T^n}$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$;

(2) $F_{T^n} = \{x\}$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow F_T = \{x\}$.

Teoria punctului fix se concentrează asupra condiţiilor cu care trebuie înzestrată mulţimea X, cât şi asupra proprietăţilor operatorului $T : X \to X$, în scopul obţinerii de rezultate privind:

(1) existenţa şi unicitatea punctelor fixe;
(2) dependenţa de date a punctelor fixe;
(3) construcţia punctelor fixe.

Mulţimea X utilizată în teoria punctului fix acoperă o mare varietate de spaţii, cum ar fi: latice, spaţiu metric, spaţiu liniar normat, spaţiu metric generalizat, spaţiu uniform, spaţiu liniar topologic etc., în timp ce condiţiile impuse operatorului T sunt, în general, condiţii metrice sau condiţii de compacticitate.

Următoarea teoremă este metoda clasică a aproximaţiilor succesive şi este de o importanţă fundamentală în teoria punctului fix. Aceasta se numeşte *Principiul contracţiei*, sau *Teorema lui Banach*, sau *Teorema lui Picard-Banach*, respectiv *Teorema lui Picard-Banach-Caccioppoli.*

Teorema 1.1. ***(Principiul contracţiei)*** *Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi o contracţie dată $T : X \to X$.*

Atunci, T are un punct fix unic p, iar

$$T^n(x) \to p \ (\ \textit{pentru} \ \ n \to \infty\ ), \quad \forall x \in X.$$

Există diferite generalizări ale acestui principiu, obţinute aproximativ în două moduri:

(1) prin slăbirea proprietăţilor de contracţie ale operatorului şi, eventual, în compensare, înzestrând spaţiul cu o structură suficient de bogată;
(2) prin extinderea structurii spaţiului ambiental.

Pe de altă parte, diverse teoreme de punct fix au fost obţinute prin combinarea acestor două metode sau prin adăugarea altora.

Pentru a demonstra diferite teoreme de convergenţă, vom utiliza câteva rezultate elementare bazate pe inegalităţi recurente, cum ar fi următoarele leme:

Lema 1.1. *Fie $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, două şiruri de numere nenegative şi constanta h, $0 \leq h < 1$, astfel încât*

$$a_{n+1} \leq h a_n + b_n, \quad n \geq 0.$$

- *Dacă* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

Lema 1.2. *Fie* $\{\epsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, *un şir de numere reale nenegative. Atunci,*

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} k^{n-i}\epsilon_i = 0, \quad k \in [0,1)\,.$$

Se presupune că Jungck a fost primul cercetător care a pus comutativitatea în conexiune cu rezultatele de punct fix, vezi [**51**].

Definiţia 1.1. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric iar* $S,\ T : X \to X$, *doi operatori. Vom spune că* S *şi* T *comută dacă*

$$STx = TSx, \quad \forall\ x \in X.$$

Ca o generalizare a acestei noţiuni, Sessa [**85**] defineşte S şi T ca fiind *slab comutativi* dacă

$$d(STx, TSx) \le d(Sx, Tx), \quad \forall\ x \in X.$$

Există diverse alte concepte care slăbesc noţiunea de operatori comutativi folosită pentru stabilirea teoremelor de punct fix comun. În cazul nostru, vom avea nevoie de următorul concept definit de către Jungck [**52**].

Definiţia 1.2. *Fie un spaţiu metric* (X, d) *iar* $S,\ T : X \to X$ *sunt doi operatori. Vom spune că* S *şi* T *sunt compatibili, ca o generalizare a comutativităţii slabe, dacă*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0,$$

atunci când $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *este un şir în* X, *astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \quad t \in X.$$

Jungck [**52**] a demonstrat, de asemenea, că noţiunea de comutativitate implică o comutativitate slabă care, la rândul ei, implică proprietatea de compatibilitate, însă reciproca nu este în general valabilă.

Definiţia 1.3. *Un element* $x \in X$ *se numeşte punct de coincidenţă al unei perechi de operatori* $S, T : X \to X$, *dacă există* $u \in X$, *numit de obicei punct al coincidenţei în* X, *astfel încât* $u = Sx = Tx$.

Mai mult, Jungck [**50**] defineşte S şi T ca fiind *slab compatibile* dacă acestea comută în punctele lor de coincidenţă, respectiv, dacă

$$Sz = Tz \quad \Rightarrow \quad STz = TSz, \quad z \in X.$$

Jungck [**52**] a stabilit şi incluziunile dintre aceste noţiuni, respectiv faptul că proprietatea de *comutativitate* implică proprietatea de *comutativitate slabă* care, la rândul ei, implică proprietatea de *compatibilitate* care implică proprietatea de *compatibilitate slabă*, iar reciprocele acestora nu sunt în general valabile.

Pe de altă parte, Aamri şi Moutawakil [**1**] au introdus o noţiune independentă de noţiunea de compatibilitate, după cum urmează.

Definiţia 1.4. *Operatorii S şi T satisfac proprietatea (E.A), dacă există un şir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$, astfel încât*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t, \quad t \in X.$$

2. Metode iterative de punct fix

Fie un spaţiu metric (X, d), o submulţime închisă $D \subset X$ a lui X (de obicei, $D = X$) şi $T : D \to D$ un operator cu cel puţin un punct fix $p \in F_T$. Pentru $x_0 \in X$ dat, vom considera şirul de iteraţii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ determinat cu ajutorul metodei aproximaţiilor succesive

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n = 1, 2, ... \tag{2.1}$$

După cum am menţionat deja, şirul definit prin (2.1) este cunoscut ca fiind *şirul aproximaţiilor succesive* sau, simplu, *iteraţia Picard*.

Se pare că iteraţia Picard a fost introdusă de către Liouville [**56**] şi apoi utilizată de Cauchy. Pentru prima dată, aceasta a fost dezvoltată sistematic de către Picard [**69**] în cadrul bine-cunoscutului rezultat privind existenţa şi unicitatea soluţiei problemelor cu valori iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale ordinare, datând din anul 1890.

Atunci când condiţiile de contracţie impuse asupra operatorului T sunt uşor slăbite, iteraţia Picard nu converge la punctul fix al operatorului T, prin urmare, trebuie luate în considerare alte metode iterative.

CAPITOLUL 2

Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definite în mod explicit

Acest capitol prezintă conceptul de stabilitate a metodelor iterative de punct fix şi trece în revistă cele mai importante contribuţii în acest domeniu.

Conceptul de stabilitate este fundamental în multe domenii matematice, precum Ecuaţiile Diferenţiale, Ecuaţiile cu Diferenţe, Sistemele Dinamice, Analiza Numerică etc. În cazul nostru, domeniul de interes este teoria stabilităţii în Sistemele Dinamice Discrete.

În acest context, unul dintre conceptele de stabilitate folosite în lucrare este cel considerat de către Harder [**44**], Harder şi Hicks [**45**], [**46**], care au studiat în mod sistematic această problemă.

Stabilitatea iteraţiei Picard pentru problema de punct fix în spaţii metrice a fost studiată pentru prima dată de către Ostrowski [**66**]. Rezultatele obţinute au fost ulterior dezvoltate de Harder şi Hicks [**46**] iar apoi, acest subiect a devenit un interes de cercetare pentru diverşi autori.

O astfel de extindere a fost realizată de către Berinde [**22**], care a introdus un concept mai slab şi mai natural al stabilităţii, numit *stabilitate slabă*, prin adoptarea noţiunii de şir aproximant în locul celei de şir arbitrar, în cadrul definiţiei stabilităţii. Urmând acest concept, noi am continuat studiul problemei stabilităţii slabe pentru metode iterative de punct fix comun, pentru anumite clase de operatori de contracţie.

Contribuţiile originale ale acestui capitol sunt: Definiţia 5.9, Teorema 4.4, Teorema 4.5, Exemplele 6.2-6.4, Exemplul 6.5, Exemplul 6.6, Definiţia 7.11 şi Teorema 7.7.

Majoritatea acestora au fost publicate în [**94**] (Timiş, I., *On the weak stability of fixed point iterative methods*, lucrare prezentată la ICAM7, Baia Mare, 1-4 Sept. 2010), [**95**] (Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 37 (2) (2010), 106-114), [**96**] (Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings and coincidence theorems*, International Journal of Computer Applications 37 (4) (2012), 9-13) şi [**105**] (Timiş, I. and Berinde, V., *Weak stability of iterative procedures for some coincidence theorems*, Creative Math. Inform. 19 (2010), 85-95).

1. Stabilitatea metodelor iterative de punct fix

În mod intuitiv, o metodă iterativă de punct fix este numeric stabilă dacă, *micile* modificări ale valorilor iniţiale sau ale datelor implicate în procesul de calcul vor avea o influenţă *mică* asupra valorii calculate a punctului fix.

Fie un spaţiu metric (X, d). Vom defini o metodă iterativă de punct fix cu ajutorul unei relaţii generale de forma

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0, 1, ...,$$

considerând faptul că $f(T, x_n)$ conţine toţi parametrii care definesc metoda iterativă respectivă, unde $T : X \to X$ este un operator iar $x_0 \in X$. Avem $F_T \neq \emptyset$ iar $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reprezintă un şir generat de metoda iterativă de punct fix care asigură convergenţa acesteia către punctul fix p al lui T.

În aplicaţii practice, pentru a calcula $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, de obicei se urmează aceşti paşi:

(1) Se alege valoarea iniţială $x_0 \in X$;

(2) Se calculează $x_1 = f\,(T, x_0)$, însă, datorită anumitor erori care apar în procesul de calcul, cum ar fi unele erori de rotunjire, aproximaţii numerice ale funcţiilor, derivate sau integrale etc., nu se obţine valoarea exactă a lui x_1, ci una diferită, numită y_1, care este, însă, suficient de apropiată de x_1, respectiv, $y_1 \approx x_1$;

(3) În consecinţă, atunci când se calculează $x_2 = f\,(T, x_1)$, de fapt se calculează valoarea lui x_2 sub forma $x_2 = f\,(T, y_1)$ şi atunci, în locul valorii teoretice a lui x_2, se obţine o altă valoare, numită y_2, care este, din nou, foarte apropiată dar totuşi diferită de punctul x_2, respectiv, $y_2 \approx x_2$, ş.a.m.d.

În acest mod, în locul şirului teoretic $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit cu ajutorul metodei iterative de punct fix date, se obţine, practic, un şir aproximant $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vom considera că metoda iterativă de punct fix dată este numeric **stabilă** dacă şi numai dacă, pentru y_n suficient de aproape de x_n în cadrul fiecărei etape de calcul, şirul aproximant $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ totuşi converge la punctul fix al lui T.

Pornind de la această idee, Harder [**44**] a introdus următorul concept de stabilitate.

Definiţia 1.5. [**44**] *Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$. Fie $x_0 \in X$ şi presupunem că şirul generat de metoda iterativă*

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.2}$$

converge la punctul fix p al lui T.

Fie $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ un şir arbitrar în X şi definim

$$\epsilon_n = d(y_{n+1}, f(T, y_n)), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Vom spune că metoda iterativă de punct fix (1.2) este T-stabilă sau stabilă în raport cu T, dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} y_n = p.$$

2. Stabilitatea metodelor iterative de punct fix comun

Conceptul de stabilitate a metodelor iterative de punct fix comun pentru perechi de operatori (S, T) cu puncte de coincidenţă a fost introdus de către Singh, Bhatnagar şi Mishra [**87**].

Pentru o mulţime arbitrară nevidă X, fie spaţiul metric (X, d).

Fie doi operatori $S, T : X \to X$, astfel încât $T(X) \subseteq S(X)$. Pentru orice $x_0 \in X$, considerăm metoda iterativă de punct fix comun introdusă de Jungck [**51**], respectiv

$$Sx_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Metoda iterativă de punct fix comun devine iteraţia Picard atunci când $S = I$, operatorul identic în X.

Jungck [**51**] a arătat că operatorii S şi T care satisfac

$$d(Tx, Ty) \leq kd(Sx, Sy), \quad 0 \leq k < 1, \quad \forall x, y \in X, \tag{2.3}$$

au un punct fix comun în X, datorită faptului că S şi T comută, $T(X) \subseteq S(X)$ iar S este continuu.

Următoarea versiune importantă a acestui rezultat este numită în general Principiul contracţiei al lui Jungck, fiind obţinut de către Singh şi Prasad [**88**].

Teorema 2.2. [**88**] *Fie un spaţiu metric* (X, d) *şi doi operatori* $S, T : X \to X$ *care satisfac (2.3). Dacă* $T(X) \subseteq S(X)$ *iar* $S(X)$ *sau* $T(X)$ *este un subspaţiu complet al lui* X*, atunci* S *şi* T *au un punct de coincidenţă.*

Pentru orice $x_0 \in X$*, există un şir* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *în* X*, astfel încât* $Sx_{n+1} = Tx_n$*,* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Presupunem că* $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge la* Sz*, pentru un* z *în* X *iar* $Sz = Tz = u$*, respectiv, punct al coincidenţei lui* S *şi* T*.*

Dacă S *şi* T *comută doar în punctul* z*, atunci* S *şi* T *au un unic punct fix comun.*

Definiţia 2.6. [**88**] *Fie un spaţiu metric* (X, d) *şi doi operatori* $S,\ T : X \to X$*. Fie* z *un punct de coincidenţă al lui* T *şi* S*, respectiv,* $Sz = Tz = u$*.*

Pentru orice $x_0 \in X$*, considerăm şirul* $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ *generat de metoda iterativă*

$$Sx_{n+1} = Tx_n, \quad n = 1, 2, ..., \tag{2.4}$$

şi presupunem că acesta converge la $u \in X$*. Fie şirul arbitrar* $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ *şi definim* $\epsilon_n = d(Sy_{n+1}, Ty_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Atunci, metoda iterativă 2.4 este (S, T)*-stabilă sau stabilă în raport cu* (S, T)*, dacă şi numai dacă* $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} Sy_n = u$.

Anumiţi autori denumesc (2.4) ca fiind metoda iterativă de punct fix comun a lui Jungck.

Definiţia 2.6 se reduce la definiţia stabilităţii metodelor iterative de punct fix a lui Harder şi Hicks [**45**], [**46**], când $S = I$, operatorul identic în X.

Pentru mai multe exemple privind aspectul practic şi importanţa teoretică a stabilităţii în cazul în care S este operatorul identic în X, din definiţia anterioară, vezi Berinde [**22**].

3. Câteva studii asupra stabilităţii

După cum am menţionat în paragraful 1, primul rezultat de stabilitate pentru proceduri iterative de punct fix a fost obţinut de Ostrowski [**66**].

Harder [**44**] a introdus conceptul de stabilitate pentru procese generale de punct fix, realizând un studiu sistematic şi obţinând rezultate de stabilitate care extind teorema lui Ostrowski şi pentru cazul operatorilor care satisfac condiţii de contracţie mai generale.

Harder şi Hicks [**46**] au demonstrat stabilitatea unor variate metode iterative, utilizând operatori T care satisfac diferite condiţii de contracţie. Rhoades [**78**] a extins unele dintre rezultatele lui Harder şi Hicks [**46**] înspre noi definiţii de contracţie, obţinând teoreme de stabilitate pentru metode iterative suplimentare de punct fix.

Mai mult, Rhoades [**79**] a continuat cercetarea stabilităţii prin utilizarea unei condiţii mai generale decât condiţiile de contracţie studiate de Harder şi Hicks [**46**]: pentru un spaţiu liniar normat $(E, \|\cdot\|)$ şi un operator $T : E \to E$, există o constantă C, $0 \le C < 1$, astfel încât, pentru fiecare $x, y \in E$,

$$\|Tx - Ty\| \le CM(x, y), \tag{3.5}$$

unde

$$M(x,y) := \max\left\{\|x-y\|, \frac{\|x-Tx\| + \|y-Ty\|}{2},\right.$$
$$\left.\|x-Ty\|, \|y-Tx\|\right\},$$

obţinând rezultate de stabilitate care reprezintă generalizări şi extensii ale numeroaselor rezultate obţinute de Harder şi Hicks [**46**] şi Rhoades [**78**]. De asemenea, Osilike [**64**] a continuat studiul stabilităţii metodelor iterative de punct fix, pentru cazul operatorilor care satisfac condiţia (3.5).

4. Rezultate de stabilitate pentru iteraţii de punct fix comun, folosind anumite clase de operatori contractivi

Fie un spaţiu metric (X, d), $Y \subset X$ şi doi operatori $S, T : Y \to X$ care satisfac următoarea condiţie de contracţie: $\exists q \in (0, 1)$, astfel încât

$$d(Tx, Ty) \le qd(Sx, Sy), \quad \forall\ x, y \in Y. \tag{4.6}$$

Goebel [**43**] a arătat că S şi T au un punct de coincidenţă în X (vezi Buică [**33**]) iar apoi Jungck [**50**] a demonstrat că operatorii S şi T care satisfac (4.6) au un unic punct fix comun în spaţiul metric complet (X, d), datorită faptului că:

(1) $T(X) \subseteq S(X)$;
(2) S este continuu;
(3) S şi T comută.

Următoarea teoremă este o versiune extinsă a Principiului de contracţie al lui Jungck [**50**] şi a fost obţinut de Singh şi Prasad [**88**].

Teorema 4.3. [**88**] *Fie un spaţiu metric (X, d), Y o submulţime a lui X şi doi operatori $S, T : Y \to X$ care satisfac condiţia (4.6).*

Dacă $T(Y) \subseteq S(Y)$, $S(Y)$ sau $T(Y)$ este un subspaţiu complet al lui X, atunci S şi T au un punct de coincidenţă (adică, există $z \in Y$, astfel încât $Sz = Tz$).

Mai mult, pentru orice $x_0 \in Y$, există un şir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ în Y, astfel încât

(1) $Sx_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...,$

(2) $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la Sz, pentru un punct de coincidenţă z din Y.

În plus, dacă $Y = X$, S şi T comută (doar) în z, atunci S şi T au un unic punct fix comun, respectiv, $Sz = Tz = z$.

Pornind de la rezultatele de stabilitate obţinute de Singh şi Prasad [**88**], am studiat problema stabilităţii unor metode iterative de punct fix comun, pentru anumite clase de operatori de contracţie.

După cum am arătat anterior, definiţia (S, T)-stabilităţii proceselor iterative utilizată în [**88**] se bazează pe alegerea unui şir *arbitrar* $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty}$. Însă, conform rezultatelor obţinute de Berinde [**22**], nu este natural să se considere un şir arbitrar în Definiţia 2.6, deoarece, în acest mod, problema stabilităţii nu este tratată în contextul său general.

În acest sens, principalul nostru rezultat de stabilitate este dat de următoarea teoremă, care completează Teorema 4.3 cu rezultatul privind (S, T)-stabilitatea iteraţiei lui Jungck.

Teorema 4.4. *(**Timiş**, [**105**]) Fie un spaţiu metric (X, d), Y o submulţime a lui X şi doi operatori $S, T : Y \to X$ care satisfac*

$$d(Tx, Ty) \leq qd(Sx, Sy), \ \forall x, y \in Y, \ q \in [0, 1). \tag{4.7}$$

Dacă $T(Y) \subseteq S(Y)$ şi $S(Y)$ este un subspaţiu metric complet al lui X, atunci S şi T au un unic punct de coincidenţă (adică, există $z \in Y$, astfel încât $Sz = Tz = u$.).

Mai mult, pentru orice $x_0 \in Y$, există un şir $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty} \in Y$ astfel încât

(i) $Sx_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...,$

(ii) $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la u.

Fie un şir aproximant $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty} \subset Y$ al lui $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ şi definim

$$\epsilon_n = d(Sy_{n+1}, Ty_n), \ n = 0, 1, 2, ...$$

Atunci,

(1) $d(u, Sy_{n+1}) \leq d(u, Sx_{n+1}) + q^{n+1}d(Sx_0, Sy_0) + \sum_{r=0}^{n} q^{n-r}\epsilon_r$;

(2) $\lim_{n\to\infty} Sy_n = u$, *dacă şi numai dacă* $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, *adică, iteraţia este* (S, T)*-stabilă.*

Observaţia 4.1. ***Cazuri particulare ale Teoremei 4.4.***

(1) *Dacă* $Y = X$, *atunci din Teorema 4.4 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Principiul contracţiei al lui Jungck, vezi Singh şi Prasad* [**88**].

(2) *Dacă* $Y = X$ *şi* $S = I$, *operatorul identic în* X, *atunci din Teorema 4.4 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Principiul contracţiei al lui Banach, vezi Ostrowski* [**66**], *Harder şi Hicks* [**46**].

Teorema 4.5. *(**Timiş**,* [**105**]*) Fie un spaţiu metric* (X, d), Y *o submulţime a lui* X *şi doi operatori* $S, T : Y \to X$ *care satisfac*

$$d(Tx, Ty) \leq qd(Sx, Sy) + Ld(Sx, Tx), \ \forall x, y \in Y, \ q \in (0, 1), \ L \geq 0. \tag{4.8}$$

Dacă $T(Y) \subseteq S(Y)$ *iar* $S(Y)$ *este un subspaţiu complet al lui* X, *atunci* S *şi* T *au un unic punct de coincidenţă (adică, există* $z \in Y$, *astfel încât* $Tz = Sz = u$*).*

Mai mult, pentru orice $x_0 \in Y$, *există un şir* $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty} \in Y$ *astfel încât*

(i) $Sx_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...,$

(ii) $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge la* u.

Fie un şir aproximant $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty} \subset Y$ *al lui* $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ *şi definim*

$$\epsilon_n = d(Sy_{n+1}, Ty_n), \ n = 0, 1, 2, ...$$

Atunci,

(1) $d(u, Sy_{n+1}) \leq d(u, Sx_{n+1}) + q^{n+1}d(Sx_0, Sy_0) + L\sum_{r=0}^{n} q^{n-r}d(Sx_r, Tx_r) + \sum_{r=0}^{n} q^{n-r}\epsilon_r$;

(2) $\lim_{n\to\infty} Sy_n = u \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0.$

Observaţia 4.2. ***Cazuri particulare ale Teoremei 4.5.***

(1) *Dacă* $Y = X$, *atunci din Teorema 4.5 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Principiul contracţiei al lui Jungck, vezi Singh şi Prasad* [**88**].

(2) *Dacă* $Y = X$ *and* $S = I$, *operatorul identic în* X, *atunci din Teorema 4.5 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Principiul contracţiei al lui Banach, vezi Ostrowski* [**66**].

(3) *Dacă* $Y = X$ *and* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci din Teorema 4.5 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Kannan* [**53**]*, vezi Harder şi Hicks* [**46**].

(4) *Dacă* $Y = X$ *and* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci din Teorema 4.5 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Zamfirescu, adică Theorem 2 a lui Harder şi Hicks* [**46**].

(5) *Dacă* $Y = X$ *and* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci din Teorema 4.5 obţinem o extindere a rezultatului de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Chatterjea* [**35**].

5. Conceptul de stabilitate slabă a metodelor iterative de punct fix şi punct fix comun

În acest paragraf, vom analiza anumite rezultate de stabilitate slabă a metodelor iterative de punct fix existente în literatură iar apoi vom transpune acest concept perechilor de operatori cu un punct de coincidenţă.

Conceptul de (aproape) stabilitate nu este foarte precis datorită şirului $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ales în mod *arbitrar*. Din punct de vedere numeric, şirul $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ trebuie să fie unul *aproximant* pentru şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Adoptând acest concept de şiruri aproximante, Berinde [**22**] a introdus o noţiune mult mai naturală de stabilitate, numită *stabilitate slabă*. În acest caz, orice iteraţie stabilă va fi, de asemenea, slab stabilă iar reciproca nu este în general valabilă.

Definiţia 5.7. [**22**] *Fie un spaţiu metric* (X, d) *şi un şir dat* $\{x_n\}_{x=0}^{\infty} \subset X$*. Vom spune că* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in X$ *este un şir aproximant al lui* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dacă, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$*, există* $\eta = \eta(k)$*, astfel încât*

$$d(x_n, y_n) \leq \eta, \quad \forall\ n \geq k.$$

Observaţia 5.3. *Pot exista şiruri aproximante pentru şiruri convergente şi divergente, deopotrivă.*

Definiţia 5.8. [**22**] *Fie un spaţiu metric* (X, d) *şi un operator* $T : X \to X$*. Fie şirul de iteraţii* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$*, cu* $x_0 \in X$*, definit prin*

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n \geq 0.$$

Presupunem că $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *converge la punctul fix* p *al lui* T*. Dacă, pentru orice şir aproximant* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ *al lui* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$*,*

$$\lim_{n\to\infty} d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \quad \textit{implică} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = p,$$

atunci se poate spune că metoda iterativă este slab T*-stabilă sau slab stabilă în raport cu* T*.*

În exemplele ilustrative ale diverşilor autori care au studiat stabilitatea metodelor iterative de punct fix, nu erau utilizate şiruri aproximante pentru $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ pentru a arăta că iteraţiile de punct fix nu erau stabile.

Berinde [**22**] a prezentat în detaliu câteva exemple, tocmai pentru a arăta cât de importantă şi de naturală este restricţia conceptului de stabilitate la şiruri aproximante $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ pentru $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Exemplul 5.1. [**22**] *Fie* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, definit prin* $Tx = \frac{1}{2}x$*, unde* $\mathbb{R}$ *este înzestrat cu metrica obişnuită.* T *este o* $\frac{1}{2}$*-contracţie,* $F_T = \{0\}$*.*

Iteraţia Ishikawa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este* T*-stabilă, prin urmare, aceasta este aproape* T*-stabilă şi slab* T*-stabilă, de asemenea.*

Cu toate acestea, Osilike [**62**] *a afirmat că iteraţia Ishikawa nu este* T*-stabilă, folosind şirul* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *definit prin*

$$y_n = \frac{n}{1+n}, \ n \geq 0.$$

Însă, în mod evident, acest lucru nu este adevărat, deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, fiind unicul punct fix al lui* T*, în timp ce* $y_n \to 1$*, pentru* $n \to \infty$*, deci, prin construcţie,* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ar trebui să fie un şir aproximant al lui* $\{x_n\}$ *.*

Aşadar, utilizând şiruri arbitrare, iteraţia Ishikawa nu este T*-stabilă.*

În continuare, vom transpune conceptul de (S, T)-stabilitate utilizat de Singh şi Prasad [**88**], la (S, T)-slab stabilitate, în spaţii metrice.

Definiţia 5.9. *(**Timiş**,* [**105**]*) Fie un spaţiu metric* (X, d) *şi doi operatori* S*,* $T : X \to X$*, astfel încât* $T(X) \subseteq S(X)$*. Fie* z *un punct de coincidenţă a lui* S *şi* T*, adică, un punct pentru care* $Sz = Tz = u \in X$*.*

Pentru orice $x_0 \in X$*, fie şirul de iteraţii* $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$*, definit prin*

$$Sx_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 1, 2, ..., \tag{5.9}$$

şi presupunem că acesta converge la u.

Dacă pentru orice şir aproximant $\{Sy_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ al lui $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, avem că

$$\lim_{n\to\infty} d(Sy_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \quad \textit{implică} \quad \lim_{n\to\infty} Sy_n = u,$$

atunci putem spune că (5.9) este slab (S,T)-stabilă sau slab stabilă în raport cu (S,T).

6. Exemple de iteraţii de punct fix slab stabile dar care nu sunt stabile

Harder şi Hicks [**46**] au prezentat unele exemple de operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie iar iteraţiile de punct fix corespunzătoare acestora nu sunt stabile.

În continuare, vom considera câteva dintre aceste exemple, cu scopul de a studia stabilitatea slabă a metodelor iterative de punct fix asociate lor.

Vom prezenta, de asemenea, şi exemple de operatori cu un punct de coincidenţă care satisfac diverse condiţii de contracţie, pentru a studia stabilitatea acestora în raport cu (S,T).

Exemplul 6.2. ***(Timiş***, [**95**]*) Fie $T : [0,1] \to [0,1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. T este continuu în fiecare punct din $[0,1]$, exceptând $\frac{1}{2}$ iar T are un punct fix unic în $\frac{1}{2}$, vezi Harder şi Hicks [**46**].

După cum s-a arătat în [**46**]*, T satisface condiţia*

$$d(Tx,Ty) < \max\{d(x,Tx), d(y,Ty)\}, \quad \forall\, x,y \in X, \quad x \neq y.$$

Prin urmare, în ceea ce priveşte stabilitatea, am obţinut faptul că iteraţia Picard asociată acestui operator nu este T-stabilă şi nici T-slab stabilă.

Exemplul 6.3. ***(Timiş***, [**95**]*) Fie $T : [0,1] \to [0,1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. T este continuu în fiecare punct din $[0,1]$, cu excepţia lui $\frac{1}{2}$, iar 0 reprezintă unicul punct fix al lui T, vezi Harder şi Hicks [**46**].

Pntru orice $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, T satisface condiţia

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(x, Ty), d(y, Tx)\}.$$

Mai mult, în ceea ce priveşte stabilitatea, am obţinut faptul că iteraţia Picard nu este T-stabilă însă aceasta este T-slab stabilă.

Exemplul 6.4. *(**Timiş**, [**95**]) Fie $T : \mathbb{R} \to \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases},$$

*unde $\mathbb{R}$ este înzestrat cu metrica obişnuită. T este continuu în fiecare punct din $\mathbb{R}$, exceptând 0 şi $\frac{1}{2}$. Unicul punct fix al lui T este $\frac{1}{4}$, vezi Harder şi Hicks [**46**].*

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, T satisface condiţia

$$d(Tx, Ty) < \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}.$$

Mai mult, în ceea ce priveşte studiul stabilităţii, am obţinut că iteraţia Picard nu este T-stabilă însă aceasta este T-slab stabilă.

Exemplul 6.5. *(**Timiş**, [**96**]) Fie operatorii S, $T : [0,1] \to [0,1]$, definiţi prin*

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şi

$$Sx = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x - \frac{1}{4}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. S şi T sunt continui în fiecare punct din $[0,1]$, cu excepţia lui $\frac{1}{2}$, care reprezintă punctul lor de coincidenţă, respectiv, $T\left(\frac{1}{2}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = 0 = u$ şi $T([0,1]) = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \subseteq S([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Pentru orice $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, T şi S satisfac condiţia

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}.$$

Referitor la studiul stabilităţii, am obţinut faptul că iteraţia Picard nu este (S,T)-stabilă şi nici (S,T)-slab stabilă.

Exemplul 6.6. *(**Timiş**, [**96**]) Fie $S,\ T : [0,1] \to [0,1]$, definiţi prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şi

$$Sx = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ x - \frac{1}{4}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. S şi T au două puncte de coincidenţă, respectiv, $T(0) = S(0) = T\left(\frac{3}{4}\right) = S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} = u$ şi $T([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \subseteq S([0,1]) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Pentru orice $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, T şi S satisfac condiţia

$$d(Tx, Ty) < \max\{d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}.$$

În ceea ce priveşte studiul stabilităţii iteraţiei Picard, aceasta nu este (S,T)-stabilă şi nici (S,T)-slab stabilă.

7. Stabilitatea şi stabilitatea slabă a metodelor iterative de punct fix pentru operatori multivoci

Prin extinderea principiilor de contracţie de la operatori univoci către operatori multivoci, Nadler [**57**] a demonstrat faptul că o contracţie multivocă pe un spaţiu metric complet are punct fix. Ciric [**39**] a extins acest rezultat, pentru contracţii multivoce generalizate pe spaţii metrice.

Conceptul de contracţie slabă din cazul univoc a fost extins la operatori multivoci, obţinându-se teoreme de convergenţă corespunzătoare iteraţiei Picard asociate acestora. M. Berinde şi V. Berinde [**12**] au generalizat şi au unificat o multitudine de rezultate din teoria punctului fix existente în literatură, pentru operatori de contracţie univoci şi multivoci.

Pe de altă parte, Singh şi Chadha [**89**] au extins Teorema de stabilitate a lui Ostrowski, respectiv Teorema 7.6 din această lucrare, la operatori de contracţie multivoci, folosind Teorema lui Nadler şi introducând definiţia stabilităţi metodelor iterative de punct fix pentru operatori multivoci.

Definiţia 7.10. [**89**] *Se consideră un spaţiu metric X şi un operator $T : X \to P_{b,cl}(X)$. Fie $x_0 \in X$ şi $x_{n+1} \in Tx_n$, iteraţia Picard asociată operatorului T.*

Fie şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergent la punctul fix u al lui T, iar $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, un şir arbitrar. Definim $\epsilon_n = H(y_{n+1}, Ty_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Iteraţia Tx_n se numeşte T-stabilă, dacă

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \quad \textit{implică} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = u.$$

Primul rezultat de stabilitate pentru iteraţia Picard, în cazul operatorilor multivoci, se datorează lui Singh şi Chadha [**89**].

Teorema 7.6. [**89**] *Fie un spaţiu complet X şi un operator $T : X \to P_{b,cl}(X)$.*

Presupunem că există numărul pozitiv $q < 1$, astfel încât T satisface condiţia

$$H_d(Tx, Ty) \le q d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Fie un punct arbitrar x_0 în X şi presupunem că şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la punctul fix u al lui T.

Fie şirul $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ în X şi definim $\epsilon_n = H_d(y_{n+1}, Ty_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Dacă Tu are un singur element, atunci $\lim_{n\to\infty} y_n = u$, dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

Ulterior, Czerwik, Dlutek şi Singh [**41**] au studiat stabilitatea iteraţiei Picard pentru operatori multivoci în spaţii b-metrice. Mai mult, Singh, Bhatnagar şi Mishra [**86**] au obţinut o teoremă de punct fix pentru contracţii multivoce generalizate în spaţii b-metrice, studiind stabilitatea iteraţiei Picard asociate acestora.

În continuare, vom da un rezultat de stabilitate pentru operatori multivoci, care satisfac o aproape-contracţie.

Teorema 7.7. *(**Timiş**, [**104**]) Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi un operator $T : X \to P_{b,cl}(X)$, cu $SFix(T) \neq \phi$, care satisface*

$$H_d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x, y) + L \cdot D(x, Tx),$$

pentru orice $x, y \in X$, $q \in [0, 1)$ şi $L \geq 0$.

Fie şirul de iteraţii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin $x_0 \in X$ şi $x_{n+1} \in Tx_n$, pentru orice $n \geq 0$.

Presupunem că şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la x^*, unicul punct fix strict al lui T.

Atunci, iteraţia Picard este T-stabilă.

Observaţia 7.4. *Teorema 7.7 este o generalizare a Teoremei 7.6 a lui Singh şi Chadha* [**89**]*. Dacă luăm $L = 0$ în Teorema 7.7, se obţine rezultatul de stabilitate al Teoremei 7.6.*

După cum am precizat în paragraful 2 al acestui capitol, din punct de vedere numeric, conceptul de stabilitate slabă este mult mai natural decât cel considerat în [**41**], [**86**], [**89**] etc., datorită şirului ales în mod *arbitrar*. Aşadar, orice iteraţie stabilă va fi, de asemenea, slab stabilă iar reciproca nu este, în general, valabilă.

În continuare, vom face transpunerea Definiţiei 5.8 a stabilităţii slabe în raport cu T, către operatori multivoci.

Definiţia 7.11. *(**Timiş**, [**104**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator multivoc $T : X \to P_{b,cl}(X)$. Fie şirul de iteraţii $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin $x_0 \in X$ şi*

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n \geq 0.$$

Presupunem că şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge la punctul fix strict p al lui T. Dacă pentru orice şir aproximant $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ al lui $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,

$$\lim_{n\to\infty} H_d(y_{n+1}, f(T, y_n)) = 0 \quad \text{implică} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = p,$$

atunci iteraţia $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ este slab T-stabilă sau slab stabilă în raport cu T.

CAPITOLUL 3

Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definiţi în mod implicit

Recent, diverse teoreme de punct fix şi teoreme de punct fix comun au fost unificate, considerând condiţii generale de contracţie exprimate cu ajutorul unor relaţii implicite. Această dezvoltare a fost iniţiată de V. Popa [**70**], [**71**], [**72**] şi urmând modul respectiv de abordare, s-a realizat o parte consistentă a literaturii de specialitate din domeniul teoriei punctului fix, pentru operatori univoci şi multivoci, deopotrivă.

Pentru aceste noi teoreme de punct fix, neexistând studii corespunzătoare asupra stabilităţii, V. Berinde [**14**], [**24**] a obţinut rezultate de stabilitate pentru metode iterative de punct fix asociate operatorilor de contracţie definiţi în mod implicit.

Noi am continuat studiul stabilităţii iteraţiilor Picard şi Jungck, pentru puncte fixe comune şi puncte de coincidenţă, în cazul operatorilor de contracţie care satisfac anumite relaţii implicite, cu număr diferit de parametri.

Din moment ce o teoremă de punct fix comun în spaţii metrice, în general, implică anumite condiţii de comutativitate, multe studii în acest domeniu sunt axate pe relaxarea acestor condiţii. Evoluţia conceptelor de *comutativitate slabă* al lui Sessa [**85**] şi de *compatibilitate* al lui Jungck [**52**], a dezvoltat diverse condiţii mai slabe, pentru a extinde teoremele de punct fix comun.

Vom prezenta, de asemenea, un rezultat general de stabilitate pentru metodele iterative de punct fix comun de tip Jungck, în clasa operatorilor slab compatibili, definiţi cu ajutorul unei condiţii de contracţie implicite.

Rezultatele obţinute în acest capitol sunt generalizări ale teoremelor de punct fix şi ale teoremelor de stabilitate pentru iteraţia Picard existente în literatură: vezi Berinde [**15**], [**19**], [**22**], [**23**], [**25**], Chatterjea [**35**], Harder şi Hicks [**45**], [**46**], Hardy şi Rogers [**47**], Imoru şi Olatinwo [**49**], Jungck [**51**], Kannan [**53**], Olatinwo [**59**], Osilike [**64**], [**63**], Ostrowski [**66**], Popa [**71**], Reich [**74**], Reich şi Rus [**90**], Rhoades [**77**], [**78**], [**79**], Rus [**82**], [**83**], Zamfirescu [**106**], cât şi multe dintre referinţele acestora.

Contribuţiile originale din acest capitol sunt: Exemplul 1.8, Teorema 1.9, Corolarul 1.1, Corolarul 1.2, Teorema 2.10, Exemplele 3.12-3.13, Exemplul 3.15, Teorema 3.11, Corolarul 3.3 şi Corolarul 3.4.

Majoritatea acestora au fost publicate în [**97**] (Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for some contractive type mappings via implicit relations*, Miskolc Math. Notes 13 (2) (2012), 555-567), [**99**] (Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points şi contractive mappings via implicit relations*, lucrare prezentată la ICAM8, Baia Mare, 27-30 Oct. 2011) şi [**100**] (Timiş, I., *Stability of the Picard iterative procedure for mappings which satisfy implicit relations*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 19 (2012), no. 4, 37-44).

1. Stabilitatea metodelor iterative de punct fix pentru operatori de contracţie definiţi prin relaţii implicite

V. Berinde [**24**] a obţinut un rezultat general de stabilitate în cazul iteraţiei Picard, pentru operatori care satisfac o relaţie implicită cu şase parametri, utilizând mulţimea tuturor funcţiilor reale continue $F : \mathbb{R}^6_+ \to R_+$ introduse de V. Popa [**71**], [**72**], care satisfac următoarele condiţii:

(F_{1a}) F este descrescătoare în cea de-a cincea variabilă şi
$F(u, v, v, u, u + v, 0) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;

(F_{1b}) F este descrescătoare în cea de-a patra variabilă şi
$F(u, v, 0, u + v, u, v) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;

(F_{1c}) F este descrescătoare în cea de-a treia variabilă şi
$F(u, v, u + v, 0, v, u) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;

(F_2) $F(u, u, 0, 0, u, u) > 0$, pentru orice $u > 0$.

Teorema 1.8. [**24**] *Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi un operator $T : X \to X$ pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, $\forall\ x, y \in X$,*

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\right) \leq 0.$$

Dacă F satisface (F_{1a}) şi (F_2), atunci T are un punct fix unic.

Mai mult, dacă F satisface şi (F_{1b}), atunci iteraţia Picard este: a) T-stabilă; b) aproape sumabil T-stabilă.

În continuare, vom studia stabilitatea iteraţiei Picard pentru operatori care satisfac o relaţie implicită, reducând numărul parametrilor la cinci.

Popa [**70**] a introdus mulţimea tuturor funcţiilor reale continue $F : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, care satisfac următoarele condiţii:

(1) F este continuu în fiecare variabilă;

(2) există $h \in [0, 1)$, astfel încât, pentru orice $u, v, w \geq 0$, care satisface
- (2a) $F(u, v, u, v, w) \leq 0$, sau
- (2b) $F(u, v, v, u, w) \leq 0$,

avem că $u \leq h \max\{v, w\}$.

Iată câteva exemple de funcţii care satisfac unele dintre aceste condiţii:

Exemplul 1.7. [**22**] *Fie* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, *pentru care*

(1) $F(t_1, ..., t_5) = t_1 - at_2, \quad a \in [0, 1)$;

(2) $F(t_1, ..., t_5) = a \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}, \quad a \in [0, 1)$;

(3) $F(t_1, ..., t_5) = a \max\left\{t_1, t_2, t_3, t_4, \frac{t_4+t_5}{2}\right\}, \quad a \in [0, 1)$;

(4) $F(t_1, ..., t_5) = a(t_2 + t_3), \quad a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$;

(5) $F(t_1, ..., t_5) = at_1 + b(t_2 + t_3), \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad a + 2b < 1$;

(6) $F(t_1, ..., t_5) = a \max\{t_2, t_3\}, \quad a \in (0, 1)$;

(7) $F(t_1, ..., t_5) = \left(\sum_{i=1}^5 a_i t_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad a_i \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{i=1}^5 a_i < 1, \quad p \geq 1$;

(8) $F(t_1, ..., t_5) = \max\{at_1, b(t_2 + t_4), c(t_3 + t_5)\}, \ a \in [0, 1), \quad b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Exemplul 1.8. *(**Timiş**, [**100**]) Definim* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, *pentru care*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - ct_2 - t_5, \quad c \in [0, \frac{1}{2}).$$

Un rezultat general de stabilitate pentru iteraţia Picard:

Teorema 1.9. *(**Timiş**, [**100**]) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi un operator* $T : X \to X$, *cu* $Fix(X) \neq \emptyset$, *pentru care există* $F \in \mathbb{F}$, *astfel încât*, $\forall\ x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}\right) \leq 0. \tag{1.10}$$

Dacă F *satisface (2a), atunci*

(1) p *este punct fix unic în* X;

(2) iteraţia Picard este T*-stabilă.*

Corolar 1.1. *(**Timiş**, [**100**]) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi un operator* $T : X \to X$, *cu* $Fix(X) \neq \emptyset$, *pentru care există* $F \in \mathbb{F}$, *astfel încât*, $\forall\ x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}\right) \leq 0.$$

Dacă F satisface (2a), atunci

(1) p este punct fix unic în X;

(2) iteraţia Picard corespunzătoare Teoremei de punct fix obţinută de Reich [**75**] *şi Rus* [**83**] *(vezi Taskovic* [**90**]*) este T-stabilă.*

Corolar 1.2. ***(Timiş***, [**100**]*) Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi un operator $T : X \to X$, cu $Fix(X) \neq \emptyset$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, $\forall\ x, y \in X$,*

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}\right) \leq 0.$$

Dacă F satisface (2a), atunci

(1) p este punct fix unic în X;

(2) iteraţia Picard corespunzătoare Teoremei de punct fix obţinută de Bianchini [**28**] *şi Dugundij (1976) (vezi Rus* [**83**]*) este T-stabilă.*

Observaţia 1.5. ***Alte cazuri particulare importante:***

(1) Dacă F este definit prin Exemplul 1.7 (1), atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Principiul contracţiei al lui Banach, vezi Ostrowski [**66**].

(2) Dacă F este definit prin Exemplul 1.7 (2), atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Ciric [**37**]*, vezi Harder şi Hicks* [**46**].

(3) Dacă F este definit prin Exemplul 1.7 (4), atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Kannan [**53**]*, vezi Harder şi Hicks* [**46**].

(4) Dacă F este definit prin Exemplul 1.7 (8), atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Zamfirescu, adică, Teorema 2 a lui Harder şi Hicks [**46**].

(5) Dacă F este definit prin Exemplul 1.8, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Reich, adică, Teorema 3 a lui Reich [**76**].

Observaţia 1.6. *Condiţiile de contracţie obţinute din relaţia (1.10), cu F definit prin exemplele anterioare, implică anumite condiţii de contracţie utilizate de Rhoades* [**77**], [**78**], [**79**] *şi mai mult, acestea conduc la rezultate de stabilitate pentru alte bine-cunoscute teoreme de punct fix din literatură.*

2. Stabilitatea metodelor iterative de punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori de contracţie care satisfac relaţii implicite cu şase parametri

V. Popa [**71**], [**72**] a introdus, de asemenea, mulţimea tuturor funcţiilor reale continue $F : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, care satisfac condiţiile:

(1) (a) F este descrescătoare în cea de-a cincea variabilă şi $F(u, v, v, u, u+v, 0) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât, $u \geq hv$;
(b) F is descrescătoare în cea de-a patra variabilă şi $F(u, v, 0, u+v, u, v) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât, $u \geq hv$;
(c) F is descrescătoare în cea de-a treia variabilă şi $F(u, v, u+v, 0, v, u) \leq 0$, pentru $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât, $u \geq hv$;

(2) $F(u, u, 0, 0, u, u) > 0$, pentru orice $u > 0$.

Iată câteva exemple de funcţii care satisfac unele dintre aceste condiţii:

Exemplul 2.9. [**72**] *Fie* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, *pentru care*

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - k \max\{t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}(t_5 + t_6)\}, \quad k \in (0, 1).$$

Exemplul 2.10. [**72**] *Fie* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, *pentru care*

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - b(t_3 + t_4), \quad b \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Exemplul 2.11. [**72**] *Fie* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, *pentru care*

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - c(t_5 + t_6), \quad c \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Imdad şi Ali [**48**] au obţinut o teoremă generală de punct fix comun pentru o pereche de operatori care satisfac condiţii implicite definite de Popa [**71**], [**72**].

Pornind de la rezultatele obţinute în [**48**], am continuat studiul stabilităţii metodelor iterative de punct fix comun, după cum urmează:

Teorema 2.10. *(**Timiş**, [**98**]) Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi doi operatori $S, T : X \to X$, astfel încât:*

- *T şi S satisfac proprietatea (E.A);*

- *$\forall x, y \in X$, există $F \in \mathbb{F}$,*

$$F\left(d(Tx,Ty), d(Sx,Sy), d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), d(Sx,Ty), d(Sy,Tx)\right) \leq 0, \tag{2.11}$$

- *$S(X)$ este un subspaţiu complet al lui X.*

Atunci

(i) perechea (T, S) are un punct de coincidenţă;

(ii) perechea (T, S) are un unic punct fix comun, cât timp perechea (T, S) este slab compatibilă;

(iii) dacă, în plus, F satisface (1b), atunci iteraţia de punct fix asociată este (S, T)-stabilă.

Observaţia 2.7. ***Cazuri particulare:***

(1) Dacă F este definit prin Exemplul 2.9, din Teorema 2.10 se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Ciric [**38**].

(2) Dacă F este definit prin Exemplul 2.10, din Teorema 2.10 se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Kannan [**53**].

(3) Dacă F este definit prin Exemplul 2.11, din Teorema 2.10 se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Chatterjea [**35**].

Observaţia 2.8. *Teorema 2.10 oferă un rezultat de stabilitate pentru iteraţia de punct fix comun corespunzătoare Teoremei 3.1 din* [**48**].

3. Stabilitatea metodelor iterative de punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori de contracţie care satisfac relaţii implicite cu cinci parametri

Din categoria funcţiilor implicite definite de Popa [**70**], [**71**], [**72**], vom considera mulţimea tuturor funcţiilor reale continue $F : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, care satisfac următoarele condiţii:

(1) F este continuu în fiecare variabilă;

(2) există $h \in [0, 1)$, astfel încât, $\forall u, v, w \geq 0$, sunt satisfăcute condiţiile
- (2a) $F(u, v, u, v, w) \leq 0$, sau
- (2b) $F(u, v, v, u, w) \leq 0$,

atunci avem că $u \leq h \max\{v, w\}$;

(3) $F(u, u, u, u, 0) > 0$, pentru orice $u > 0$.

În continuare, vom prezenta câteva exemple de funcţii care depind de cinci parametri şi care satisfac anumite condiţii anterioare.

Exemplul 3.12. *(**Timiş**, [97]) Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - kt_5,$$

unde $k \in (0, 1)$, care satisface (1),(2a),(2b) şi (3), cu $h = k$.

Exemplul 3.13. *(**Timiş**, [97]) Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - at_2 - bt_5,$$

unde $a, b \in (0, 1)$, $a + 2b < 1$, care satisface (1), (2a), (2b) şi (3), pentru care $h = a$, dacă $\max\{v, w\} = v$, sau $h = b$, dacă $\max\{v, w\} = w$.

Exemplul 3.14. [70] *Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - a(t_3 + t_4),$$

unde $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, care satisface (1), (2a), (2b) şi (3), pentru care $h = \frac{a}{1-a} \in (0, 1)$.

Exemplul 3.15. *(**Timiş**, [97]) Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - at_2 - bt_3 - ct_4 - dt_5,$$

unde $a, b, c, d \in [0, 1)$, $a + b + c + 2d < 1$, care satisface (1), (2a) pentru $h = \frac{a+c}{1-b} \in [0, 1)$, (2b) pentru $h = \frac{a+b}{1-c} \in [0, 1)$, şi (3), unde $h = \frac{a+c}{1-b} \in [0, 1)$, dacă $\max\{v, w\} = v$, sau $h = \frac{a+b}{1-c} \in [0, 1)$, dacă $\max\{v, w\} = w$.

Exemplul 3.16. [68] *Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - a \max\left\{t_2, \frac{t_3 + t_4}{2}, t_5\right\},$$

unde $a \in [0, 1)$, care satisface (1), (2a), (2b) şi (3), dacă $\max = t_2$, sau $\max = t_5$, atunci $h = a$, iar dacă $\max = \frac{t_3+t_4}{2}$, atunci $h = \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}}$.

Exemplul 3.17. [70] *Fie funcţia $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1 - c \max\{t_2, t_3, t_4, t_5\},$$

unde $h = c \in [0, 1)$, care satisface (1) şi (3), dacă $\max = t_2$, $\max = t_4$, sau $\max = t_5$, atunci este satisfăcută relaţia (2a), iar dacă $\max = t_3$, atunci este satisfăcută relaţia (2b).

Exemplul 3.18. [**70**] *Fie funcţia* $F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$F(t_1, ..., t_5) = t_1^2 - c \max \left\{ t_2 t_3, t_2 t_4, t_3 t_4, t_5^2 \right\},$$

unde $c \in [0, 1)$, *care satisface (1), (2a) şi (3), pentru care* $h = c$.

Cu ajutorul Teoremei de punct fix comun a lui Imdad şi Ali [**48**], am obţinut următorul rezultat general de stabilitate pentru metoda iterativă de punct fix de tip Jungck, folosind operatori slab compatibili care satisfac proprietatea (E.A) şi sunt definiţi cu ajutorul unei contracţii implicite.

Teorema 3.11. *(**Timiş**, [**97**]) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi doi operatori* $S, T : X \to X$, *astfel încât* T *şi* S *satisfac proprietatea (E.A) iar* $S(X)$ *este un subspaţiu complet al lui* X.

Presupunem că există $F \in \mathbb{F}$, *astfel încât,*

(3.12)
$$F\left(d(Tx, Ty), d(Sx, Sy), d(Sx, Ty), d(Sy, Tx), \frac{d(Sx, Tx) + d(Sy, Ty)}{2}\right) \leq 0,$$

pentru orice $x, y \in X$. *Atunci,*

(1) dacă F *satisface (2b), perechea* (T, S) *are un punct de coincidenţă;*

(2) dacă F *satisface (3), perechea* (T, S) *are un unic punct fix comun, cât timp perechea* (T, S) *este şi slab compatibilă;*

(3) dacă, în plus, F *satisface (2a), atunci iteraţia asociată este* (S, T)*-stabilă.*

Observaţia 3.9. *Teorema 3.11 completează Theorem 3.1 a lui Imdad şi Ali* [**48**], *cu informaţia referitoare la stabilitatea iteraţiei de tip Jungck, în raport cu operatorii* S *şi* T, *cu condiţia ca* F *să satisfacă o condiţie suplimentară.*

Corolar 3.3. *(**Timiş**, [**97**]) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi doi operatori* $S, T : X \to X$, *astfel încât* T *şi* S *satisfac proprietatea (E.A), iar* $S(X)$ *este un subspaţiu complet al lui* X.

Presupunem că există $F \in \mathbb{F}$, *astfel încât,* S *şi* T *satisfac (3.12), pentru orice* $x, y \in X$.

Atunci, iteraţia de tip Jungck este (S, T)*-stabilă.*

Corolar 3.4. *(**Timiş**, [**97**]) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi doi operatori* $S, T : X \to X$, *astfel încât,* T *şi* S *satisfac proprietatea (E.A), iar* $S(X)$ *este un subspaţiu complet al lui* X.

Presupunem că există $F \in \mathbb{F}$, *astfel încât,* S *şi* T *satisfac (3.12), pentru orice* $x, y \in X$.

Atunci, în cazul condiţiilor de contracţie de tip Zamfirescu, metoda de punct fix comun asociată este (S, T)*-stabilă.*

Observaţia 3.10. ***Alte cazuri particulare.***

(1) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.12, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Kannan* [**53**]*, pentru o pereche de operatori cu un punct fix comun.*

(2) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.13, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Reich (1971) şi Rus (1971), vezi* [**90**]*, pentru o pereche de operatori cu un punct fix comun.*

(3) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.14, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Chatterjea* [**35**]*, pentru o pereche de operatori cu un punct fix comun.*

(4) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.15, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Hardy şi Rogers* [**47**]*, pentru o pereche de operatori cu un punct fix comun.*

(5) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.16, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Pathak şi Verma* [**68**]*, pentru o pereche de operatori cu un punct fix comun, în spaţii simetrice.*

(6) Dacă F *este definit prin Exemplul 3.17, 3.18, iar* $S = I$*, operatorul identic în* X*, atunci se obţine un rezultat de stabilitate pentru Teorema de punct fix a lui Popa* [**70**]*, pentru două perechi de operatori cu puncte fixe comune, în două spaţii metrice.*

Observaţia 3.11. *Condiţiile de contracţie obţinute din (3.12), folosind exemplele anterioare, implică anumite condiţii ale lui Rhoades* [**77**]*,* [**78**]*,* [**79**]*,* [**80**]*.*

Concluzii: Datorită incluziunilor dintre conceptele de comutativitate, perechile de operatori slab compatibili reprezintă cel mai general tip dintre toate noţiunile menţionate, şi includ, la rândul lor, pe celelalte. Teorema anterioară utilizează acest tip de operatori, prin urmare, rezultatele obţinute sunt valabile şi în cazul perechilor compatibile, comutative şi slab comutative.

Pentru a extinde şi a generaliza teoremele de punct fix comun menţionate anterior, pot fi obţinute rezultate de stabilitate pentru diverse metode iterative de punct fix asociate operatorilor de contracţie definiţi în mod implicit.

CAPITOLUL 4

Un nou punct de vedere asupra stabilităţii metodelor iterative de punct fix

Luând în considerare noţiunile de stabilitate utilizate în contextul ecuaţiilor diferenţiale, sistemelor dinamice, teoriei operatorilor sau analizei numerice, I. A. Rus [**81**] le-a unificat, obţinând concepte noi de stabilitate.

Valorificând noile noţiuni, în acest capitol am continuat studiul stabilităţii iteraţiei Picard, pentru operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie. De asemenea, vom prezenta şi câteva exemple ilustrative în acest sens.

Contribuţiile originale din acest capitol sunt: Teorema 1.12, Propoziţia 1.1, Corolarul 1.5, Corolarul 1.6, Corolarul 1.7, Exemplul 1.19, Corolarul 1.8, Teorema 2.13, Corolarul 2.9, Exemplul 2.20, Teorema 2.14, Corolarul 2.10, Exemplele 3.21 - 3.28, Definiţia 4.15, Definiţia 4.16, Propoziţia 4.2, Teorema 4.15, Teorema 4.16 şi Teorema 5.17.

Unele dintre acestea sunt incluse în [**92**] (Timiş, I., *New stability results of Picard iteration for common fixed points şi contractive type mappings*, lucrare prezentată la SYNASC 2012, Timişoara, 26-29 Sept. 2012).

1. Un nou concept de stabilitate pentru iteraţia Picard

Eirola, Nevanlinna şi Pilyugin [**42**] au introdus *proprietatea de umbrire a limitei*, iar Rus [**81**] a adoptat acest concept, pentru a defini o nouă noţiune de stabilitate pentru metodele iterative de punct fix, care pare mult mai generală decât noţiunea de stabilitate introdusă de Harder [**44**].

Definiţia 1.12. *(Rus,[**81**]) Într-un spaţiu metric (X, d), operatorul $T : X \to X$ are iterate Picard stabile în $x_0 \in X$, dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta(\epsilon) > 0$, astfel încât,*

$$x \in X,\ d(x, x_0) < \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad d\left(T^n x, T^n x_0\right) < \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Operatorul T are iterate Picard stabile în $Y \subset X$, dacă acesta are iterate Picard stabile în toate punctele $x_0 \in Y$.

Definiţia 1.13. [**42**] *Operatorul T are proprietatea de umbrire a limitei în raport cu iteraţia Picard, dacă*

$$y_n \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad d(y_{n+1}, Ty_n) \to 0 \quad as \quad n \to \infty,$$

implică faptul că există $x_0 \in X$, astfel încât,

$$d(y_n, T^n x_0) \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$$

Definiţia 1.14. [**81**] *Iteraţia Picard este stabilă în raport cu operatorul T, dacă aceasta este convergentă în raport cu T, iar operatorul T are proprietatea de umbrire a limitei în raport cu această metodă iterativă.*

Teorema 1.12. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$ de tip a-contracţie, adică, T satisface condiţia*

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

unde $a \in [0, 1)$ fixat.

Atunci, operatorul T are iterate Picard stabile în X.

În cele ce urmează, vom studia relaţia dintre cele două definiţii de stabilitate, respectiv cea introdusă de Harder [**44**] şi cea introdusă de Rus [**81**].

Propoziţia 1.1. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$. Fie $x_0 \in X$ şi presupunem că iteraţia Picard, $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, converge la punctul fix p al lui T.*

Dacă iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Harder, atunci aceasta este de asemenea stabilă, în sensul lui Rus.

Corolar 1.5. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$, care satisface condiţiile de contracţie de tip Zamfirescu, adică, există numerele reale α, β, γ, unde $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$, cel puţin una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:*

(1) $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$;
(2) $d(Tx, Ty) \leq \beta \left[d(x, Tx) + d(y, Ty) \right]$;
(3) $d(Tx, Ty) \leq \gamma \left[d(x, Ty) + d(y, Tx) \right]$.

Fie $x_0 \in X$ şi presupunem că iteraţia Picard, $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, converge la punctul fix p al lui T.

Dacă iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Harder, atunci aceasta este de asemenea stabilă, în sensul lui Rus.

Observaţia 1.12. *Corolarul 1.5 furnizează un rezultat de stabilitate corespunzător Teoremei de punct fix a lui Zamfirescu* [**106**].

Corolar 1.6. *(**Timiş**,* [**93**]*) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$, care sastisface condiţia de contracţie a lui Kannan, adică, există $a \in [0, 1)$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,*

$$d\,(Tx, Ty) \leq a\,[d(x, Tx) + d(y, Ty)]\,.$$

Fie $x_0 \in X$ şi presupunem că iteraţia Picard, $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, converge la punctul fix p al lui T.

Dacă iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Harder, atunci aceasta este de asemenea stabilă, în sensul lui Rus.

Observaţia 1.13. *Corolarul 1.6 furnizează un rezultat de stabilitate corespunzător Teoremei de punct fix a lui Kannan* [**53**].

Corolar 1.7. *(**Timiş**,* [**93**]*) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$, care sastisface condiţia de contracţie a lui Chatterjea, adică, există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,*

$$d\,(Tx, Ty) \leq a\,[d(x, Ty) + d(y, Tx)]\,.$$

Fie $x_0 \in X$ şi presupunem că iteraţia Picard, $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, converge la punctul fix p al lui T.

Dacă iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Harder, atunci aceasta este de asemenea stabilă, în sensul lui Rus.

Observaţia 1.14. *Corolarul 1.7 furnizează un rezultat de stabilitate corespunzător Teoremei de punct fix a lui Chatterjea* [**35**].

Observaţia 1.15. *Reciproca Propoziţiei 1.1 nu este, în general, valabilă, după cum ilustrează următorul exemplu.*

Exemplul 1.19. *(**Timiş**,* [**93**]*) Fie operatorul identic $T : [0, 1] \to [0, 1]$, $Tx = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, unde $[0, 1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. Fiecare* *punct din* $[0,1]$ *este un punct fix al lui* T*, iar* T *este neexpansiv însă nu este o contracţie.*

Harder [**46**] *a arătat, în acest caz, că iteraţia Picard nu este* T*-stabilă.*

Continuând studiul stabilităţii, am obţinut faptul că iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Rus.

Corolar 1.8. *(**Timiş**,* [**93**]*) Fie un spaţiu metric* (X,d) *şi un operator* $T : X \to X$*. Pentru* $x_0 \in X$*, presupunem că şirul de iteraţii* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge la punctul fix* p *al lui* T*.*

Dacă iteraţia Picard este stabilă în sensul lui Harder, atunci punctul fix este unic.

Observaţia 1.16. *Corolarul 1.8 a fost sugerat de către dl. prof. I. A. Rus.*

2. Rezultate de stabilitate pentru iteraţia Picard pentru operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie

Cu ajutorul definiţiei stabilităţii în sens Rus [**81**], vom studia stabilitatea iteraţiei Picard, respectiv iteratele Picard stabile în $x_0 \in X$, în raport cu T.

Condiţia de contracţie generalizată introdusă de Berinde [**15**], denumită *aproape contracţie*, are câteva proprietăţi surprinzătoare: aceasta asigură convergenţa la punctul fix a iteraţiei Picard, iar folosind anumite condiţii suplimentare, chiar şi unicitatea punctului fix, dar nu impune ca suma coeficienţilor din partea dreaptă a condiţiei de contracţie să fie mai mică decât 1.

Într-un spaţiu metric (X,d), un operator $T : X \to X$ se numeşte *aproape contracţie*, dacă există două constante $\delta \in [0,1)$ şi $L \geq 0$, astfel încât,

$$d\,(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx),$$

pentru orice $x,y \in X$. Aici, nu este necesar ca $\delta + L < 1$.

Aproape contracţiile se aseamănă cu contracţiile Banach, cu excepţia faptului că, în general, punctul fix nu este unic.

Pentru a asigura unicitatea punctului fix, Berinde [**15**] a considerat o condiţie similară, respectiv,

$$d\,(Tx,Ty) \leq \delta_u d(x,y) + L_u d(x,Tx), \tag{2.13}$$

pentru orice $x,y \in X$, unde $\delta_u \in [0,1)$ şi $L_u \geq 0$ sunt constante.

Remarcăm faptul că (2.13) a fost utilizată în studiul stabiliăţii şi de către Osilike [**61**], [**63**], Osilike şi Udomene [**65**].

Berinde [**16**] a studiat existenţa punctelor de coincidenţă şi a punctelor fixe comune pentru o clasă extinsă de aproape contracţii în spaţii metrice.

Mai mult, Berinde [**13**] a demonstrat existenţa punctelor de coincidenţă şi a punctelor fixe comune pentru aproape contracţii necomutative, în spaţii metrice, construind o metodă de aproximare a acestora şi obţinând estimarea erorii în mod *a priori* şi *a posteriori*.

Folosind această condiţie, am obţinut următorul rezultat de stabilitate:

Teorema 2.13. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$ care satisface condiţia de aproape contracţie (2.13), pentru $\delta_u \in [0, 1)$ şi $L_u \geq 0$. Pentru orice $x, y \in X$, avem că*

$$d\,(Tx, Ty) \leq \delta_u d(x, y) + L_u d(x, Tx).$$

Atunci, iteraţia Picard asociată este T-stabilă, în sensul lui Rus.

Observaţia 2.17. *Într-un spaţiu metric (X, d), fie un operator $T : X \to X$ care satisface condiţia de aproape contracţie (2.13).*

Iteraţia Picard asociată este T-stabilă în sensul lui Rus, acest fapt fiind asigurat de T-stabilitatea în sensul lui Harder.

Corolar 2.9. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X \to X$, care satisface condiţia de contracţie a lui Banach, adică, există $a \in [0, 1)$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$, $d\,(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$.*

Atunci, iteraţia Picard asociată este T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 2.20. *(**Timiş**, [**93**]) Fie mulţimea $X = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ...\right\}$, înzestrată cu metrica obişnuită. Definim $T : X \to X$, prin $T(0) = \frac{1}{2}$, $T\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$, pentru $n = 1, 2, 3, ...$.*

*Babu, Sandhya şi Kameswari [**10**] au arătat că T satisface condiţia (2.13), cu $\delta = \frac{1}{2}$ şi $L = 1$, pentru care $\delta + L = \frac{3}{4} > 1$.*

Deoarece T nu are puncte fixe, iteraţia Picard nu este stabilă în sensul lui Harder, însă, aceasta este stabilă în sensul lui Rus.

Babu, Sandhya şi Kameswari [**10**] au găsit o condiţie de contracţie diferită, care asigură unicitatea punctelor fixe pentru aproape contracţii: dacă există $\delta \in (0, 1)$ şi $L \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,

$$d\,(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + L \min\left\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\right\}. \tag{2.14}$$

Folosind această condiţie, am obţinut următorul rezultat de stabilitate:

Teorema 2.14. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X,d) şi un operator $T : X \to X$, care satisface condiţia de aproape contracţie (2.14), adică, există $\delta \in (0,1)$ şi $L \geq 0$, astfel încât,*

$$d\left(Tx,Ty\right) \leq \delta d(x,y) + L \min\left\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\right\},$$

pentru orice $x, y \in X$.

Atunci, iteraţia Picard asociată este T-stabilă în sensul lui Harder.

Corolar 2.10. *(**Timiş**, [**93**]) Fie un spaţiu metric (X,d) şi a un operator $T : X \to X$, care satisface condiţia de aproape contracţie (2.14), adică, există $\delta \in (0,1)$ şi $L \geq 0$, astfel încât,*

$$d\left(Tx,Ty\right) \leq \delta d(x,y) + L \min\left\{d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\right\},$$

pentru orice $x, y \in X$.

Atunci, iteraţia Picard asociată este T-stabilă în sensul lui Rus, datorită faptului că aceasta este T-stabilă în sensul lui Harder.

Concluzii:

1. O metodă iterativă de punct fix stabilă în sensul lui Harder este, de asemenea, stabilă în sensul lui Rus, însă reciproca nu este în general valabilă, deoarece stabilitatea Harder implică unicitatea punctului fix, în timp ce stabilitatea Rus nu implică acest lucru.

2. O metodă iterativă de punct fix stabilă în sensul lui Rus poate implica stabilitate în sensul lui Harder, dacă şi numai dacă, iteraţia converge la punctul fix.

3. Pe de altă parte, există multe exemple de operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie, pentru care iteraţia Picard asociată nu este stabilă în sensul lui Harder, însă este stabilă în sensul lui Rus.

Problemă deschisă: Studiul stabilităţii metodelor iterative de punct fix în sensul lui Rus, pentru operatori neexpansivi, cât şi pentru aproape contracţii generalizate, care nu satisfac o condiţie de unicitate.

3. Exemple

În continuare, vom prezenta câteva exemple de operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie, pentru care iteraţia Picard asociată nu este stabilă în sensul lui Harder, însă este stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.21. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T : [0, 2] \to [0, 2]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0, 1) \\ 2, & x \in [1, 2], \end{cases}$$

unde $[0, 2]$ este înzestrat cu metrica obişnuită, iar $Fix(T) = \{0, 2\}$.

*M. Păcurar [**67**] a arătat că T este o aproape contracţie, adică, există constantele $\delta = \frac{1}{2} \in [0, 1)$ şi $L = 3 \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in [0, 2]$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Observăm că $\delta + L = \frac{7}{2} > 1$.

În ceea ce priveşte stabilitatea, iteraţia Picard nu este T-stabilă în sensul lui Harder, însă este T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.22. *(**Timiş**, [**93**]) Let $T : [0, 1] \to [0, 1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0, 1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită, iar $Fix(T) = \{0, 1\}$.

*M. Păcurar [**67**] a arătat că T este o aproape contracţie, adică, există constantele $\delta = \frac{2}{3} \in [0, 1)$ şi $L = 6 \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in [0, 1]$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx).$$

Observăm că $\delta + L = 6 + \frac{2}{3} > 1$.

În ceea ce priveşte stabilitatea, iteraţia Picard nu este T-stabilă în sensul lui Harder, însă este T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.23. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T : [0, 1] \to [0, 1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} x^2, & x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0, 1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. Operatorul T are un punct fix în 0.

M. Păcurar [**67**] *a arătat că T este o aproape contracţie, adică, există constantele $\delta = \frac{1}{2} \in [0,1)$ şi $L = \frac{1}{3} \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in [0,1]$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y, Tx).$$

În acest caz, $\delta + L = \frac{5}{6} < 11$.

Relativ la stabilitate, am obţinut faptul că iteraţia Picard este T-stabilă în sensul lui Harder şi este, de asemenea, T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.24. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T : [0,1] \to [0,1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{2}{3}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită, iar $Fix(T) = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

M. Păcurar [**67**] *a arătat că T este o aproape contracţie, adică, există constantele $\delta = \frac{2}{3} \in [0,1)$ şi $L \geq \delta \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in [0,1]$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y, Tx).$$

În acest caz, $\delta + L \geq \frac{4}{3} > 1$.

Relativ la stabilitate, am obţinut faptul că iteraţia Picard este T-stabilă în sensul lui Harder şi este, de asemenea, T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.25. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T : [0,1] \to [0,1]$, definit prin*

$$Tx = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{x}{2}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită, iar $Fix(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

M. Păcurar [**67**] *a arătat că T este o aproape contracţie, adică, există două constante $\delta_u = \frac{1}{2} \in [0,1)$ şi $L_u = 1 \geq 0$, astfel încât, pentru orice $x, y \in [0,1]$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta_u d(x,y) + L_u d(x, Tx).$$

Observăm că $\delta + L = \frac{3}{2} > 1$.

Relativ la stabilitate, am obţinut faptul că iteraţia Picard este T-stabilă în sensul lui Harder şi este, de asemenea, T-stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.26. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T:[0,1]\to[0,1]$, definit prin*

$$Tx=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. Operatorul T este continuu în fiecare punct din $[0,1]$, cu excepţia lui $\frac{1}{2}$, iar $Fix(T)=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Am arătat deja în Exemplul 6.2 că, pentru orice $x,y\in[0,1]$, cu $x\neq y$, T satisface condiţia

$$d(Tx,Ty)<\max\left\{d(x,Tx),d(y,Ty)\right\},$$

şi, de asemenea, am arătat că iteraţia Picard asociată nu este T-stabilă în sensul lui Harder. Mai mult, această iteraţie este, totuşi, stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.27. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T:[0,1]\to[0,1]$, definit prin*

$$Tx=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{2}, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases},$$

unde $[0,1]$ este înzestrat cu metrica obişnuită. Operatorul T este continuu în fiecare punct din $[0,1]$, cu excepţia lui $\frac{1}{2}$, iar $Fix(T)=\{0\}$.

Am arătat deja în Exemplul 6.3 că, pentru orice $x,y\in[0,1]$, cu $x\neq y$, T satisface condiţia

$$d\left(Tx,Ty\right)<\max\left\{d\left(x,Ty\right),d\left(y,Tx\right)\right\},$$

şi, de asemenea, am arătat că iteraţia Picard asociată nu este T-stabilă în sensul lui Harder. Mai mult, această iteraţie este, totuşi, stabilă în sensul lui Rus.

Exemplul 3.28. *(**Timiş**, [**93**]) Fie $T:\mathbb{R}\to\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}$, definit prin*

$$Tx=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x<0\\ \frac{1}{4}, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 0, & x>\frac{1}{2}\end{cases},$$

unde $\mathbb{R}$ este înzestrat cu metrica obişnuită. Operatorul T este continuu în fiecare punct din $\mathbb{R}$, cu excepţia lui 0 şi $\frac{1}{2}$, iar $Fix(T)=\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Am arătat deja în Exemplul 6.4 că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x \neq y$, T satisface condiţia

$$d(Tx, Ty) < \max\left\{d(x, y), \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}, \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\},$$

şi, de asemenea, am arătat că iteraţia Picard asociată nu este T-stabilă în sensul lui Harder. Mai mult, această iteraţie este, totuşi, stabilă în sensul lui Rus.

4. Noi concepte de stabilitate pentru iteraţii de punct fix comun folosind operatori contractivi

În cele ce urmează, am transpus Definiţia 1.13, a proprietăţii de umbrire a limitei a lui Eirola, Nevanlinna şi Pilyugin [**42**], la puncte fixe comune.

Definiţia 4.15. *(**Timiş**, [**92**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi doi operatori $S, T : X \to X$, astfel încât, $T(X) \subseteq S(X)$. Considerăm că u este un punct fix comun pentru S şi T, adică, $Tu = Su = u$.*

Pentru orice $x_0 \in X$, fie şirul de iteraţii de tip Jungck $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin

$$Sx_{n+1} = Tx_n,\ n = 0, 1, 2, ..., \tag{4.15}$$

şi presupunem că acesta converge la u.

Atunci, vom spune că operatorii T şi S au proprietatea de umbrire a limitei în raport cu iteraţia Jungck, dacă

$$Sy_n \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad d(Sy_{n+1}, Ty_n) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

implică faptul că există $x_0 \in X$, astfel încât

$$d(Sy_n, T^n x_0) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Observaţia 4.18. *Dacă $S = I$, operatorul identic în X, atunci, din Definiţia 4.15 se obţine Definiţia 1.13, a proprietăţii de umbrire a limitei, introdusă de Eirola, Nevanlinna şi Pilyugin* [**42**].

Noţiunea de stabilitate introdusă de Rus [**81**] în Definiţia 1.14, va fi transpusă la puncte fixe comune, după cum urmează:

Definiţia 4.16. *(**Timiş**, [**92**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi doi operatori $S, T : X \to X$, astfel încât, $T(X) \subseteq S(X)$. Considerăm că u este un punct fix comun pentru S şi T, adică, $Tu = Su = u$.*

Pentru orice $x_0 \in X$, fie şirul de iteraţii de tip Jungck $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin $Sx_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, şi presupunem că acesta converge la u.

Atunci, iteraţia Jungck este stabilă în raport cu operatorii T şi S, dacă aceasta este convergentă în raport cu T şi S, iar operatorii T şi S au proprietatea de umbrire a limitei în raport cu iteraţia Jungck.

În continuare, vom studia relaţia dintre conceptul de stabilitate introdus de Singh şi Prasad [**88**] în Definiţia 2.6, dată pentru o pereche de operatori (S, T) cu un punct de coincidenţă şi noul concept introdus prin Definiţia 4.16.

Propoziţia 4.2. *(**Timiş**, [**92**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi doi operatori S, $T : X \to X$, cu $T(X) \subseteq S(X)$, având un punct fix comun, respectiv, $Su = Tu = u$.*

Pentru orice $x_0 \in X$, considerăm şirul $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin (4.15) şi presupunem că acesta converge la $u \in X$.

*Presupunem că iteraţia Jungck este stabilă în sensul lui Singh şi Prasad [**88**], prin Definiţia 2.6.*

Atunci, iteraţia Jungck este, de asemenea, stabilă în sensul Definiţiei 4.16.

Observaţia 4.19. *Dacă $S = I$, operatorul identic în X, atunci Propoziţia 4.2 se va reduce la Propoziţia 1.1.*

În cele ce urmează, vom prezenta câteva rezultate de stabilitate pentru metoda iterativă de punct fix definită prin (4.15), în raport cu doi operatori care satisfac diferite condiţii de contracţie.

Teorema 4.15. *(**Timiş**, [**92**]) Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi doi operatori $S, T : X \to X$, care satisfac $d(Tx, Ty) \leq ad(Sx, Sy)$, pentru orice $x, y \in X$ şi o constantă $a \in [0, 1)$.*

Operatorii S şi T au un unic punct fix comun u, respectiv $Tu = Su = u$, dacă
i) $T(X) \subseteq S(X)$; ii) S este continuu; iii) S şi T comută.

Pentru orice $x_0 \in X$, considerăm şirul $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin (4.15) şi presupunem că acesta converge la u.

Atunci, iteraţia Jungck este stabilă în raport cu operatorii T şi S, în sensul Definiţiei 4.16.

Observaţia 4.20. *Dacă $S = I$, operatorul identic în X, rezultatul de stabilitate în sensul lui Rus al metodei iterative de tip Jungck, respectiv Teorema 4.15, se reduce la rezultatul de stabilitate din cazul iteraţiei Picard, respectiv Teorema 2.13.*

Teorema 4.16. *(**Timiş**, [**92**]) Fie un spaţiu metric (X, d) şi doi operatori $S, T : X \to X$. Presupunem că există $h \in [0, 1)$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq h \max \{d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}. \tag{4.16}$$

Operatorii S şi T au un unic punct fix comun u, respectiv $Tu = Su = u$, dacă i) $T(X) \subseteq S(X)$; ii) S este continuu; iii) S şi T comută.

Pentru orice $x_0 \in X$, considerăm şirul $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$, definit prin (4.16) şi presupunem că acesta converge la u.

Atunci, metoda iterativă definită prin (4.16) este stabilă în raport cu operatorii T şi S, în sensul lui Definiţiei 4.16.

5. Un nou concept de stabilitate pentru iteraţia Picard, folosind operatori definiţi în mod implicit

Reamintim mulţimea tuturor funcţiilor reale continue introduse de către V. Popa [**71**], [**72**] şi utilizate în Capitolul 3, paragraful al doilea, respectiv, $F : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, pentru care considerăm următoarele condiţii:

(1) (a) F este descrescătoare în variabila a cincea,
$F(u, v, v, u, u+v, 0) \leq 0$, $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;
(b) F este descrescătoare în variabila a patra,
$F(u, v, 0, u+v, u, v) \leq 0$, $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;
(c) F este descrescătoare în variabila a treia,
$F(u, v, u+v, 0, v, u) \leq 0$, $u, v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0, 1)$, astfel încât $u \geq hv$;

(2) $F(u, u, 0, 0, u, u) > 0$, pentru orice $u > 0$.

Într-un spaţiu metric complet (X, d), fie operatorul $T : X \to X$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\right) \leq 0. \tag{5.17}$$

Berinde [**24**] a demonstrat că dacă F satisface (1a) şi (2), atunci T are un punct fix unic x^* în X, iar iteraţia Picard $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definită prin $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, ...$, converge la x^*, pentru orice $x_0 \in X$.

În continuare, utilizând aceste presupuneri, vom studia stabilitatea iteraţiei Picard în sensul Definiţiei 1.14.

Teorema 5.17. *(**Timiş**, [**91**]) Fie un spaţiu metric complet (X, d) şi un operator $T : X \to X$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$, F satisface (5.17), adică,*

$$F\left(d(Tx, Ty), d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\right) \leq 0.$$

Dacă F satisface (1a), (1b) şi (2), atunci iteraţia Picard este T-stabilă în sensul Definiţiei 1.14.

CAPITOLUL 5

Stabilitatea metodelor iterative de puncte triple fixe

În acest capitol, am introdus conceptul de stabilitate pentru metodele iterative de puncte triple fixe, obţinând rezultate în cazul operatorilor mixt monotoni şi monotoni, care satisfac anumite condiţii de contracţie. Vom prezenta şi un exemplu ilustrativ în acest sens.

Contribuţiile originale din acest capitol sunt: Definiţia 2.19, Teorema 2.18, Corolarul 2.11, Teorema 2.19, Teorema 2.20, Lemma 3.3, Definiţia 3.21, Teorema 3.21, Corolarul 3.12, Teorema 3.22, Teorema 3.23, Exemplul 4.29 şi condiţiile de contracţie (2.19)-(2.24), (3.27)-(3.32).

Majoritatea acestora au fost publicate în [**102**] (Timiş, I., *Stability of tripled fixed point iteration procedures for monotone mappings*, Ann. Univ. Ferrara (2012) DOI 10.1007/s11565-012-0171-7).

1. Metode iterative de punct triplu fix

Principiul lui Banach-Caccioppoli-Picard a fost generalizat, prin îmbogăţirea structurii spaţiului metric cu o relaţie de ordine parţială. Primul rezultat pentru acest tip de operatori monotoni, în spaţii metrice ordonate, a fost obţinut de către Ran şi Reurings [**73**].

Urmând aceeaşi abordare, Bhaskar şi Laksmikantham [**27**] au obţinut anumite rezultate privind punctele fixe cuplate pentru operatori mixt monotoni, respectiv rezultate privind existenţa, existenţa şi unicitatea unui punct de coincidenţă pentru operatorii mixt monotoni $T : X^2 \to X$, în prezenţa unei condiţii de contracţie, în spaţii metrice parţial ordonate.

Acest concept de puncte fixe cuplate în spaţii metrice parţial ordonate a fost studiat de către diverşi autori, cum ar fi Abbas, Ali Khan şi Radenovic [**2**], Berinde

[**17**], [**18**], [**20**], Choudhury şi Kundu [**36**], Ciric şi Lakshmikantham [**40**], Karapinar [**54**], Lakshmikantham şi Ciric [**55**], Olatinwo [**58**], Sabetghadam, Masiha şi Sanatpour [**84**].

Recent, Berinde şi Borcut [**26**], [**32**] au extins acest concept către punctele triple fixe şi punctele triple fixe coincidente, obţinând teoreme pentru cazul operatorilor de contracţie în spaţii metrice parţial ordonate.

Studiul acestor puncte triple fixe a fost continuat de către Abbas, Aydi şi Karapinar [**3**], Aydi şi Karapinar [**8**], Aydi, Karapinar şi Vetro [**9**], Amini-Harandi [**7**], Borcut [**29**], [**30**], [**31**], Charoensawan [**34**], Rao şi Kishore [**73**].

Prin adaptarea conceptului de stabilitate al metodelor iterative de punct fix, Olatinwo [**60**] a studiat stabilitatea metodelor iterative de puncte fixe cuplate, folosind anumite condiţii de contracţie pentru care existenţa şi unicitatea punctului fix cuplat a fost demonstrată de către Sabetghadam, Masiha şi Sanatpour [**84**].

Noi am continuat acest studiu, prin introducerea conceptului de stabilitate pentru metodele iterative de puncte triple fixe, obţinând rezultate în cazul operatorilor mixt monotoni şi monotoni, care satisfac anumite condiţii de contracţie, obţinute prin extensia unor condiţii utilizate de Olatinwo [**60**].

2. Stabilitatea metodelor iterative de punct triplu fix pentru operatori monotoni

Fie o mulţime parţial ordonată $(X, \leq)$, iar d este o metrică pe X, astfel încât, (X, d) este un spaţiu metric complet. Borcut [**31**] a înzestrat spaţiul X^3 cu următoarea relaţie de ordine parţială:

$$(x, y, z),\ (u, v, w) \in X^3,\ (u, v, w) \leq (x, y, z) \Leftrightarrow x \geq u,\ y \leq v,\ z \geq w.$$

Definiţia 2.17. [**31**] *Fie o mulţime parţial ordonată $(X, \leq)$ şi un operator $T : X^3 \to X$. Spunem că T are proprietatea de monotonie, dacă $T(x, y, z)$ este monoton crescător în x, y şi z, adică, pentru orice $x, y, z \in X$,*

$$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1, y, z) \leq T(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X,\ y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x, y_1, , z) \leq T(x, y_2, z),$$

$$z_1, z_2 \in X,\ z_1 \leq z_2 \Rightarrow T(x, y, z_1) \leq T(x, y, z_2).$$

Definiţia 2.18. [**31**] *Un element* $(x, y, z) \in X^3$ *se numeşte punct triplu fix al lui* $T : X^3 \to X$*, dacă* $T(x, y, z) = x, \quad T(y, x, z) = y, \quad T(z, y, x) = z.$

Un operator $T : X^3 \to X$ este o (k, μ, ρ)-contracţie, dacă şi numai dacă, există constantele $k \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\rho \geq 0$, $k + \mu + \rho < 1$, astfel încât, $\forall x, y, z, u, v, w \in X$,

$$d(T(x, y, z), T(u, v, w)) \leq kd(x, u) + \mu d(y, v) + \rho d(z, w). \tag{2.18}$$

Pornind de la condiţia (2.18), vom introduce câteva condiţii noi de contracţie.

Fie un spaţiu metric (X, d). Considerăm operatorul $T : X^3 \to X$ şi presupunem că există $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \geq 0$, cu $a_1 + a_2 + a_3 < 1$, $b_1 + b_2 + b_3 < 1$, astfel încât, $\forall x, y, z, u, v, w \in X$,

$$(i)\ d\left(T(x, y, z), T(u, v, w)\right) \leq a_1 d\left(T(x, y, z), x\right) + b_1 d\left(T(u, v, w), u\right); \tag{2.19}$$

$$d\left(T(y, x, z), T(v, u, w)\right) \leq a_2 d\left(T(y, x, z), y\right) + b_2 d\left(T(v, u, w), v\right); \tag{2.20}$$

$$d\left(T(w, y, x), T(z, v, u)\right) \leq a_3 d\left(T(z, y, x), z\right) + b_3 d\left(T(w, v, u), w\right); \tag{2.21}$$

$$(ii)\ d\left(T(x, y, z), T(u, v, w)\right) \leq a_1 d\left(T(x, y, z), u\right) + b_1 d\left(T(u, v, w), x\right); \tag{2.22}$$

$$d\left(T(y, x, z), T(v, u, w)\right) \leq a_2 d\left(T(y, x, z), v\right) + b_2 d\left(T(v, u, w), y\right); \tag{2.23}$$

$$d\left(T(w, y, x), T(z, v, u)\right) \leq a_3 d\left(T(z, y, x), w\right) + b_3 d\left(T(w, v, u), z\right). \tag{2.24}$$

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, şirul $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, definit prin

$$x_{n+1} = T(x_n, y_n, z_n),\ \ y_{n+1} = T(y_n, x_n, z_n),\ \ z_{n+1} = T(z_n, y_n, x_n), \tag{2.25}$$

unde $n = 0, 1, 2, ...$, se numeşte *iteraţie de puncte triple fixe.*

Vom prezenta următoarea definiţie a stabilităţii metodelor iterative de punct fix în raport cu operatorul T, în spaţii metrice.

Definiţia 2.19. *(**Timiş**,* [**102**]*) Fie un spaţiu metric complet* (X, d) *şi un operator* $T : X^3 \to X$*, pentru care*

$$Fix_t(T) = \Big\{(x^*, y^*, z^*) \in X^3 \ \mid T(x^*, y^*, z^*) = x^*,\ T(y^*, x^*, z^*) = y^*,$$

$$T(z^*, y^*, x^*) = z^*\Big\}$$ *reprezintă mulţimea tuturor punctelor triple fixe ale lui* T.

Fie şirul $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$*, definit prin (2.25), unde* $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$ *reprezintă valoarea iniţială şi presupunem că acesta converge la punctul triplu fix* (x^*, y^*, z^*) *al lui* T.

Fie şirul arbitrar $\{(u_n, v_n, w_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$ *şi definim*

$$\epsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right), \quad \delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, w_n\right)\right),$$

$$\gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Atunci, metoda iterativă de puncte triple fixe definită prin (2.25) este T*-stabilă, sau stabilă în raport cu* T*, dacă şi numai dacă,*

$$\lim_{n\to\infty}(\epsilon_n, \delta_n, \gamma_n) = 0_{R^3} \quad \textit{implică} \quad \lim_{n\to\infty}(u_n, v_n, w_n) = (x^*, y^*, z^*).$$

Teorema 2.18. ***(Timiş***, [**102**]*) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există metrica* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Considerăm operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, care are proprietatea de monotonie pe* X *şi care satisface (2.18).*

Dacă există x_0*,* y_0*,* $z_0 \in X$*, astfel încât,*

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \leq T(y_0, x_0, z_0) \quad \text{şi} \quad z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$*, pentru care*

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, z^*) \quad \text{şi} \quad z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z)*,* $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$*, există* $(u, v, w) \in X^3$*, care este comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1)*.*

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$*, fie şirul de iteraţii de puncte triple fixe* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$*, definit prin (2.25).*

Atunci, iteraţia de puncte triple fixe este T*-stabilă.*

Observaţia 2.21. *Teorema 2.18 completează Teorema de existenţă a punctelor triple fixe a lui Borcut* [**31**]*, cu rezultatul de stabilitate pentru iteraţiile de puncte triple fixe, pentru operatori monotoni.*

Corolar 2.11. ***(Timiş***, [**102**]*) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există metrica* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, cu proprietatea de monotonie pe* X*.*

Presupunem că există $\kappa \in [0, 1)$*, astfel încât, pentru orice* $x, y, z, u, v, w \in X$*,* T *satisface condiţia de contracţie*

$$d(T(x, y, z), T(u, v, w)) \leq \frac{\kappa}{3}\left\{d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)\right\}.$$

Dacă există x_0*,* y_0*,* $z_0 \in X$*, astfel încât,*

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \quad \text{şi} \quad z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$*, pentru care*

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, z^*) \ \text{şi} \ \ z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$*, există* $(u, v, w) \in X^3$*, care este comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1)*.*

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$*, fie şirul de iteraţii de puncte triple fixe* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$*, definit prin (2.25).*

Atunci, iteraţia de puncte triple fixe este T*-stabilă.*

Observaţia 2.22. *Corolarul 2.11 completează Teorema de existenţă a punctelor triple fixe a lui Borcut* [**31**]*, cu un rezultat de stabilitate pentru iteraţiile de puncte triple fixe, pentru operatori monotoni.*

Teorema 2.19. *(**Timiş**,* [**102**]*) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există metrica* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, cu proprietatea de monotonie pe* X*, care satisface condiţiile (2.19), (2.20) şi (2.21).*

Dacă există x_0*,* y_0*,* $z_0 \in X$*, astfel încât,*

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \ \text{şi} \ \ z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$*, pentru care*

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, z^*) \ \text{şi} \ \ z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$*, există* $(u, v, w) \in X^3$*, care este comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1)*.*

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$*, fie şirul de iteraţii de puncte triple fixe* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$*, definit prin (2.25).*

Atunci, iteraţia de puncte triple fixe este T*-stabilă.*

Teorema 2.20. *(**Timiş**,* [**102**]*) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există metrica* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, cu proprietatea de monotonie pe* X*, care satisface condiţiile (2.22), (2.23) şi (2.24).*

Dacă există x_0*,* y_0*,* $z_0 \in X$*, astfel încât,*

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \ \text{şi} \ \ z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$*, pentru care*

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, z^*) \ \text{şi} \ \ z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$, *există* $(u, v, w) \in X^3$, *care este comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1).

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, *fie şirul de iteraţii de puncte triple fixe* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, *definit prin (2.25).*

Atunci, iteraţia de puncte triple fixe este T*-stabilă.*

3. Stabilitatea metodelor iterative de punct triplu fix pentru operatori mixt-monotoni

Fie o mulţime parţial ordonată $(X, \leq)$ şi presupunem că există metrica d pe X, astfel încât, (X, d) este un spaţiu metric complet.

Berinde şi Borcut [**26**] au înzestrat acest spaţiu cu relaţia de ordine

$$(x, y, z),\ (u, v, w) \in X^3,\ (u, v, w) \leq (x, y, z) \Leftrightarrow x \geq u,\ y \leq v,\ z \geq w.$$

Definiţia 3.20. [**26**] *Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi un operator* $T : X^3 \to X$. *Spunem că* T *are proprietatea de mixt monotonie, dacă* $T(x, y, z)$ *este monoton crescător în variabila* x, *monoton descrescător în variabila* y *şi monoton crescător în variabila* z, *adică, pentru orice* $x, y, z \in X$,

$$x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1, y, z) \leq T(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X,\ y_1 \leq y_2 \Rightarrow T(x, y_1, , z) \geq T(x, y_2, z),$$

$$z_1, z_2 \in X,\ z_1 \leq z_2 \Rightarrow T(x, y, z_1) \leq T(x, y, z_2).$$

Un operator $T : X^3 \to X$ se numeşte (k, μ, ρ)-contracţie, dacă şi numai dacă, există trei constante $k \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \rho \geq 0,\ k + \mu + \rho < 1$, astfel încât, $\forall x, y, z, u, v, w \in X$,

$$d(T(x, y, z), T(u, v, w)) \leq kd(x, u) + \mu d(y, v) + \rho d(z, w). \tag{3.26}$$

Relativ la condiţia (3.26), vom introduce următoarele condiţii de contracţie:

Fie un spaţiu metric (X, d) şi un operator $T : X^3 \to X$, pentru care există $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \geq 0$, cu $a_1 + a_2 + a_3 < 1,\ b_1 + b_2 + b_3 < 1$, astfel încât, $\forall x, y, z, u, v, w \in X$, avem că

$$(i)\ d\left(T(x, y, z), T(u, v, w)\right) \leq a_1 d\left(T(x, y, z), x\right) + b_1 d\left(T(u, v, w), u\right); \tag{3.27}$$

$$d\left(T(y, x, y), T(v, u, v)\right) \leq a_2 d\left(T(y, x, y), y\right) + b_2 d\left(T(v, u, v), v\right); \tag{3.28}$$

$$d\left(T(w,y,x),T(z,v,u)\right) \leq a_3 d\left(T(z,y,x),z\right) + b_3 d\left(T(w,v,u),w\right); \tag{3.29}$$

$$(ii)\ d\left(T(x,y,z),T(u,v,w)\right) \leq a_1 d\left(T(x,y,z),u\right) + b_1 d\left(T(u,v,w),x\right); \tag{3.30}$$

$$d\left(T(y,x,y),T(v,u,v)\right) \leq a_2 d\left(T(y,x,y),v\right) + b_2 d\left(T(v,u,v),y\right); \tag{3.31}$$

$$d\left(T(w,y,x),T(z,v,u)\right) \leq a_3 d\left(T(z,y,x),w\right) + b_3 d\left(T(w,v,u),z\right). \tag{3.32}$$

Dacă avem două matrici $A, B \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, spunem că $A \leq B$, dacă $a_{ij} \leq b_{ij}$, pentru orice $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Pentru a obţine un rezultat de stabilitate, vom face o extindere a Lemei 1.1, pentru un vector de şiruri, pentru care inegalităţile dintre vectori reprezintă inegalităţi între elementele acestora.

Lema 3.3. ***(Timiş***, [**101**]*) Fie trei şiruri de numere reale nenegative* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ *şi considerăm matricea cu elemente nenegative* $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, *astfel încât*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \leq A \cdot \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_n \\ \delta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}, \ n \geq 0, \tag{3.33}$$

pentru care

(i) $\lim_{n\to\infty} A^n = O_3$;

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < \infty$ *şi* $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k < \infty$.

Atunci, $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fie un spaţiu metric (X,d) şi un operator $T : X^3 \to X$. Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, şirul $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, definit prin

$$x_{n+1} = T(x_n, y_n, z_n),\ y_{n+1} = T(y_n, x_n, y_n),\ z_{n+1} = T(z_n, y_n, x_n), \tag{3.34}$$

unde $n = 0, 1, 2, ...$, reprezintă *iteraţia de puncte triple fixe.*

Definiţia 3.21. ***(Timiş***, [**101**]*) Fie un spaţiu metric complet* (X,d) *şi un operator* $T : X^3 \to X$, *pentru care*

$$Fix_t(T) = \Big\{(x^*, y^*, z^*) \in X^3 \ \mid T(x^*, y^*, z^*) = x^*,\ T(y^*, x^*, y^*) = y^*,$$

$$T(z^*, y^*, x^*) = z^*\Big\},$$ *reprezintă mulţimea tuturor punctelor triple fixe ale lui* T.

Fie şirul de iteraţii $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, *definit prin (3.34), unde* $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$ *este valoarea iniţială şi presupunem că acesta converge la punctul triplu fix* (x^*, y^*, z^*) *al lui* T.

Fie un şir arbitrar $\{(u_n, v_n, w_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$ *şi definim*

$$\epsilon_n = d\left(u_{n+1}, T\left(u_n, v_n, w_n\right)\right), \quad \delta_n = d\left(v_{n+1}, T\left(v_n, u_n, v_n\right)\right),$$

$$\gamma_n = d\left(w_{n+1}, T\left(w_n, v_n, u_n\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Atunci, iteraţia de puncte triple fixe definită prin (3.34) este T*-stabilă, sau stabilă în raport cu* T*, dacă şi numai dacă,*

$$\lim_{n\to\infty}(\epsilon_n, \delta_n, \gamma_n) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \textit{implică} \quad \lim_{n\to\infty}(u_n, v_n, w_n) = (x^*, y^*, z^*).$$

Vom prezenta următorul rezultat de stabilitate în raport cu operatorul T, în spaţii metrice, pentru iteraţii de puncte triple fixe.

Teorema 3.21. *(**Timiş**, [**101**]) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există o metrică* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, care are proprietatea de mixt monotonie pe* X *şi satisface (3.26).*

Dacă există x_0, y_0, $z_0 \in X$*, astfel încât,*

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \;\; \text{şi} \;\; z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$*, pentru care*

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, y^*) \;\; \text{şi} \;\; z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$*, există* $(u, v, w) \in X^3$*, care este comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1).

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$*, fie şirul de iteraţii* $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$*, definit prin (3.34).*

Atunci, metoda iterativă de puncte triple fixe este T*-stabilă.*

Observaţia 3.23. *Teorema 3.21 completează Teorema de existenţă a punctelor triple fixe a lui Berinde şi Borcut* [**26**]*, cu rezultatul de stabilitate pentru iteraţiile de puncte triple fixe, pentru operatori mixt monotoni.*

Corolar 3.12. *(**Timiş**, [**101**]) Fie o mulţime parţial ordonată* $(X, \leq)$ *şi presupunem că există o metrică* d *pe* X*, astfel încât,* (X, d) *este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu* $T : X^3 \to X$*, care are proprietatea de mixt monotonie pe* X.

Există $\kappa \in [0, 1)$, astfel încât, pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$, T satisface condiţia

$$d(T(x, y, z), T(u, v, w)) \leq \frac{\kappa}{3} \{d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)\}. \tag{3.35}$$

Dacă există x_0, y_0, $z_0 \in X$ astfel încât

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \quad \text{şi} \quad z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$, pentru care

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, y^*) \quad \text{şi} \quad z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru fiecare (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$, există $(u, v, w) \in X^3$, care este comparabil cu (x, y, z) şi (x_1, y_1, z_1).

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, fie şirul de iteraţii $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, definit prin (3.34).

Atunci, metoda iterativă de puncte triple fixe este T-stabilă.

Observaţia 3.24. *Corolarul 3.12 completează Teorema de existenţă a punctelor triple fixe a lui Berinde şi Borcut* [**26**]*, cu un rezultat de stabilitate pentru iteraţiile de puncte triple fixe, pentru operatorii mixt monotoni.*

Teorema 3.22. *(**Timiş**,* [**101**]*)*

Fie o mulţime parţial ordonată $(X, \leq)$ şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât, (X, d) este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu $T : X^3 \to X$, care are proprietatea de mixt monotonie pe X şi satisface condiţiile (3.27), (3.28) şi (3.29).

Dacă există x_0, y_0, $z_0 \in X$, astfel încât,

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \quad \text{şi} \quad z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$, pentru care

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, y^*) \quad \text{şi} \quad z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$, există $(u, v, w) \in X^3$, care este comparabil cu (x, y, z) şi (x_1, y_1, z_1).

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, fie şirul de iteraţii $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, definit prin (3.34).

Atunci, metoda iterativă de puncte triple fixe este T-stabilă.

Teorema 3.23. *(**Timiş**, [**101**]) Fie o mulţime parţial ordonată $(X, \leq)$ şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât, (X, d) este un spaţiu metric complet. Fie operatorul continuu $T : X^3 \to X$, care are proprietatea de mixt monotonie pe X şi satisface condiţiile (3.30), (3.31) şi (3.32).*

Dacă există x_0, y_0, $z_0 \in X$, astfel încât,

$$x_0 \leq T(x_0, y_0, z_0), \quad y_0 \geq T(y_0, x_0, y_0) \ \text{şi} \ z_0 \leq T(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x^*, y^*, z^* \in X$, pentru care

$$x^* = T(x^*, y^*, z^*), \quad y^* = T(y^*, x^*, y^*) \ \text{şi} \ z^* = T(z^*, y^*, x^*).$$

Presupunem că, pentru orice (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in X^3$, există $(u, v, w) \in X^3$, care este comparabil cu (x, y, z) şi (x_1, y_1, z_1).

Pentru $(x_0, y_0, z_0) \in X^3$, fie şirul de iteraţii $\{(x_n, y_n, z_n)\}_{n=0}^{\infty} \subset X^3$, definit prin (3.34).

Atunci, metoda iterativă de puncte triple fixe este T-stabilă.

4. Exemplu ilustrativ

Exemplul 4.29. *(**Timiş**, [**101**]) Fie un spaţiu metric complet (X, d), unde $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ şi un operator continuu şi mixt monoton $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, unde*

$$T(x, y, z) = \frac{2x - 2y + 2z + 1}{12}.$$

*Berinde şi Borcut [**26**] au demonstrat existenţa şi unicitatea punctului triplu fix al lui T, respectiv $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$, folosind $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20}\right)$.*

Pentru $k = \frac{1}{2}$, T satisface condiţia de contracţie (3.35), adică,

$$d(T(x, y, z), T(u, v, w)) \leq \frac{\kappa}{3} \left[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)\right],$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$, unde $x \geq u$, $y \leq v$ şi $z \geq w$.

Aplicând Corolarul 3.12, obţinem că iteraţia de puncte triple fixe definită prin (2.25) este stabilă în raport cu T.

CAPITOLUL 6

Concluzii

Teoria punctului fix are un rol important în domeniul analizei neliniare, evoluând expansiv în ultimii ani şi obţinându-se multe rezultate practice.

Pornind de la rezultatul fundamental, respectiv Principiul contracţiei al lui Picard-Banach-Caccioppoli [**11**], literatura de specialitate s-a îmbogăţit cu nenumărate aplicaţii ale ecuaţiilor funcţionale, diferenţiale, intergale etc.

Pentru a rezolva o ecuaţie neliniară, am apelat la aproximarea punctelor fixe pentru operatorii de contracţie. Dintre metodele existente pentru a aproxima punctele fixe, am studiat iteraţia Picard şi iteraţia de tip Jungck.

Determinarea stabilităţii acestor metode este foarte importantă în aplicaţii practice, deoarece, în timpul procesului de calcul, o iteraţie de punct fix stabilă va produce mici modificări valorii aproximate a punctului fix.

Conceptul de stabilitate pentru metodele iterative de punct fix a fost studiat în mod sistematic de către Harder [**44**], Harder şi Hicks [**45**], [**46**], iar apoi, pornind de la rezultatele lor, mulţi cercetători au continuat studiul pentru diferite metode iterative şi utilizând categorii variate de operatori neliniari.

În această lucrare, este tratată problema stabilităţii metodelor iterative de punct fix, punct fix comun, puncte de coincidenţă şi puncte fixe triple, pentru anumite clase de operatori.

În capitolul intitulat **Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definite în mod explicit**, prezentăm noţiunea de stabilitate a metodelor iterative de punct fix şi facem o trecere în revistă a celor mai importante contribuţii din acest domeniu.

Berinde [**22**] a introdus un concept natural de stabilitate, numit *stabilitate slabă*, iar noi am transpus această noţiune pentru cazul în care avem doi operatori S şi T, cu un punct de coincidenţă, denumind (S,T)-*stabilitate slabă*.

Totodată, am obţinut anumite rezultate de stabilitate pentru metode iterative de punct fix comun, în spaţiul metric (X, d), cu $Y \subset X$ şi doi operatori $S, T : Y \to X$ cu un punct de coincidenţă, care satisfac condiţiile:

(i) $d(Tx, Ty) \leq qd(Sx, Sy)$, pentru orice $x, y \in Y$ şi $q \in (0, 1)$;

(ii) $d(Tx, Ty) \leq qd(Sx, Sy) + Ld(Sx, Tx)$, $\forall x, y \in Y$, $q \in (0, 1)$ şi $L \geq 0$.

Din cauză că unele metode iterative de punct fix nu sunt slab stabile iar în cazul lor, nu se poate determina stabilitatea decât în contextul unei noi definiţii, am introdus conceptul de *w^2-stabilitate*.

Prin urmare, am prezentat câteva rezultate de stabilitate în spaţiul metric complet (X, d), folosind un operator $T : X \to X$, care satisface condiţiile:

(1) $d(Tx, Ty) < \max \{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$;
(2) $d(Tx, Ty) < \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y)\}$;
(3) $d(Tx, Ty) < \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$;
(4) $d(Tx, Ty) < \max \left\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, y), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}$;

pentru orice $x, y \in X$ şi $x \neq y$.

Mai mult, am obţinut rezultate de stabilitate în spaţiul metric complet (X, d), pentru operatorii $S, T : X \to X$ cu un punct de coincidenţă, care satisfac condiţiile:

(1) $d(Tx, Ty) < \max \{d(Sx, Tx), d(Sy, Ty)\}$;
(2) $d(Tx, Ty) < \max \{d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}$;
(3) $d(Tx, Ty) < \max \{d(Sx, Tx), d(Sy, Ty), d(Sx, Sy)\}$;
(4) $d(Tx, Ty) < \max \{d(Sx, Tx), d(Sy, Ty), d(Sx, Sy), d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}$;
(5) $d(Tx, Ty) < \max \left\{d(Sx, Tx), d(Sy, Ty), d(Sx, Sy), \frac{d(Sx,Ty)+d(Sy,Tx)}{2}\right\}$;

pentru orice $x, y \in X$ şi $x \neq y$.

De asemenea, am prezentat câteva exemple de iteraţii slab stabile, respectiv iteraţii w^2-stabile care nu erau stabile, în raport cu T, respectiv în raport cu (S, T).

Acest studiu poate fi extins şi în cazul altor metode iterative de punct fix, cum ar fi iteraţia Ishikawa sau Mann.

În capitolul intitulat **Stabilitatea metodelor iterative de punct fix, punct fix comun şi puncte de coincidenţă pentru operatori ce satisfac condiţii de contracţie definiţi în mod implicit**, am continuat studiul stabilităţii iteraţiei Picard şi, de asemenea, al iteraţiei de tip Jungck, pentru puncte fixe comune şi puncte de coincidenţă, în cazul operatorilor de contracţie care satisfac anumite relaţii implicite, cu număr diferit de parametri.

Folosind mulţimea tuturor funcţiilor reale continue introduse de Popa [**70**], $F : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, cu următoarele condiţii:

(1) F este continuu în fiecare variabilă;
(2) există $h \in [0,1)$, astfel încât, pentru orice $u, v, w \geq 0$, avem
- $F(u,v,u,v,w) \leq 0$, sau
- $F(u,v,v,u,w) \leq 0$,

atunci $u \leq h \max\{v,w\}$,

am determinat un rezultat general de stabilitate pentru iteraţia Picard, în spaţiul metric complet (X,d), pentru un operator $T : X \to X$, cu $Fix(X) \neq \emptyset$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx,Ty), d(x,y), d(x,Ty), d(y,Tx), \frac{d(x,Tx)+d(y,Ty)}{2}\right) \leq 0.$$

De asemenea, am prezentat un rezultat de stabilitate pentru metoda iterativă de punct fix comun de tip Jungck, folosind operatori slab compatibili, care satisfac proprietatea (E.A) şi sunt definiţi cu ajutorul unei condiţii implicite în spaţiul metric complet (X,d), respectiv $S, T : X \to X$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx,Ty), d(Sx,Sy), d(Sx,Ty), d(Sy,Tx), \frac{d(Sx,Tx)+d(Sy,Ty)}{2}\right) \leq 0.$$

Pe de altă parte, utilizând mulţimea tuturor funcţiilor reale continue introduse de Popa [**71**], [**72**], $F : \mathbb{R}_+^6 \to R_+$, care satisfac condiţiile:

(1) (a) F este descrescătoare în variabila a cincea şi
$F(u,v,v,u,u+v,0) \leq 0,\ u,v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0,1),\ u \geq hv$;
(b) F este descrescătoare în variabila a patra şi
$F(u,v,0,u+v,u,v) \leq 0,\ u,v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0,1),\ u \geq hv$;
(c) F este descrescătoare în variabila a treia şi
$F(u,v,u+v,0,v,u) \leq 0,\ u,v \geq 0 \Longrightarrow \exists h \in [0,1),\ u \geq hv$;
(2) $F(u,u,0,0,u,u) > 0$, pentru orice $u > 0$,

am determinat rezultate de stabilitate pentru metoda iterativă de punct fix comun, în spaţiul metric complet (X,d), pentru doi operatori $S, T : X \to X$, $Fix(X) \neq \emptyset$, pentru care există $F \in \mathbb{F}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$,

$$F\left(d(Tx,Ty), d(Sx,Sy), d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), d(Sx,Ty), d(Sy,Tx)\right) \leq 0.$$

Studiul stabilităţii poate fi extins şi pentru alte metode iterative, cum ar fi iteraţia Ishikawa sau Mann, pentru alte condiţii de contracţie, sau modificând numărul de parametri.

Ideea celui de-al patrulea capitol, denumit **Un nou punct de vedere asupra stabilităţii metodelor iterative de punct fix**, se datorează Dlui. Prof. I. A. Rus [**81**], care a unificat noţiunile de stabilitate din domeniul ecuaţiilor diferenţiale, sistemelor dinamice, teoria operatorilor şi din analiza numerică, prin noi noţiuni.

Luând în considerare aceste noţiuni, am determinat stabilitatea iteraţiei Picard pentru operatori care satisfac diferite condiţii de contracţie. De asemenea, am studiat legătura dintre conceptele de stabilitate, respectiv dintre cel introdus de Harder [**44**] şi cel introdus de Rus [**81**].

Am obţinut rezultate de stabilitate în spaţiul metric (X, d), pentru un operator $T : X \to X$, care pentru orice $x, y \in X$, satisface condiţiile:

(1) $d(Tx, Ty) \leq \delta_u d(x, y) + L_u d(x, Tx)$, $\delta_u \in [0, 1)$, $L_u \geq 0$;

(2) $d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + L \min\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$, $\delta \in (0, 1)$, $L \geq 0$.

De asemenea, am prezentat câteva exemple de operatori care satisfac anumite condiţii de contracţie, pentru care iteraţia Picard asociată nu a fost stabilă în sensul lui Harder, dar a fost totuşi stabilă în sensul lui Rus.

Pe de altă parte, am transpus noţiunea de stabilitate introdusă de Rus [**81**], pentru iteraţii de puncte fixe comune şi am studiat legătura dintre conceptul de stabilitate dat de Singh şi Prasad [**88**], dat pentru o pereche de operatori (S, T) cu un punct de coincidenţă şi noul concept introdus.

Am prezentat apoi rezultate de stabilitate pentru metoda iterativă de tip Jungck, în raport cu doi operatori care, pentru orice $x, y \in X$, satisfac condiţiile:

(1) $d(Tx, Ty) \leq ad(Sx, Sy)$, $a \in [0, 1)$;

(2) $d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(Sx, Ty), d(Sy, Tx)\}$, $h \in [0, 1)$.

Studiul poate fi extins, de asemenea, pentru alte metode iterative, cum ar fi iteraţia Ishikawa sau Mann, sau pentru alte condiţii de contracţie.

O problemă deschisă ar fi determinarea stabilităţii în sens Rus, în cazul unor operatori neexpansivi sau a unor aproape contracţii, care nu satisfac o condiţie de unicitate.

În capitolul intitulat **Stabilitatea metodelor iterative de puncte triple fixe**, am introdus conceptul de stabilitate pentru metodele iterative de puncte triple fixe, obţinând rezultate în cazul operatorilor mixt monotoni şi monotoni, care satisfac anumite condiţii de contracţie, obţinute prin extinderea de la punctele fixe cuplate, studiate de Olatinwo [**60**], la punctele triple fixe.

Am obţinut rezultate de stabilitate pentru iteraţii de puncte triple fixe, pe spaţiul metric (X, d), pentru operatori $T : X^3 \to X$, în cazul de monotonie, respectiv în cazul de mixt monotonie a lui T, fiind satisfăcute următoarele condiţii:

(1) pentru $k \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\rho \geq 0$, $k + \mu + \rho < 1$,

$$d(T(x,y,z), T(u,v,w)) \leq kd(x,u) + \mu d(y,v) + \rho d(z,w);$$

(2) pentru $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \geq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 < 1$, $b_1 + b_2 + b_3 < 1$,

$$d\left(T(x,y,z), T(u,v,w)\right) \leq a_1 d\left(T(x,y,z), x\right) + b_1 d\left(T(u,v,w), u\right);$$

$$d\left(T(y,x,z), T(v,u,w)\right) \leq a_2 d\left(T(y,x,z), y\right) + b_2 d\left(T(v,u,w), v\right);$$

$$d\left(T(w,y,x), T(z,v,u)\right) \leq a_3 d\left(T(z,y,x), z\right) + b_3 d\left(T(w,v,u), w\right);$$

(3) pentru $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \geq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 < 1$, $b_1 + b_2 + b_3 < 1$,

$$d\left(T(x,y,z), T(u,v,w)\right) \leq a_1 d\left(T(x,y,z), u\right) + b_1 d\left(T(u,v,w), x\right);$$

$$d\left(T(y,x,z), T(v,u,w)\right) \leq a_2 d\left(T(y,x,z), v\right) + b_2 d\left(T(v,u,w), y\right);$$

$$d\left(T(w,y,x), T(z,v,u)\right) \leq a_3 d\left(T(z,y,x), w\right) + b_3 d\left(T(w,v,u), z\right);$$

$\forall x, y, z, u, v, w \in X$.

Mai mult, am ilustrat aceste rezultate şi cu un exemplu.

Studiul acesta poate fi extins folosind şi alte condiţii de contracţie, pentru operatori care satisfac diferite proprietăţi.

Bibliografie selectivă

[1] Aamri, M. şi El Moutawakil, D., *Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions*, J. Math. Anal. Appl. **270** (2002), 181-188

[2] Abbas, M., Ali Khan, M. şi Radenovic, S., *Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), no. 1, 195-202

[3] Abbas, M., Aydi, H. şi Karapinar, E., *Tripled fixed point of multivalued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*, Hindawi Publ. Corp., Abstr. Appl. Anal. **2011** (2011), ID 812690

[4] Abbas, M. şi Jungck, G., *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), no. 1, 416Ű420

[5] Ali, J. şi Imdad, M., *Unifying a multitude of common fixed point theorems employing an implicit relation*, Commun. Korean Math. Soc. **24** (2009), no. 1, 41-55

[6] Aliouche, A., *Common fixed point theorems via an implicit relation and new properties*, Soochow J. Math. **33** (2007), no. 4, 593-601

[7] Amini-Harandi, A., *Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem*, Math. Comput. Modelling (2012), Article in Press

[8] Aydi, H. şi Karapinar, E., *Triple fixed point in ordered metric spaces*, Bull. Math. Anal. Appl. **4** (2012), no. 1, 197-207

[9] Aydi, H., Karapinar, E. şi Vetro, C., *Meir-Keeler Type Contractions for Tripled Fixed Points*, Acta Math. Sci. **32**(6) (2012), 2119-2130

[10] Babu, G.V.R., Sandhya, M.L. şi Kameswari, M.V.R., *A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions*, Carpathian J. Math. **24** (2008), no.1, 8-12

[11] Banach, S., *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133-181

[12] Berinde, M. şi Berinde, V., *On a general class of multivalued weakly Picard mappings*, J. Math. Anal. Appl. **326** (2007), 772-782

[13] Berinde, V., *Approximating common fixed points of noncommuting almost contractions in metric spaces*, Fixed Point Theory, **11** (2010), no. 2, 179-188

[14] Berinde, V., *Approximating fixed points of implicit almost contractions*, Hacet. J. Math. Stat. **40** (2011) (accepted)

[15] Berinde, V., *Approximation fixed points of weak contractions using Picard iteration*, Nonlinear Anal. Forum **9** (2004), no. 1, 43-53

[16] Berinde, V., *Common fixed points of noncommuting almost contractions in cone metric spaces*, Math. Commun. **15** (2010), no. 1, 229-241

[17] Berinde, V., *Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*, Comput. Math. Appl., Article in Press

[18] Berinde, V., *Coupled fixed point theorems for ϕ-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **76** (2012), no. 6, 3218-3228

[19] Berinde, V., *Error estimates for approximating fixed points of quasi contractions*, General Math. **13** (2005), no. 2, 23-34

[20] Berinde, V., *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered meric spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 7347-7355

[21] Berinde, V., *Iterative Approximation of Fixed Points*, Editura Efemeride, 2002

[22] Berinde, V., *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer Verlag, Lectures Notes in Mathematics, 2007

[23] Berinde, V., *On the stability of some fixed point procedures*, Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Fasc. Mat.-Inf., vol. XVIII (2002), no. 1, 7 - 14

[24] Berinde, V., *Stability of Picard iteration for contractive mappings satisfying an implicit relation*, Carpathian J. Math. **27** (2011), no. 1, 01-11

[25] Berinde, V., *Summable almost stability of fixed point iteration procedures*, Carpathian J. Math. **19** (2003), no. 2, 81-88

[26] Berinde, V. şi Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 4889-4897

[27] Bhaskar, T.G. şi Lakshmikantham, V., *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65** (2006), no. 7, 1379-1393

[28] Bianchini, R.M.T., *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Boll. Unione. Mat. Ital. **4**(5) (1972), 103-106

[29] Borcut, M., *Tripled coincident point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), 7339-7346

[30] Borcut, M., *Tripled coincidence theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Creat. Math. Inform. **21** (2012), no. 2, 135-142

[31] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Carpathian J. Math. **28** (2012), no.2, 215-222

[32] Borcut, M. şi Berinde, V., *Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), no. 10, 5929-5936

[33] Buică, A., *Principii de coincidenţă şi aplicaţii (Coincidence Principles and Applications)*, Presa Universitară Clujeană (in Romanian), 2001

[34] Charoensawan, P., *Tripled fixed points theorems for ø-contractive mixed monotone operators on partially ordered metric spaces*, Appl. Math. Sci. **6** (2012), 5229-5239

[35] Chatterjea, S.K., *Fixed point theorems*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **25** (1972), 727-730

[36] Choudhury, B.S. şi Kundu, A., *A coupled coincidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 2524-2531

[37] Ciric, L.B., *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 267-273

[38] Ciric, L.B., *Generalized contractions and fixed point theorems*, Publ. l'Inst. Math. (Beograd) **12** (1971), 19-26

[39] Ciric, L.B., *Fixed points for generalized multi-valued contractions*, Mat. Vesnik **9** (24) (1972), 265-272

[40] Ciric, L.B. şi Lakshmikantham, V., *Coupled random fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Stoch. Anal. Appl. **27** (2009), 1246-1259

[41] Czerwik, S., Dlutek, K. şi Singh, S.L., *Round-off stability of iteration procedures for operators in b-metric spaces*, J. Natur. Phys. Sci. **11** (1997) 87-94

[42] Eirola, T., Nevanlinna, O. şi Pilyugin, S. Yu., *Limit shadowing property*, Numer. Funct. Anal. Optim. **18** (1997) 75-92

[43] Goebel, K., *A coincidence theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. **16** (1968) 733-735

[44] Harder, A.M., *Fixed point theory and stability results for fixed point iteration procedures*, Ph.D. Thesis, University of Missouri-Rolla, Missouri, 1987

[45] Harder, A.M. şi Hicks, T.L., *A stable iteration procedure for nonexpansive mappings*, Math. Japon. **33** (1988) 687-692

[46] Harder, A.M. şi Hicks, T.L., *Stability results for fixed point iteration procedures*, Math. Japon. **33** (1988) 693-706

[47] Hardy, G.E. şi Rogers, T.D., *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16** (1973) 201-206

[48] Imdad, M. şi Ali, J., *Jungck's common fixed point theorem and E.A. property*, Acta Math. Sin. **24** (2008), no. 1, 87-94

[49] Imoru, C.O. şi Olatinwo M.O., *On the stability of Picard and Mann iteration processes*, Carpathian J. Math. **19** (2003), no. 2, 155-160

[50] Jungck, G., *Common fixed points for non-continuous non-self maps on non-metric spaces*, Far East J. Math. Sci. **4:2** (1996) 199-215

[51] Jungck, G., *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), no. 4, 261-263

[52] Jungck, G., *Compatible mappings and common fixed points*, Internat. J. Math. Sci. **9**(4) (1986), 771-779

[53] Kannan, R., *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc. **10** (1968), 71-76

[54] Karapinar, E., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in cone metric spaces*, Comput. Math. Appl. **59** (2010), no. 12, 3656-3668

[55] Lakshmikantham, V. şi Ciric, L.B., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 12, 4341-4349

[56] Liouville, J., *Sur les developpment des fonction ou parties de fonctions en series*, Second Memoire Journ. de Math. **2** (1837) 16-35

[57] Nadler, S.B., *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math.. **30** (1969), 475-488

[58] Olatinwo, M.O., *Coupled fixed point theorems in cone metric spaces*, Ann. Univ. Ferrara **57** (2011), no. 1, 173-180

[59] Olatinwo, M.O., *Some stability results in complete metric space*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. **48** (2009), 83-92

[60] Olatinwo, M.O., *Stability of coupled fixed point iteration and the continuous dependence of coupled fixed points*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **19** (2012), no. 2, 71-83

[61] Osilike, M.O., *Stability of the Ishikawa iteration method for quasi-contractive maps*, Indian J. Pure Appl. Math. **28** (9) (1997) 1251-1265

[62] Osilike, M.O., *Stability of the Mann and Ishikawa iteration procedures for ϕ-strong pseudo-contractions and nonlinear equations of the ϕ-strongly accretive type*, J. Math. Anal. Appl. **227** (1998), no. 2, 319-334

[63] Osilike, M.O., *Stability results for fixed point iteration procedure*, J. Nigerian Math. Soc. **14** (1995) 17-29

[64] Osilike, M.O., *Stability results for the Ishikawa fixed point iteration procedure*, Indian J. Pure Appl. Math. **26** (10) (1995) 937-945

[65] Osilike, M.O. şi Udomene, A., *Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive type mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. **30** (12) (1999) 1229-1234

[66] Ostrowski, A.M., *The round-off stability of iterations*, Z. Angew. Math. Mech. **47** (1967), no. 1, 77-81

[67] Păcurar, M, *Iterative methods for fixed point approximations*, Risoprint, Cluj-Napoca (2009)

[68] Pathak, H.K. şi Verma, R.K. *Coincidence and common fixed points in symmetric spaces under implicit relation and application*, Int. Math. Forum **3** (2008), no. 30, 1489-1499

[69] Picard, E., *Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximationes successives*, J. Math. Pures et Appl. **6** (1890) 145-210

[70] Popa, V., *A general fixed point theorem for two pairs of mappings on two metric spaces*, Novi Sad J. Math. **35** (2005), no. 2, 79-83

[71] Popa, V., *Fixed point theorems for implicit contractive mappings*, Stud. Cerc. St. Ser. Mat. Univ. Bacau **7** (1997), 127-133

[72] Popa, V., *Some fixed point theorems for compatible mappings satisfying an implicit relation*, Demonstratio Math. **32**(1) (1999), 157-163

[73] Rao, K.P.R., Kishore, G.N.V., *A Unique Common tripled fixed point theorem in partially ordered cone metric spaces*, Bull. Math. Anal. Appl. **3** (2011), no. 4, 213-222

[74] Reich, S., *Fixed points of contractive functions*, Boll. Unione Math. Ital. **4**(5) (1972), 26-42

[75] Reich, S., *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Unione Math. Ital. **4** (1971), 1-11

[76] Reich, S., *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull. **14** (1971), 121-124

[77] Rhoades, B.E.,*A comparison of various definitions of contractive mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **226** (1977), 257-290

[78] Rhoades, B.E.,*Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures*, Indian J. Pure Appl. Math. **21** (1990), no. 1, 1-9

[79] Rhoades, B.E.,*Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II*, Indian J. Pure Appl. Math. **24** (1993), no. 11, 691-703

[80] Rhoades B.E., *Some fixed point iteration procedures*, Int. J. Math. Sci. **14** (1991), no. 1, 1-16

[81] Rus, I.A., *An abstract point of view on iterative approximation of fixed points: impact on the theory of fixed point equations*, Fixed Point Theory **13** (2012), no. 1, 179-192

[82] Rus, I.A., *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca (2001)

[83] Rus, I.A., *Principles and applications of the fixed point theory*, Editura Dacia, Cluj-Napoca (1979)

[84] Sabetghadam, F., Masiha, H.P. şi Sanatpour, A.H., *Some coupled fixed point theorems in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2009** (2009), Article ID 125426

[85] Sessa, S., *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations*, Publ. Inst. Math. **32**(46) (1982) 149-153

[86] Singh, S.L., Bhatnagar, C. şi Mishra, S.N., *Stability of iterative procedures for multivalued maps in metric spaces*, Demonstratio Math., Vol.XXXVIII, no. 4 (2005), 905-916

[87] Singh, S.L., Bhatnagar, C. şi Mishra, S.N., *Stability of Jungck-type iterative procedures*, Int. J. Math. Sci. **19** (2005) 3035-3043

[88] Singh, S.L. şi Prasad, B., *Some coincidence theorems and stability of iterative procedures*, Comp. and Math. with Appl. **55**(2008) 2512 - 2520

[89] Singh, S.L. şi Chadha, V., *Round-off stability of iterations for multivalued operators*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **17** (5) (1995) 187 - 192

[90] Taskovic, M., *Fundamental elements of fixed point theory*, Matematicka biblioteka **50**, Beograd (1986)

[91] **Timiş, I.**, *New stability of Picard iteration for mappings defined by implicit relations* (material în lucru)

[92] **Timiş, I.**, *New stability results of Picard iteration for common fixed points and contractive type mappings* (material în lucru)

[93] **Timiş, I.**, *New stability results of Picard iteration for contractive type mappings* (trimis pentru publicare)

[94] **Timiş, I.**, *On the weak stability of fixed point iterative methods* (material în lucru)

[95] **Timiş, I.**, *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. **37** (2) (2010), 106-114

[96] **Timiş, I.**, *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings and coincidence theorems*, International Journal of Computer Applications **37** (4) (2012), 9-13

[97] **Timiş, I.**, *Stability of Jungck-type iterative procedure for some contractive type mappings via implicit relations*, Miskolc Math. Notes **13** (2) (2012), 555-567

[98] **Timiş, I.**, *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points and contractive mappings satisfying an implicit relation* (trimis pentru publicare)

[99] **Timiş, I.**, *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points and contractive mappings via implicit relations* (material în lucru)

[100] **Timiş, I.**, *Stability of the Picard iterative procedure for mappings which satisfy implicit relations*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **19** (2012), no. 4, 37-44

[101] **Timiş, I.**, *Stability of tripled fixed point iteration procedures for mixed monotone mappings* (trimis pentru publicare)

[102] **Timiş, I.**, *Stability of tripled fixed point iteration procedures for monotone mappings*, Ann. Univ. Ferrara (2012) DOI 10.1007/s11565-012-0171-7

[103] **Timiş, I.**, *Weak stability of fixed point iterative procedures for certain classes of mappings* (material în lucru)

[104] **Timiş, I.**, *Weak stability of fixed point iterative procedures for multivalued mappings* (material în lucru)

[105] **Timiş, I.** şi Berinde, V., *Weak stability of iterative procedures for some coincidence theorems*, Creative Math. Inform. **19** (2010), 85-95

[106] Zamfirescu, T., *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. **23** (1972), 292-298

1. Addendă: Lista lucrărilor publicate şi a celor prezentate în cadrul unor conferinţe internaţionale

Această teză se bazează pe următoarele lucrări publicate în reviste de specialitate sau prezentate în cadrul unor conferinţe internaţionale:

I. Lista lucrărilor publicate:

1. Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 37 (2) (2010), 106-114

2. Timiş, I., *On the weak stability of Picard iteration for some contractive type mappings and coincidence theorems*, International Journal of Computer Applications 37 (4) (2012), 9-13

3. Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for some contractive type mappings via implicit relations*, Miskolc Math. Notes 13 (2) (2012), 555-567

4. Timiş, I., *Stability of the Picard iterative procedure for mappings which satisfy implicit relations*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 19 (2012), no. 4, 37-44

5. Timiş, I., *Stability of tripled fixed point iteration procedures for monotone mappings*, Ann. Univ. Ferrara (2012) DOI 10.1007/s11565-012-0171-7

6. Timiş, I. şi Berinde, V., *Weak stability of iterative procedures for some coincidence theorems*, Creative Math. Inform. 19 (2010), 85-95

II. Lista lucrărilor prezentate în cadrul unor conferinţe internaţionale:

1. Timiş, I., *New stability results of Picard iteration for common fixed points and contractive type mappings*, prezentată la SYNASC 2012, Timişoara, 26-29 Sept. 2012

2. Timiş, I., *On the weak stability of fixed point iterative methods*, prezentată la ICAM7, Baia Mare, 1-4 Sept. 2010

3. Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points and contractive mappings via implicit relations*, prezentată la ICAM8, Baia Mare, 27-30 Oct. 2011

III. Lista lucrărilor trimise spre publicare:

1. Timiş, I., *New stability results of Picard iteration for contractive type mappings*

2. Timiş, I., *Stability of Jungck-type iterative procedure for common fixed points and contractive mappings satisfying an implicit relation*

3. Timiş, I., *Stability of tripled fixed point iteration procedures for mixed monotone mappings*