Universitatea Tehnică Cluj Napoca
Facultatea de Ştiinţe

TEZĂ DE DOCTORAT

TEOREME DE PUNCT FIX IN SPAŢII METRICE ÎNZESTRATE CU UN GRAF

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Bojor Florin

Baia Mare
2012

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix este unul dintre cele mai puternice si mai productive instrumente din matematica modernă şi poate fi considerată ca fiind nucleul analizei neliniare. Evident cel mai cunoscut rezultat din teoria punctului fix este principiul contracţiilor lui Banach (1920), care poate fi considerat începutul acestei teori. În spaţii metrice acest principiu poate fi formulat astfel:

Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi operatorul $T : X \to X$ verifică condiţia

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \ \forall x, y \in X, \tag{0.1}$$

unde $a \in [0, 1)$. Atunci operatorul T are un unic punct fix care poate fi obţinut prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice punct din spaţiu.

Un astfel de operator care are un unic punct fix şi şirul aproximaţiilor succesive $(T^n x)_{n \geqslant 0}$converge către acel punct fix pentru orice $x \in X$ se numeşte *operator Picard*. În mare parte teoria metrică a punctului fix studiază condiţiile suficiente în care un operator este un operator Picard. Deci Principiul Contraţiilor a lui Banach spune că orice contracţie, adică un operator care verifică relaţia (0.1) este un operator Picard. Unul din modurile de generalizare şi extindere a Principiului Contracţiilor este înlocuirea condiţie de contracţie (0.1) cu una mai slabă sau cu una independentă de aceasta. Deoarece orice contracţie este un operator continuu, s-a pus urmatoare problema: *Există condiţii contractive care să nu implice continuitatea operatorului?*

Primul răspunsul afirmativ la acestă problemă a fost dat de R. Kannan [**38**] în 1968, care a demonstrat o teoremă de punct fix care extinde principiul contracţiilor la operatori care nu trebuie să fie continui, considerând în loc de (0.1) condiţia: există $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât

$$d(Tx, Tz) \leqslant b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right], \ \forall x, y \in X. \tag{0.2}$$

Urmând exemplul Teoremei lui Kannan, Chatterjea [**22**] a demonstrat o teoremă de punct fix în care condiţia de contracţie este duala relaţiei (0.2) şi anume: există $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât

$$d(Tx, Tz) \leqslant b\left[d(x, Ty) + d(y, Tx)\right], \ \forall x, y \in X. \tag{0.3}$$

Este binecunoscut faptul, vezi Rhoades [**57**], că cele trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) sunt independente.

Prin combinarea celor trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) L. Ćirić [**25**], S. Reich [**55**] şi I.A. Rus [**60**] au demonstrat o teoremă de punct fix în care au înlocuit condiţia de contracţie cu următoarea: există numerele reale pozitive a, b, c cu proprietatea $a+b+c < 1$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty), \ \forall x, y \in X \tag{0.4}$$

În 1972, T. Zamfirescu [**66**] a obţinut o teoremă de punct fix foarte interesantă prin combinarea celor trei condiţii (0.1), (0.2) şi (0.3) şi înlocuirea acestora cu următoarea condiţie: există trei numere reale $a \in [0, 1)$ şi $b, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $x, y \in X$ cel puţin una din următoarele condiţii este adevărată:

(z_1) $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y)$;
(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

O generalizare a Teoremei lui Kannan a fost făcută de R.M.T. Bianchini [**4**] prin inlocuirea condiţiei (0.2) cu următoarea: există $a \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant a \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}, \ \forall x, y \in X. \tag{0.5}$$

Conform clasificării făcute de Rhoades [**57**] numărul condiţiilor de contracţie existente în literatura de specialitate este 125, iar condiţiile de contracţie prezentate mai sus sunt cele pentru care în această lucrare au fost făcute extinderi şi generalizări.

În anul 2003 W. A. Kirk, P. S. Srinivasan şi P. Veeramani au intordus o nouă metodă de generalizare a condiţiei (0.1) şi anume reducerea numărului perechilor $(x, y) \in X \times X$ care să verifice condiţia de contracţie. Pentru aceasta au considerat că $A_1, A_2, ...A_p$, sunt p mulţimi nevide şi închise ale spaţiului X cu proprietatea $X = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ şi operatorul T verifică condiţiile:

(1) $T(A_i) \subseteq A_{i+1}, \ \forall i \in \{1, 2, ..., p\}$, unde $A_{p+1} = A_1$;
(2) $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \forall x \in A_i, \ \forall y \in A_{i+1}, \ cu \ i \in \{1, 2, ..., p\}$.

În aceste condiţii operatorul T are un unic punct fix.

Continuând pe aceeaşi idee A. C. M. Ran and M. C. B. Reurings [**51**] au considerat operatori pe spaţii metrice parţial ordonate, iar condiţia de contracţie (0.1) a fost înlocuită cu următoarea: există $a \in [0, 1)$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \ \forall x, y \in X, \ x \leqslant y, \tag{0.6}$$

unde " $\leq$ " este relaţia de ordine parţială din spaţiul X. Iar acestă condiţie (0.6) generalizează condiţia introdusă Kirk.

În 2008 J. Jachymski [**30**] a avut excelenta idee să folosească în loc de spaţii metrice parţial ordonate spaţii metrice înzestrate cu un graf orientat, iar condiţia de contracţie(0.1) să fie îndeplinită doar pentru muchiile grafului. Acest lucru înseamnă c̆dacă G este un graf orientat şi $E(G)$ este mulţimea muchiilor grafului atunci condiţia de contracţie este:

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y), \ \forall (x, y) \in E(G). \tag{0.7}$$

Pornind de la aceste rezultate, scopul tezei este de a face un studiu sistematic al teoremelor de punct fix în spaţii metrice înzestrate cu un graf. Condiţiile de contracţie pe care le vom folosi sunt: Kannan, Zamfirescu, Ćirić-Reich-Rus, $\varphi-$contracţii şi Bianchini.

Lucrarea de faţă este structurată în patru capitole, fiecare capitol fiind alcătuit din mai multe secţiuni.

În primul capitol sunt prezentate noţiunile de bază din teoria puctului fix, noţiuni pe care se construiesc conceptele introduse în această lucrare. Pe parcursul celor opt secţiuni, vom introduce notaţiile folosite în această lucrare, noţiunile de metrică şi spaţiu metric, mulţimile ordonate şi spaţiile metrice ordonate, grafurile, funcţiile de comparaţie, operatori pe spaţii metrice si teoremele de punct fix corespunzătoare, teoremele de punct fix pentru operatori în spaţii metrice ordonate şi pentru operatori ciclici.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt: Exemplele 1.4.1, 1.4.2, 1.6.4, Definiţia 1.4.4 şi Observaţia 1.4.3.

În capitolul la doilea vom prezenta noţiunea de Banach G-contracţie ̧introdusă de J. Jachymski în [**30**] si vom demonstra teoreme de punct fix pentru această noţiune. În continuare vom demonstra că Teoremele de punct fix în spaţii metrice ordonate, Teorema lui Edelstein, Teoremele de punct fix pentru operatori ciclici şi Alternativa punctului fix sunt consecinţe ale Teoremei 2.1.2. După care vom prezenta două aplicaţii ale Alternativei punctului fix la demonstrarea stabilităţii de tip Hyers-Ulam a ecuaţiilor funcţionale.

Contribuţiile originale ale autorului sunt: Teorema 2.2.7, în care se demonstrează stabilitatea de tip Hyers-Ulam generalizată pentru ecuaţia

$$f(a_1(x_1) + a_2(x_2) + ... + a_n(x_n)) = m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_n f(x_n), \tag{0.8}$$

Teoremele 2.2.8 şi 2.2.9 în care se demonstrează stabilitatea de tip Hyers-Ulam Rassias pentru ecuaţia

$$y'(x) + f(x) y(x) + g(x) = 0, \tag{0.9}$$

, Corolarele 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 care sunt corolarele celor două teoreme anterioare în care se demonstrează stabilitatea Hyers-Ulam a celor două ecuaţii, Lema 2.2.1, Concluzia 2.2 şi demonstraţiile Teoremelor 2.2.2 şi 2.2.3.

În Capitotlul al treilea vom extinde teoremele clasice de punct fix obţinute de Kannan, Zamfirescu, Reich-Ćirić-Rus, Bianchini pentru cazul spaţiilor metrice înzestrate cu un graf. Din aceste extinderi vom deduce teoreme de punct fix în spaţii metrice ordonate şi pentru operatori ciclici. Pentru fiecare concept nou introdus vom demonstra că extinderea nu este trivială prin exemple de operatori care verifică condiţiile respective.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt:
Definiţiile 3.1.1,3.2.1,3.3.1,3.4.1,3.5.1, in care se definiesc noţiunile de operatori G-Kannan, G-Zamfirescu, GĆirić-Reich-Rus, (G, φ)-contracţii şi operator G-Zamfirescu
Teoremele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.2,în care se demonstrează teoreme de punct fix pentru operatorii de mai sus
Corolarele 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1, în care particularizând grafurile din teoremele prezentate vom obţine teoreme de punct fix în spaţii metrice ordonate şi pentru operatori ciclici,
Lemele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1, 3.5.2,
Exemplele 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.2, 3.3.3,3.3.4, 3.4.2,3.4.3, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.4,
Observaţiile 3.1.1, 3.1.2, 3.2.3, 3.2.2,
demonstraţiile Teoremelor 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2, 3.4.4, 3.5.3 şi Propoziţia 3.4.1.

În Capitolul 4 vom extinde teoremele de punct fix din Capitolul 3 în cazul spaţiilor metrice G complete definind iniţial acest concept şi la teoreme de tip Maia.

Contribuţiile autorului din acest capitol sunt: Definiţia 4.1.2, Exemplul 4.1.1 şi Teoremele 4.1.1, 4.2.2

CAPITOLUL 1

Preliminarii

Există o multitudine de spaţii în care sunt enunţte şi demonstrate teoremele de punct fix: spaţii metrice, spaţii topologice, spaţii uniforme şi spaţii metrice parţial ordonate. Având în vedere faptul că în teza de faţă spaţiul ambiental este spaţiu metric înzestrat cu un graf, vom prezenta doar noţiunile strict necesare pentru a crea cadrul în care vom prezenta rezultatele importante ale tezei.

Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt: Exemplele 1.4.1, 1.4.2, 1.6.4, Definiţia 1.4.4 şi Observaţia 1.4.3.

1. Noţiuni de bază şi notaţii

Fie X o mulţime nevidă şi $f : X \to X$ un operator. Vom nota cu:

$\mathcal{P}(X) = \{Y \,|Y \subset X\}$ -mulţimea submulţimilor lui X;

$P(X) = \{Y \,|Y \subset X\}$ -mulţimea submulţimilor nevide lui X;

$P_b(X)$, $P_{cl}(X)$, $P_{cp}(X)$ -mulţimea submulţimilor nevide, mărginite, închise respectiv compacte a lui X;

$f^0 = 1_X, f^1 = f, f^2 = f \circ f, ..., f^n = f \circ f^{n-1}$ -iteratele funcţiei f;

$I(f) = \{A \in P(X) \,| f(A) \subseteq A\}$ -mulţimea submulţimilor invariante în raport cu f;

$F_f = \{x \in X \,| f(x) = x\}$ -mulţimea punctelor fixe a lui f.

Let X, Y două mulţimi nevide şi $f, g : X \to Y$ doi operatori. Vom nota prin

$$C(f, g) = \{x \in X \,| f(x) = g(x)\}$$

mulţime punctelor de coincidenţă a lui f şi g.

2. Spaţii metrice

Următoarele definiţii şi exemple sunt binecunoscute, vezi de exemplu [**21**], [**28**] sau [**62**].

Definiţia 1.2.1. *Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se numeşte* ***metrică*** *sau* ***distanţă*** *pe X dacă:*

i. $d(x, y) = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = y$*;*

ii. $d(x, y) = d(y, x), \forall\, x, y \in X$*;*

iii. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

*Dacă d este o metrică pe mulţimea nevidă X atunci perechea (X, d) se numeşte **spaţiu metric**.*

Exemplul 1.2.1. *Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi*

$$d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, ...x_n), \ y = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

atunci d este o metrică pe $\mathbb{R}^n$, numită metrica euclidiană. Următoarele două funcţii:

$$\delta(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

sunt de asemenea metrice pe $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 1.2.2. *Fie $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, | \, f \text{ continuă}\}$. Atunci funcţia*

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \text{ pentru orice } f, g \in X$$

este o metrică pe X, numită metrica Cebîşev.

Definiţia 1.2.2. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Un şir $\{x_n\}_{n \geqslant 0} \subset X$ se numeşte:*

*a. **fundamental** sau **Cauchy** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \text{ şi pentru orice } p \in \mathbb{N}.$$

*b. **convergent** la $\ell \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$d(x_n, \ell) < \varepsilon \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$$

Observaţia 1.2.1. *Într-un spaţiu metric orice şir convergent este fundamental, dar reciproca nu este adevărată în general.*

Definiţia 1.2.3. *Un spaţiu metric (X, d) se numeşte **complet** dacă orice şir fundamental este convergent.*

Exemplul 1.2.3. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $X = \mathbb{R}^n$. Atunci (X, d) este un spaţiu metric complet unde d este metrica euclidiană.*

Exemplul 1.2.4. *Fie $X = \mathbb{Q}$ şi $d(x, y) = |x - y|, \forall \, x, y \in \mathbb{Q}$. Atunci (X, d) este un spaţiu metric care nu e complet deoarece şirul*

$$\{x_n\}_{n \geqslant 1}, \ x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

este un şir fundamental dar nu este convergent în $\mathbb{Q}$.

Referitor la convergenţa unui şir de operatori, pe parcursul acestei lucrări vom folosi urătoarele definiţii:

Definiţia 1.2.4. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $f_n, f : X \to X, n \in \mathbb{N}$. *Şirul* $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ *se numeşte:*

a. ***uniform convergent*** *la* f *şi notăm* $f_n \xrightarrow{u} f$ *când* $n \to \infty$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *şi orice* $x \in X$ *avem că:*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

b. ***converge punctual*** *la* f *şi notăm notăm* $f_n \xrightarrow{p} f$ *când* $n \to \infty$, *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *si orice* $x \in X$ *există* $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geqslant N(\varepsilon, x)$ *avem că:*

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

3. Mulţimi ordonate. Spaţii metrice parţial ordonate

Definiţia 1.3.1. *Fie* X *o mulţime nevidă. Dacă* R *este o submulţime a produsului cartezian* $X \times X$ *atunci perechea* (X, R) *se numeşte relaţie binară pe* X. *Dacă* $x, y \in X$ *sunt în relaţia* R *atunci vom nota* xRy *sau* $(x, y) \in R$.

Definiţia 1.3.2. *Fie* R *o relaţie binară pe* X. *Relaţia* R *se numeşte:*

a. ***reflexivă*** *dacă* $xRx, \forall x \in X$;

b. ***tranzitivă*** *dacă* xRy *şi* yRz *atunci* xRz;

c. ***simetrică*** *dacă* xRy *atunci* yRx;

d. ***antisimetrică*** *dacă* xRy *şi* yRx *atunci* $x = y$.

Definiţia 1.3.3. *O relaţie binară pe* X *reflexivă, tranzitivă şi simetrică se numeşte* ***relaţie de echivalenţă****.*

Exemplul 1.3.1. *Pe* $\mathbb{C}$ *definim relaţia* R *prin* $z_1 R z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$, *atunci* R *este o relaţie de echivalenţă pe* $\mathbb{C}$.

Definiţia 1.3.4. *Fie* R *o relaţie de echivalentă pe* X.

a. Mulţimea notată

$$[x]_R \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \,|yRx\}$$

se numeşte ***clasa de echivalentă*** *a elementului* $x \in X$.

b. Mulţimea notată

$$X\Big|_R \overset{\text{def}}{=} \{[x]_R \,|x \in X\}$$

se numeşte ***mulţime factor*** *sau* ***mulţime cât*** *a lui* X *în raport cu relaţia* R.

Exemplul 1.3.2. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$. *Pe* $\mathbb{Z}$ *definim relaţia de congruenţă modulo* n *prin* $x \equiv y(\text{mod } n)$ *dacă* $x - y$ *este divizibil cu* n. *Atunci relaţia de congruenţă modulo* n *este o relaţie de echivalenţă pe* $\mathbb{Z}$ *şi mulţime cât a lui* $\mathbb{Z}$ *în raport cu această relaţie este*

$$\mathbb{Z}\Big|_{\equiv} \overset{not}{=} \mathbb{Z}_n = \left\{\widehat{0}, \widehat{1}, ..., \widehat{n-1}\right\}$$

unde $\widehat{r} = [r]_{\equiv}$ *pentru orice* $r = \overline{0...n-1}$.

Definiţia 1.3.5. *O relaţie binară pe* X *reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică se numeşte* ***relaţie de ordine*** *sau relaţie de ordine parţială şi în acest caz perechea* (X, R) *se numeşte mulţime ordonată sau mulţime parţial ordonată.*

Observaţia 1.3.1. *Dacă* R *este o relaţie de ordine pe mulţimea* X *vom folosi notaţiile* $x \leqslant y$ *care va însemna* xRy, $x \geqslant y$ *pentru* yRx, *respectiv* $x < y$ *pentru* xRy *şi* $x \neq y$, *unde* $x, y \in X$.

Definiţia 1.3.6. *Fie* $(X, \leqslant)$ *o mulţime ordonată. Două elemente* $x, y \in X$ *se numesc* ***comparabile*** *dacă* $x \leqslant y$ *sau* $x \geqslant y$. *În caz contrar ele se numesc* ***incomparabile***. *O mulţime ordonată în care orice două elemente sunt comparabile se numeşte mulţime* ***total ordonată***.

Exemplul 1.3.3. *Fie* " $\leqslant$ " *relaţia de ordine naturală pe* $\mathbb{R}$, *atunci* $(\mathbb{R}, \leqslant)$ *este o mulţime total ordonată.*

Exemplul 1.3.4. *Mulţimea* $(\mathbb{N}, |)$ *este o mulţime parţial ordonată, unde* " $|$ " *este relaţia de divizibilitate pe* $\mathbb{N}$.

Definiţia 1.3.7. *Fie* $(X, \leqslant)$ *o mulţime ordonată şi* $A \subseteq X$. *Atunci mulţimea* A *se numeşte:*

a. ***mărginită superior*** *dacă există* $M \in X$ *astfel încât* $x \leq M$, *pentru orice* $x \in A$;
b. ***mărginită inferior*** *dacă există* $m \in X$ *astfel încât* $m \leq x$, *pentru orice* $x \in A$;
c. ***mărginită*** *dacă este mărginită superior şi inferior.*

Definiţia 1.3.8. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Dacă* " $\leqslant$ " *este o relaţie de ordine parţială pe* X *atunci tripletul* $(X, d, \leqslant)$ *se numeşte spaţiu metric parţial ordonat.*

4. Grafuri

Următoarele definiţii şi exemple sunt binecunoscute, vezi de exemplu [**26**] sau [**37**].

Definiţia 1.4.1. *Un **graf orientat** G este o pereche ordonată $(V(G), E(G))$ formată dintr-o mulţime nevidă $V(G)$ de **noduri** şi o mulţime $E(G)$ de **muchii** sau **arce**, disjunctă faţă de $V(G)$ împreună cu o funcţie de incidenţă ψ_G care asociază fiecărei muchii din G o pereche ordonată de noduri(nu neapărat distincte) din $V(G)$.*

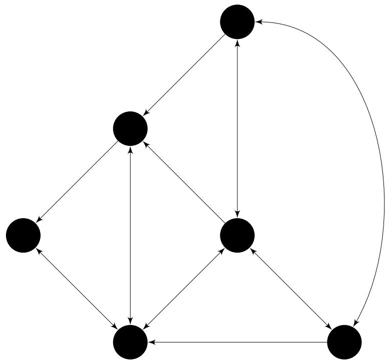

Fig. 1 *Graf orientat G*

Observaţia 1.4.1. *Dacă în definiţia 1.4.1 funcţia ψ_G asociază fiecărei muchii din G o pereche neordonată de noduri(nu neapărat distincte) din $V(G)$ atunci G se numeşte **graf neorientat** (Vezi Fig.2).*

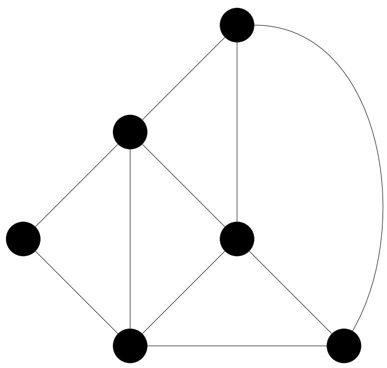

Fig. 2 *Graful neorientat obţinut din G*

Dacă $\psi_G(e) = (a, b)$ atunci vom spune că a şi b sunt nodurile incidente muchiei e sau că muchia e uneşte nodurile a şi b. Dacă $\psi_G(e) = (a, a)$ atunci muchia e se numeşte **buclă** a grafului G. Grafurile în care mulţimea nodurilor este finită se pot reprezenta grafic, proprietate din care provine numele noţiunii. Nodurile unui graf le vom reprezenta prin puncte iar muchiile printr-o curbă sau un segment care uneşte cele două noduri incidente.

Inversul grafului orientat G este graful notat G^{-1} şi care se obţine din G prin înlocuirea fiecărei muchii $(a, b) \in E(G)$ cu muchia opusă adică (b, a). Prin urmare avem că:

$$V\left(G^{-1}\right) = V(G) \text{ şi } E\left(G^{-1}\right) = \{(b, a) \mid (a, b) \in E(G)\}$$

Vom nota cu $\tilde{G}$ graficul obţinut din G prin adăugarea muchiilor opuse ale lui G şi vom obţine că:

$$V\left(\tilde{G}\right) = V\left(G\right) \text{ şi } E\left(\tilde{G}\right) = E\left(G\right) \cup E\left(G^{-1}\right) \tag{1.10}$$

Graful $\tilde{G}$ este un graf orientat în care mulţimea muchiilor este simetrică.

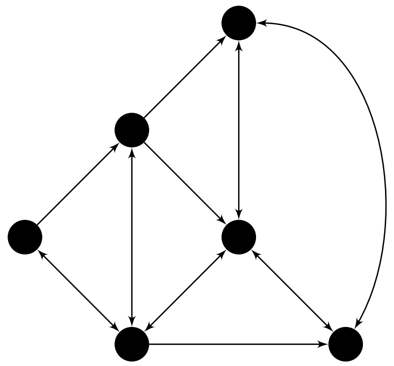

Fig. 3 *Inversul grafului G*

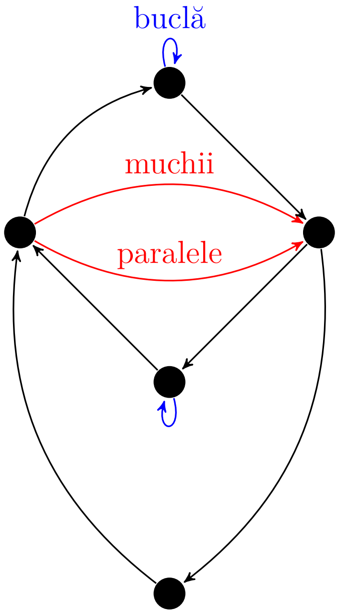

Fig. 4 Graf care conţine muchii paralele (multigraf) şi bucle

Vom spune că (V', E') e un subgraf a lui G dacă $V' \subseteq V(G)$, $E' \subseteq E(G)$ şi pentru orice muchie $(x, y) \in E'$, $x, y \in V'$.

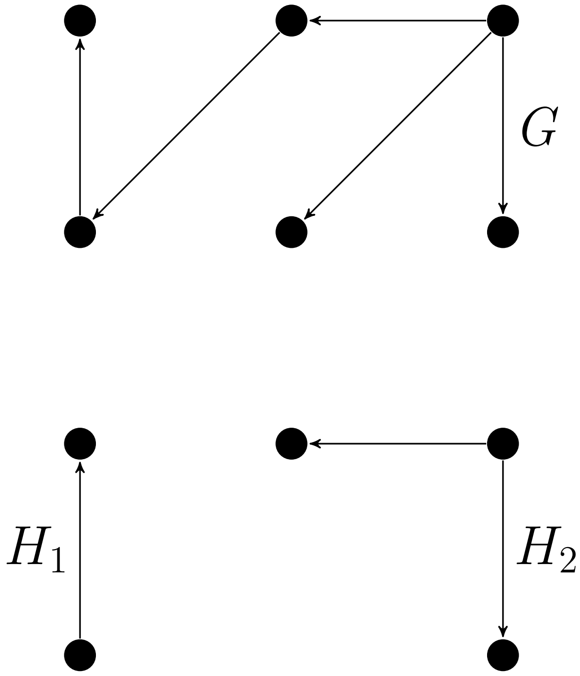

Fig.5 H_1 şi H_2 sunt subgrafuri ale lui G

În continuare vom prezenta câteva noţiuni privind conectivitatea unui graf orientat.

Definiţia 1.4.2. *Dacă x şi y sunt noduri ale grafului orientat G, atunci un* ***drum*** *în G de la x la y de lungime N $(N \in \mathbb{N})$ este un şir $(x_i)_{i=0}^{N}$ de $N+1$ noduri astfel încât $x_0 = x$, $x_N = y$ şi $(x_{n-1}, x_n) \in E(G)$ pentru $i = 1, ..., N$.*

Definiţia 1.4.3. *Un graf orientat G se numeşte* ***conex*** *dacă există cel puţin un drum între orice două noduri din G. Iar G se numeşte* ***slab conex*** *dacă $\tilde{G}$ este conex.*

Dacă graful orientat G are mulţimea muchiilor $E(G)$ simetrică şi x este un nod din G, atunci subgraful notat G_x format din toate muchiile şi nodurile care sunt conţinute într-un drum oarecare care pleacă din x se numeşte componenta conexă a lui G care-l conţine pe x. În acest caz $V(G_x) = [x]_G$, unde $[x]_G$ este clasa de echivalenţă a lui x în raport cu relaţia R definită pe $V(G)$ prin:

$$yRz \text{ dacă există un drum în } G \text{ de la } y \text{ la } z.$$

Este clar că G_x este conex.

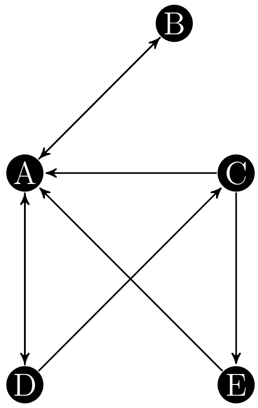

Fig. 6 Graf conex. B-A-D-C este un drum de lungime 3

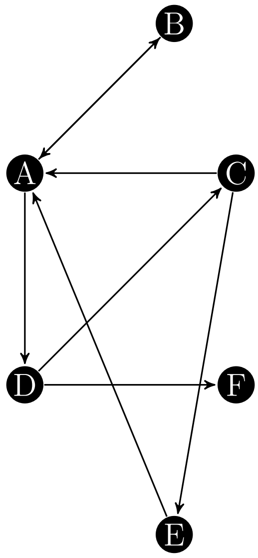

Fig. 7 Graf slab conex dar care nu e conex

Observaţia 1.4.2. *Graful din* Fig. 7 *nu este conex deoarece nu există niciun drum în G de la F la C, dar există un drum în $\widetilde{G}$ de la F la C şi anume F-D-C iar restul sunt conectate direct în $\widetilde{G}$.*

Definiţia 1.4.4. *Fie X o mulţime nevidă, $T : X \to X$ o funcţie şi G un graf orientat cu proprietatea $V(G) = X$. Spunem că graful G este $T-$**conex** dacă pentru orice noduri x, y din G cu $(x, y) \notin E(G)$, există un drum în G, $(x_i)_{i=0}^N$ de la x la y astfel încât $x_0 = x, x_N = y$ şi $(x_i, Tx_i) \in E(G)$ pentru orice $i = 1, ..., N-1$. Un graf orientat G este **slab** $T-$**conex** dacă $\tilde{G}$ este $T-$conex.*

În cele ce urmează vom exemplifica această proprietatea a grafurilor.

Exemplul 1.4.1. *Fie* $X := [0,1]$ *. Definim graful* G *prin* $V(G) = [0,1]$ *şi*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times [0,1] \mid x \geqslant y\} \cup \{(0,0),(0,1)\}$$

iar funcţia

$$Tx = \frac{x}{10} \text{ pentru } x \in (0,1], \text{ şi } T0 = 1$$

Perechile de noduri care nu sunt incidente unei muchii din G sunt de forma (a,b) cu $a,b \in (0,1)$, $a < b$. Considerăm drumul $(x_i)_{i=0}^{3}$ definit prin

$$x_0 = a,\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = b$$

Este evident că $(a,0),(0,1),(1,b) \in E(G)$ şi $(0,T0) = (0,1) \in E(G)$ respectiv $(1,T1) = \left(1,\frac{1}{10}\right) \in E(G)$. Deci graful G este $T-$conex. Este evident că graful G este şi conex.

Observaţia 1.4.3. *Există grafuri conexe şi funcţii* $T : X \to X$ *astfel încât ele să nu fie grafuri* $T-$*conexe.*

Exemplul 1.4.2. *Fie* $X = \mathbb{Z}$, $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $Tx = x + 3$ *iar* G *graful definit prin* $V(G) = \mathbb{Z}$ *şi* $E(G) = \{(m,m+1) \mid m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(m+1,m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ *Graful* G *este conex deoarece pentru orice* $a,b \in \mathbb{Z}, a < b$ *există un drum de la* a *la* b *şi anume* $x_0 = a, x_1 = a+1, x_2 = a+2, ..., x_{b-a} = b$*, dar nu este* $T-$*conex deoarece, dacă* $a,b \in \mathbb{Z}, a < b-1$ *atunci orice drum de la* a *la* b *trece prin* $y = b-1$*, iar* $(y,Ty) = (b-1,b+2) \notin E(G)$.

5. Funcţii de comparaţie

În această secţiune vom prezenta câteva concepte în legătură cu noţiunea de funcţie de comparaţie, împreună cu câteva rezultate cunoscute care au legătură cu teoria punctului fix, vezi de exemplu [**67, 11, 31, 62, 61**]. Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie şi următoarele proprietăţi:

- (i_φ) φ este monoton crescătoare adică $t_1 \leqslant t_2$ implică $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$;
- (ii_φ) $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$;
- (iii_φ) $\varphi(0) = 0$;
- (iv_φ) φ este continuă;
- (v_φ) $\{\varphi^n(t)\}$ converge la 0 pentru orice $t \leq 0$;
- (vi_φ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ converge pentru orice $t > 0$;
- (vii_φ) $\lim\limits_{t\to\infty} (t - \varphi(t)) = \infty$;
- (vii_φ) φ este subaditivă adică $\varphi(t_1 + t_2) \leqslant \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$ pentru orice $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

Lema următoare arată legăturile dintre condiţiile de mai sus, vezi [**67, 11, 61**].

Lema 1.5.1. *1.* (i_φ) *şi* (ii_φ) *implică* (iii_φ)*;*

2. (ii$_\varphi$) *şi* (iv$_\varphi$) *implică* (iii$_\varphi$)*;*

3. (i$_\varphi$) *şi* (v$_\varphi$) *implică* (ii$_\varphi$)*.*

Definiţia 1.5.1. *1. O funcţie φ care verifică* (i$_\varphi$) *şi* (v$_\varphi$) *se numeşte funcţie de comparaţie;*

2. O funcţie φ care verifică (i$_\varphi$) *şi* (vi$_\varphi$) *se numeşte funcţie de (c)-comparaţie;*

3. O funcţie de comparaţie care verifică (vii$_\varphi$) *se numeşte funcţie de comparaţie strictă;*

Noţiunile definite anterior verifică următoarele proprietăţi.

Lema 1.5.2. *1. Orice funcţie de (c)-comparaţie este o funcţie de comparaţie;*

2. Orice funcţie de comparaţie strictă este o funcţie de comparaţie;

3. Orice funcţie de comparaţie verifică (iii$_\varphi$)*;*

4. Orice funcţie de comparaţie care verifică (viii$_\varphi$) *va verifica şi* (iv$_\varphi$)*;*

5. Dacă φ este o funcţie de comparaţie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ funcţia φ^k este de asemenea o funcţie de comparaţie;

6. Dacă φ este o funcţie de (c)-comparaţie, atunci funcţia

$$s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \ \ s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+$$

verifică (i$_\varphi$) *şi* (iii$_\varphi$)*.*

În continuare vom prezenta câteva exemple de funcţii de comparaţie prezentate în [**67, 11, 61**]

Exemplul 1.5.1.

1. $\varphi(t) = at, \ t \in \mathbb{R}_+$ şi $a \in [0,1)$ *verifică toate condţiile* (i$_\varphi$)*-*(viii$_\varphi$)*;*

2. $\varphi(t) = \ln(1+t), \ \ t \in \mathbb{R}_+$*, este o funcţie de comparaţie;*

3. $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \in \mathbb{R}_+$ *este o funcţie de comparaţie strictă dar nu este o funcţie de (c)-comparaţie;*

4. $\varphi(t) = \frac{1}{2}t$, dacă $0 \leqslant t \leqslant 1$ şi $\varphi(t) = t - \frac{1}{2}$, dacă $t > 1$ *este o funcţie de (c)-comparaţie dar nu este o funcţie de comparaţie strictă.*

6. Operatori pe spaţii metrice şi puncte fixe

În această sectiune vom prezenta câţva operatori de tip contractiv la care vom face referire pe parcursul acestei lucrari în legătură cu metoda aproximaţiilor succesive.

Detalii despre aceste noţiuni pot fi găsite în [**67, 11, 57, 61, 62**]. Vom reaminti că:

Definiţia 1.6.1. *Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice. Un operator $T : X \to Y$ se numeşte:*

a. ***continuu*** *dacă pentru orice şir $(x_n)_{n\geqslant 0} \subset X$ cu $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ avem că $T(x_n) \xrightarrow{\rho} T(x) \in Y$;*

b. ***orbital continuu*** *dacă pentru orice* $x, y \in X$ *şi orice şir* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de numere naturale, avem că:*

$$T^{k_n}x \to y \text{ implică } T^{k_n+1}x \to Ty;$$

c. ***cu graficul închis*** *dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\geqslant 0} \subset X$ *cu proprietăţile* $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ *şi* $T(x_n) \xrightarrow{\rho} y \in Y$*, avem că* $T(x) = y$*;*

d. ***compact*** *dacă pentru orice* $A \in P_b(X)$ *avem că* $\overline{T(A)} \in P_{cp}(Y)$*;*

e. ***complet continuu*** *dacă este continuu şi compact.*

Un tip special de continuitate a fost introdus de J. Jachymsky în [**30**] şi anume:

Definiţia 1.6.2 ([**30**], Def 2.3)**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* G *un graf astfel încât* $V(G) = X$*. Un operator* $T : X \to X$ *se numeşte* ***G-continuu*** *dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *din* X*, cu proprietatea* $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in G$ *avem că:*

$$Tx_n \to Tx.$$

Exemplul 1.6.1. *Dacă* $(X, d, \leqslant)$ *este un spaţiu metric parţial ordonat şi* G *graful definit prin* $V(G) = X$ *iar* $E(G) = \{(x, y) \,|\, x \leqslant y\}$*. Un operator* $T : X \to X$ *este* G*-continuu dacă şi numai dacă transformă orice şir crescător şi convergent într-un şir convergent. În particular, pentru* $X = \mathbb{R}$ *avem că* T *este continuu la dreapta.*

Definiţia 1.6.3. *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată. Un operator $T : X \to X$ se numeşte:*

i. ***crescător*** *dacă $\forall\, x, y \in X$ cu $x \leq y$ avem $Tx \leq Ty$;*

ii. ***descrescător*** *dacă $\forall\, x, y \in X$ cu $x \leq y$ avem $Tx \geq Ty$;*

iii. ***monoton*** *dacă este crescător sau descrescător.*

Una din metodele de bază a aproximaţiei iterative a punctelor fixe ale unui operator este *metoda aproximaţiilor succesive* adică:

Definiţia 1.6.4. *Fie X o mulţime nevidă şi $T : X \to X$ un operator. Pentru orice $x_0 \in X$, şirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ definit prin*

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \; n \geqslant 1 \tag{1.11}$$

se numeşte ***şirul aproximărilor succesive*** *a lui T cu primul termen x_0 sau* ***iteraţia Picard*** *a lui T care porneşte din x_0.*

Metoda aproximaţiilor succesive se bazează pe următoarea observaţie:

Observaţia 1.6.1. *Dacă (X, d) este un spaţiu metric şi $T : X \to X$ verifică condiţile:*

I. există $x_0 \in X$ astfel încât $T^n(x_0) \xrightarrow{d} x^* \in X$ pentru *$n \to \infty$;*

II. T este un operator cu graficul închis

atunci $Tx^* = x^*$.

Teoria metodelor iterative se concentrează pe asigurarea condiţiilor din observaţia anterioară pentru diferite tipuri de operatori. În continuare vom prezenta cele mai reprezentative tipuri de operatori din teoria punctului fix şi teoremele de punct fix corespunzătoare acestor operatori.

Definiţia 1.6.5. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***(Banach) contractie*** *cu constanta α sau α-**contractie** dacă există o constantă $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y) \tag{B}$$

pentru orice $x, y \in X$.

Exemplul 1.6.2. *Fie $X = [0, 1]$ şi d metrica euclidiană. Atunci operatorul $T : X \to X$, $Tx = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + 1$ este o Banach contracţie cu constanta $\alpha = \frac{1}{2}$.*

Proof: Deoarece T este continuu şi derivabil pe $[0, 1]$ atunci din Teorema lui Lagrange avem că există $c_{x,y} \in (0, 1)$ astfel încât

$$|Tx - Ty| = |T'(c_{x,y})| \cdot |x - y| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|, \; \forall x, y \in [0, 1], \; x \neq y$$

deoarece $T'(x) \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x \in [0, 1]$. Pentru $x = y$ relaţia (B) este adevărată.

Observaţia 1.6.2. *Dacă T este o Banach contracţie atunci T este un operator continuu. Deci, dacă un operator nu este continuu atunci nu este o Banach contracţie.*

□

Teorema de punct fix pentru Banach contracţii a fost formulată prima dată în spaţii Banach în [**9**] şi se numeşte Principiul Contracţiilor a lui Banach, care poate fi formulat astfel:

Teorema 1.6.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ o Banach contracţie cu constanta $\alpha \in [0, 1)$. Atunci:*

(1) T are un unic punct fix $x^* \in X$;
(2) iteraţia Picard definită de (1.11) converge la x^* pentru orice $x_0 \in X$;
(3) au loc următoarele estimări

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(x_0, x_1), \forall n \geqslant 0 \tag{1.12}$$

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \forall n \geqslant 1 \tag{1.13}$$

(4) ordinul de convergenţă al iteraţiei Picard este dat de

$$d(x_n, x^*) \leqslant \alpha^n d(x_0, x^*), \forall n \geqslant 1 \tag{1.14}$$

Pentru demonstraţia acestei teoreme vezi de exemplu [**62**]. O idee despre importanţa acestei teoreme în teoria punctului fix este sugerată de numărul mare de rezultate obţinute ca extinderi sau generalizări ale Principiului Contracţiilor. Este clar că orice Banach contracţie este un operator continuu,dar condiţia de continuitate nu esteo condiţie necesară pentru ca un operator să fie operator Picard. O condiţie mai generală decât cea de contacţie care nu implică continuitatea operatorului este:

Definiţia 1.6.6. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***contracţie pe grafic*** *dacă există o constantă $a \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d\left(Tx, T^2x\right) \leqslant ad(x, Tx) \tag{1.15}$$

pentru orice $x \in X$.

Referitor la această noţiune, în [**54**] s-a demonstrat că:

Teorema 1.6.2. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ o contractie pe grafic cu graficul închis. Atunci T are cel puţin un punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către un punct fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

În continuare vom prezenta cîteva cazuri particulare de contracţii pe grafic.

Definiţia 1.6.7. *Fie* (X,d) *un spaţi metric. Un operator* $T : X \to X$ *se numeşte* ***operator Kannan*** *dacă există o constantă* $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant k\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right] \tag{K}$$

pentru orice $x, y \in X$.

Exemplul 1.6.3. *Fie* $X = \mathbb{R}$ *înzestrat cu norma euclidiană şi operatorul* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *definit prin* $Tx = \begin{cases} 0; & x \leqslant 10 \\ 1; & x > 10 \end{cases}$ *este un operator Kannan cu constanta* $k = \frac{1}{3}$.

Proof: Dacă $x, y \leq 10$ sau $x, y > 10$ relaţia (K) este evidentă. Dacă $x \leq 10$ şi $y > 10$ atunci avem de demonstrat că:

$$1 \leqslant \frac{1}{3}\left[|x-1| + |y|\right]$$

ceea ce este adevărat deoarece $x - 1 \leq 10$ folosind şi simetria distanţei va rezulta că T este un operator Kannan.

$\square$

Exemplul 1.6.4. *Fie* $X = \mathbb{N}$ *înzestrat cu restricţia la* $\mathbb{N}$ *a normei euclidiene şi operatorul* $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *definit prin* $Tx = \left[\frac{x}{4}\right]$ *este un operator Kannan cu constanta* $k = \frac{1}{3}$.

Proof: Dacă $x = y$ atunci relaţia (K) este adevărată iar din cauza simetriei distanţei este suficient sŏ demonstrăm această relaţie doar în cazul $x > y$. Deci vom demonstra că:

$$\left|\left[\frac{x}{4}\right] - \left[\frac{y}{4}\right]\right| \leqslant \frac{1}{3}\left(\left|x - \left[\frac{x}{4}\right]\right| + \left|y - \left[\frac{y}{4}\right]\right|\right)$$

Relaţie care este echivalentă cu

$$\left[\frac{x}{4}\right] - \left[\frac{y}{4}\right] \leqslant \frac{1}{3}\left(x - \left[\frac{x}{4}\right] + y - \left[\frac{y}{4}\right]\right)$$

adică

$$4\left[\frac{x}{4}\right] - 2\left[\frac{y}{4}\right] \leqslant x + y$$

relaţie care este adevărată pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$. Prin urmare operatorul T este un operator Kannan.

$\square$

Observaţia 1.6.3. *Spre deosebire de Banach contracţii care sunt continue operatorii Kannan nu sunt în general continui aşa cum se poate observa la Exemplul 1.6.3, deci via Observaţia 1.6.2 acest operator nu este o Banach contracţie. Dar conform Exemplului 1.6.4 există operatori Kannan continui care sunt şi Banach contracţii.*

Referitor la această noţiune, în [**38**] s-a demonstrat că:

Teorema 1.6.3. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ un operator Kannan. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

O altă condiţie care generalizează atât Banach contracţiile cât şi operatorii Kannan este condiţia introdusă de L. Ćirić [**23**], S. Reich [**55**] şi I.A. Rus [**58**], vezi şi [**61**].

Definiţia 1.6.8. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***operator Ćirić-Reich-Rus*** *dacă există $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ cu proprietatea $\alpha + \beta + \gamma < 1$ astfel încât:*

(CRR) $$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)$$

pentru orice $x, y \in X$.

Teorema de punct fix corespunzătoare, vezi [**23, 55, 58**] este:

Teorema 1.6.4. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ un operator Ćirić-Reich-Rus. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

Observaţia 1.6.4. *Este simplu de observat că condiţia lui Ćirić-Rech-Rus generalizează condiţia lui Banach care se obţine din CRR pentru $\beta = \gamma = 0$ cât şi condiţia lui Kannan obţinută pentru $\alpha = 0$.*

Observaţia 1.6.5. *De fapt în* [**58**]*, Rus a considerat următoarea condiţie de contracţie*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a d(x, y) + b [d(x, Tx) + d(y, Ty)], \forall x, y \in X$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $a + 2b < 1$, condiţie care este echivalentă cu (CRR) datorită simetriei distanţei.

O condiţie asemănătoare cu cea a lui Kannan a fost introdusă de S.K. Chatterjea în [**22**].

Definiţia 1.6.9. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***operator Chatterjea*** *dacă există o constantă $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât:*

(C) $$d(Tx, Ty) \leqslant c [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

pentru orice $x, y \in X$.

Referitor la această condiţie avem următoarea teoremă de punct fix, vezi [**22**]:

Teorema 1.6.5. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ un operator Chatterjea. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

În [**57**], B.E. Rhoades a demonstrat că cele trei condiţii (B),(K) şi (C) sunt total independente. Combinând cele trei condiţii, într-un mod foarte inspirat T. Zamfirescu [**66**] a considerat următoarea condiţie de contracţie:

Definiţia 1.6.10. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***operator Zamfirescu*** *dacă există constantele reale $\alpha \in [0, 1)$, $k, c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, cel puţin una dintre condiţiile următoare este îndeplinită:*

(1) $d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y)$;
(2) $d(Tx, Ty) \leqslant k[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;
(3) $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

În [**66**] Zamfirescu a demonstrat următoarea teoremă de punct fix:

Teorema 1.6.6. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ un operator Zamfirescu. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

Generalizând condiţia de contracţie de la un operator Ćirić-Reich-Rus, G.E. Hardy şi T.D. Rogers au introdus următorul concept:

Definiţia 1.6.11. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***operator Hardy-Rogers*** *dacă există $a, b, c, , e, f \in \mathbb{R}_+$ cu proprietatea $a + b + c + e + f < 1$ astfel încât:*

(HR) $$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) + ed(x, Ty) + fd(y, Tx)$$

pentru orice $x, y \in X$.

Este simplu de observat că condiţia (HR) generalizează condiţiile (B),(K), (CRR) şi (C). În [**25**] s-a demonstrat că:

Teorema 1.6.7. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ un operator Hardy-Rogers. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n \geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

O altă condiţie de contracţie mai generală decât precedentele este cea introdusă de Ćirić în [**25**] şi anume:

Definiţia 1.6.12. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***quasi-contracţie*** *dacă există $h \in [0, 1)$ astfel încât:*

(Q) $$d(Tx, Ty) \leqslant h \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)$$

pentru orice $x, y \in X$.

În [**25**] s-a demonstrat că:

Teorema 1.6.8. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ o quasi-contracţie. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

Folosind noţiunea de funcţie de comparaţie introdusă în secţiunea 1.5 Rus [**61**] introdus urătorul concept:

Definiţia 1.6.13. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***φ-contracţie*** *dacă există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y)) \tag{φ C}$$

pentru orice $x, y \in X$.

Şi a demonstrat următoarea teoremă de punct fix:

Teorema 1.6.9. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ o φ-contracţie. Atunci T are un unic punct fix iar iteraţia Picard $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ converge către punctul fix a lui T pentru orice $x \in X$.*

Un alt tip de contracţie independent de cele prezentate până acum este cel de *aproape*- contracţie şi el a fost introdus de V. Berinde în [**10**] şi anume:

Definiţia 1.6.14. *Fie (X, d) un spaţi metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte* ***aproape-contracţie*** *dacă există două constante $\delta \in [0, 1)$ şi $L \geq 0$ astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta d(x, y) + L d(y, Tx) \tag{ AC}$$

pentru orice $x, y \in X$.

Aşa cum s-a demonstrat în [**10**] sau [**12**], pentru *aproape*-contracţii avem că:

Teorema 1.6.10. *Fie (X, d) un spaţi metric complet şi $T : X \to X$ o aproape-contracţie cu constantele $\delta \in [0, 1)$ şi $L \geqslant 0$. Atunci:*

(1) iteraţia Picard $(T^n x_0)_{n\geqslant 0}$ converge către $x^*(x_0) \in F_T$ pentru orice $x_0 \in X$;
(2) pentru orice $x \in X$ avem că: $d(x, x^*(x)) \leqslant \frac{1}{1-\delta} d(x, Tx)$;
(3) au loc următoarele estimări:

$$d(T^n x, x^*(x)) \leqslant \frac{\delta^n}{1-\delta} d(x, Tx), n \geq 1 \tag{1.16}$$

$$d(T^n x, x^*(x)) \leqslant \frac{\delta}{1-\delta} d\left(T^{n-1} x, T^n x\right), n \geq 1 \tag{1.17}$$

7. Teoreme de punct fix pentru operatori ciclici

În anul 2003 W. A. Kirk, P. S. Srinivasan şi P. Veeramani au intordus o nouă metodă de generalizare a condiţiei de contraţie din Teorema lui Banach şi anume reducerea numărului perechilor $(x, y) \in X \times X$ care să verifice condiţia de contracţie.

Pentru aceasta ei au introdus următorul concept:

Definiţia 1.7.1. *Fie* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ *şi* $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ *o familie de* p *submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric* (X,d). *Un operator* $T : \{A_i\}_{i=1}^{p} \to \{A_i\}_{i=1}^{p}$ *se numeşte un* ***operator ciclic*** *dacă:*

$$T(A_i) \subseteq A_{i+1},\ \textit{pentru orice}\, i \in \{1,2,..,p\}\,,\ \textit{unde}\ A_{p+1} = A_1. \tag{1.18}$$

Observaţia 1.7.1. *În cazul* $p = 2$, *un operator* T *este ciclic dacă* $T : A \cup B \to A \cup B$ *şi verifică condiţiile:*

$$T(A) \subseteq B \text{ şi } T(B) \subseteq A. \tag{1.19}$$

În [**39**], W.A. Kirk, P.S. Srinivasan and P. Veeramani a considerat următoarea extindere, pentru două mulţimi:

Teorema 1.7.1 ([**39**]). *Fie* A *şi* B *două submulţimi nevide şi închise ale spaţiului complet* X. *Presupunem că* $T : X \to X$ *verifică (1.19) şi*

$$d(Tx,Ty) \leqslant kd(x,y)\,,\ \textit{pentru orice}\, x \in A,\ y \in B, \tag{1.20}$$

unde $k \in [0,1)$. *Atunci* T *are un unic punct fix în* $A \cup B$.

Evident condiţiile din ipoteza Teoremei 1.7.1 pot fi extinse la o familie finită de submulţimi şi anume

Teorema 1.7.2 ([**39**]). *Fie* $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ *şi* $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ *o familie de* p *submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric* (X,d). *Presupunem că* $T : \{A_i\}_{i=1}^{p} \to \{A_i\}_{i=1}^{p}$ *verifică (1.18) şi*

$$d(Tx,Ty) \leqslant kd(x,y)\,,\ \textit{pentru orice}\, x \in A_i,\ y \in A_{i+1}, 1 \leq i \leq p \tag{1.21}$$

unde $A_{p+1} = A_1$. *Dacă* $k \in (0,1)$ *atunci* T *are un unic punct fix în* $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k$.

În legătură cu operatorii ciclici, Rus [**59**] a introdus următorul concept:

Definiţia 1.7.2. *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $T : X \to X$ *un operator. Prin definiţie,* $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ *este o reprezentare ciclică a lui* X *în raport cu* T *dacă:*

(i) $A_i, i = 1,...,p$, *sunt mulţimi nevide;*
(ii) $T(A_1) \subseteq A_2$, $T(A_2) \subseteq A_3, ..., T(A_p) \subseteq A_1$.

Dintre rezultatele obţinute pentru operatori ciclici amintim cel obţinut de Păcurar şi Rus în [**49**] si anume:

Teorema 1.7.3. *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet,* $A_1, A_2, ..., A_p \in Pcl(X)$, $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *o funcţie de (c)-comparţie şi* $T : Y \to Y$ *un operator. Presupunem că* $\bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ *este o reprezentare ciclică a lui* Y *în raport cu* T *şi* T *este o* $\varphi-$*contracţie ciclică, adică verifică relaţia:*

$$d(Tx,Ty) \leqslant \varphi(d(x,y))\,,\ \textit{pentru orice}\, x \in A_i,\, y \in A_{i+1},\ \textit{unde}\ 1 \leqslant i \leqslant p \tag{1.22}$$

Atunci:

(i) T *are un unic punct fix* $x^* \in \bigcap_{i=1}^{p} A_i$ *şi şirul Picard* $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* x^* *pentru orice valoare iniţială* $x \in Y$ *;*

(ii) au loc următoarele estimări:

$$d(T^n x, x^*) \leqslant s(\varphi^n(d(x, Tx))), n \geqslant 1$$

$$d(T^n x, x^*) \leqslant s\left(\varphi^n\left(d\left(T^n x, T^{n+1}x\right)\right)\right), \ n \geqslant 1$$

(iii) pentru orice $x \in Y$ *avem că:*

$$d(x, x^*) \leqslant s(d(x, Tx))$$

unde $s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este definită prin*

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t).$$

În cele ce urmează vom prezenta câteva rezultate recente referitoare la operatorii ciclici obţinute de Petric şi Zlatanov [**7**] respectiv Petric [**6**]

Teorema 1.7.4 ([**7**], T2.1)**.** *Fie* $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ *o familie de submulţimi nevide si închise ale spaţiului metric complet* X *şi* $T : \bigcup_{i=1}^{p} A_i \to \bigcup_{i=1}^{p} A_i$*, un operator Kannan ciclic adică,* T *este un operator ciclic şi există* $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right], \text{ pentru orice } x \in A_i,\ y \in A_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant p \tag{1.23}$$

Atunci

(i) T *are un unic punct fix* $x^* \in \bigcap_{i=1}^{p} A_i$*;*

(ii) Iteraţia Picard $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* x^* *pentru orice valoare iniţială* $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ *;*

(iii) au loc următoarele estimări:

$$d(T^n x_0, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1), \ n \geqslant 0$$

$$d(T^n x_0, x^*) \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda} d\left(T^{n-1}x_0, T^n x_0\right), \ n \geqslant 0$$

(iv) ordinul de convergenţă al iteraţiei Picard este dată de

$$d(T^n x_0, x^*) \leqslant \lambda d\left(T^{n-1}x_0, x^*\right), \ n \geqslant 1;$$

unde $\lambda = \frac{a}{1-a}$.

Teorema 1.7.5 ([**47**], T2.5.1)**.** *Fie* $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ *o familie de submulţimi nevide si închise ale spaţiului metric complet* X *şi* $T : \bigcup_{i=1}^{p} A_i \to \bigcup_{i=1}^{p} A_i$*, un operator Ćirić-Reich-Rus ciclic adică,* T *este un operator ciclic şi există* $a, b > 0$ *cu* $a + 2b < 1$ *astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a d(x, y) + b\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right], \text{ pentru orice } x \in A_i,\ y \in A_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{1.24}$$

Atunci T are un unic punct fix $x^* \in \bigcap_{i=1}^{p} A_i$.

8. Teoreme de punct fix în spaţii metrice parţial ordonate

În anul 2004 Ran şi Reurings [**51**] înlocuieşte condiţia de contracţie din Teorema lui Banach cu una mai slabă care nu cere satisfacerea condiţie de contracţie pentru orice $x, y \in X$ cu numai pentru elemente comparabile dintr-un spaţiu metric parţial ordonat. Teorema de punct fix corepunzătoare este

Teorema 1.8.1 ([**51**], T2.1)**.** *Fie (X, d) un spaţi metric complet înzestrat cu o relaţie de ordine $\prec$ astfel încât:*

(1.25) *orice mulţime cu două elemente din X este mărginită inferior şi superior.*

Fie $T : X \to X$ un operator continuu şi monoton astfel încât

(1.26) $$\exists \alpha \in [0, 1), \forall x, y \in X, (x \prec y \Rightarrow d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y))$$

Dacă există $x_0 \in X$ cu $x_0 \prec f(x_0)$ sau $x_0 \succ f(x_0)$, atunci T este PO.

O extindere a acestei teoreme a fost facută de Nieto şi Rodríyguez-López [**44**] şi anume:

Teorema 1.8.2 ([**44**], T2.1-2.5)**.** *Fie (X, d) un spaţi metric complet înzestrat cu o relaţie de ordine " $\preccurlyeq$ ". Fie $T : X \to X$ un operator crescător şi care verifică (1.26). Presupunem că una din condiţiile următoare este îndeplinită:*

(A) T este continuu şi există $x_0 \in X$ astfel încât $x_0 \preccurlyeq f(x_0)$ sau $x_0 \succcurlyeq f(x_0)$;

(B) spaţiu metric ordonat $(X, d, \preccurlyeq)$ verifică relaţia:

(1.27) *pentru orice şir crescător* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $x_n \to x$, *avem că* $x_n \preccurlyeq x, \forall n \in \mathbb{N}$

şi există $x_0 \in x$ astfel încât $x_0 \preccurlyeq f(x_0)$;

(C) spaţiu metric ordonat $(X, d, \preccurlyeq)$ verifică relaţia:

(1.28) *pentru orice şir crescător* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $x_n \to x$, *avem că* $x \preccurlyeq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$

şi există $x_0 \in x$ astfel încât $f(x_0) \preccurlyeq x_0$;

Atunci T are un punct fix. Mai mult, dacă în $(X, \preccurlyeq)$ orice mulţime cu două elemente este mărginită atunci T este PO.

Următoarele îmbunătăţiri ale rezultatelor de mai sus au fost gasite independent de Petruşel şi Rus în [**48**] respectiv Nieto şi Rodríyguez-López [**45**]. Însă vom prezenta o variantă un pic modificată a acestor rezultate, variantă preluată din lucrarea lui Nieto, Pouso şi Rodríyguez-López [**43**]. Vom nota

$$X_{\preccurlyeq} := \{(x, y) \in X \times X \,|\, x \preccurlyeq y \, sau \, y \preccurlyeq x\}$$

Teorema 1.8.3 ([**48**] T4.3, [**45**] T7, [**43**] T3.1)**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu o relaţie de ordine " $\preccurlyeq$ " astfel încât orice mulţime cu două elemente este mărginită.*

Fie $T : X \to X$ un operator care conservă elementele comparabile, adică,

$$\text{pentru orice}, x, y \in X, (x,y) \in X_{\preccurlyeq} \text{ implică } (Tx, Ty) \in X_{\preccurlyeq}, \tag{1.29}$$

şi are loc (1.26). Presupunem că T este orbital continuu sau că $(X,d,\preccurlyeq)$ verifică proprietatea:

$$\begin{aligned} &\text{pentru orice } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ dacă } x_n \to x \text{ şi } (x_n, x_{n+1}) \in X_{\preccurlyeq}, \text{ atunci} \\ &\text{există un subsir } (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ astfel încât } (x_{k_n}, x) \in X\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Dacă există $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, Tx_0) \in X_{\preccurlyeq}$ atunci T este PO.

O extindere a acestor teoreme a fost făcută de O'Reagan şi Petruşel în [**46**] şi anume pentru φ-contracţii şi pentru φ-contracţii generalizate iar teoremele de punct fix corespunzătoare sunt:

Teorema 1.8.4 ([**46**], T 3.3)**.** *. Fie $(X,d,\leqslant)$ un spaţiu metric ordonat şi $f : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

(i) *pentru orice $x, y \in X$ cu $(x,y) \notin X_{\leqslant}$ există $c(x,y) \in X$ astfel încât $(x, c(x,y)) \in X_{\leqslant}$ şi $(y, c(x,y)) \in X_{\leqslant}$;*
(ii) *$X_{\leqslant} \in I(f \times f)$;*
(iii) *dacă $(x,y) \in X_{\leqslant}$ şi $(y,z) \in X_{\leqslant}$, atunci $(x,z) \in X_{\leqslant}$;*
(iv) *există $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leqslant}$;*
$(v)_a$ *f este orbital continuă;*
sau
$(v)_b$ *f este orbital $X_{\leqslant}$-continuă şi există un subşir $(f^{n_k}(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ a lui $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $(f^{n_k}(x_0), x^*) \in X_{\leqslant}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*
(vi) *există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât $d(f(x), f(y)) \leqslant \varphi(d(x,y))$, pentru orice $(x,y) \in X_{\leqslant}$;*
(vii) *metrica d este completă.*

Atunci f este PO.

Teorema 1.8.5 ([**46**], T 3.11)**.** *. Fie $(X,d,\leqslant)$ un spaţiu metric ordonat şi $f : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

(i) *$X_{\leqslant} \in I(f \times f)$;*
(ii) *dacă $(x,y) \in X_{\leqslant}$ şi $(y,z) \in X_{\leqslant}$, atunci $(x,z) \in X_{\leqslant}$;*
(iii) *există $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leqslant}$;*
$(iv)_a$ *f este orbital continuă;*
sau

$(iv)_b$ *f este orbital $X_{\leqslant}$-continuă şi există un subşir $\left(f^{n_k}(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ a lui $\left(f^n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\left(f^{n_k}(x_0), x^*\right) \in X_{\leqslant}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$;*

(v) există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \phi\left(\max\left\{d(x,y), d(x,f(x)), d(y,f(y)), \frac{1}{2}\left[d(x,f(y)) + d(y,f(x))\right]\right\}\right),$$

pentru orice $(x,y) \in X_{\leqslant}$;

(vii) metrica d este completă.

Atunci $Ff \neq \emptyset$.

CAPITOLUL 2

Contracţii în spaţii metrice înzestrate cu un graf

1. Teoreme de punct fix pentru Banach G-contracţii

Scopul principal al acestei lucrări este de a generaliza teoremele de punct fix prezentate în capitolul precedent şi anume de a introduce operatori contractivi pe spaţii metrice înzestrate cu un graf orientat. Primul autor care a considerat astfel de o-peratori a fost J. Jachymski [**30**], care a introdus noţiunea de Banach G-contracţie şi a demonstrat teoreme de punct fix pentru acest tip de operatori. În acest capitol vom prezenta rezultatele lui Jachymski şi vom arăta că teoremele de punct fix referitoare la contracţii sunt consecinte ale acestor rezultate. Astfel vom demonstra că teoremele de punct fix în spaţii metrice ordonate, Teorema lui Edelstein, teorele de punct fix pentru operatori ciclici şi Alternativa punctului fix sunt consecinţe ale Teoremei 2.1.2. În finalul capitolului vom prezenta două aplicaţii ale Alternativei punctului fix la demonstrarea stabilităţii de tip Hyers-Ulam pentru ecuaţii liniare si ecuaţii diferenţiale.

Contribuţiile originale ale autorului sunt: Teoremele 2.2.7, 2.2.8, 2.2.9, Corolarele 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, Lema 2.2.1 şi demonstraţiile Teoremelor 2.2.2 şi 2.2.3.

În ceea ce urmează vom considera că (X, d) este un spaţiu metric şi G este un graf orientat astfel încât $V(G) = X$ şi $\Delta = \{(x, x) \,|x \in X\} \subseteq G$.

Definiţia 2.1.1 ([**30**], Def. 2.1)**.** *Spunem că $f : X \to X$ este o Banach G-contracţie sau simplu o G-contracţie dacă f conservă muchiile lui G, adică*

$$\forall x, y \in X\left((x, y) \in E(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E(G)\right) \tag{2.31}$$

şi f micşorează lungimile muchiilor lui G în modul următor:

$$\exists \alpha \in (0,1), \forall x, y \in X\left((x, y) \in E(G) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y)\right) \tag{2.32}$$

Exemplul 2.1.1 ([**30**], Ex. 2.1)**.** *Orice funcţie constantă $f : X \to X$ este o G contracţie deoarece $\Delta \subset E(G)$. De fapt, pentru ca orice funcţie constantă să fie o G-contracţie trebuie ca $\Delta \subset E(G)$.*

Exemplul 2.1.2 ([**30**], Ex. 2.2)**.** *Orice contracţie în sens clasic este o G_0-contracţie unde $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 2.1.3 ([**30**], Ex. 2.3)**.** *Fie " $\preccurlyeq$ " o relaţie de ordine pe X. Definim graful G_1 prin*

$$V(G_1) = X \text{ şi } E(G_1) = \{(x, y) \in X \times X \,|x \preccurlyeq y\}.$$

Pentru acest graf, condiţia (2.31) reprezintă faptul că $f : X \to X$ *este o funcţie crescătoare în raport cu relaţia de ordine* " $\preccurlyeq$ ". *Clasa* G_1*-contracţiilor a fost studiată de Nieto şi Rodriguez-Lopez* [**44**].

Exemplul următor este precedat de următoarea propoziţie

Propoziţia 2.1.1 ([**30**], P. 2.1)**.** *Dacă* $f : X \to X$ *este o* G*-contracţie atunci* f *este atât o* G^{-1}*-contracţie cât şi o* $\tilde{G}$*-contracţie.*

Proof: Concluziile acestei propoziţii sunt consecinţe ale simetriei relaţiei (2.31) şi ale simetriei distanţei.

□

Exemplul 2.1.4 ([**30**], Ex. 2.4)**.** *Fie* " $\preccurlyeq$ " *o relaţie de ordine pe* X. *Definim graful* G_2 *prin*

$$V(G_2) = X \text{ şi } E(G_2) = \{(x, y) \in X \times X \,|x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x\}.$$

Pentru acest graf, (2.31) reprezintă faptul că f *este monotonă în raport cu relaţia de ordine. Mai mult, dacă* f *verifică relaţia (2.32) cu* $G = G_1$ *de la Exemplul 2.1.3 atunci din Propoziţia 2.1.1, relaţia (2.32) este verificată şi de* G_2 *deoarece* $G_2 = \tilde{G}_1$. *Deci operatorii studiaţi de Ran şi Reurings* [**51**] *sunt* G_2*-contraţii. În general (2.31) înseamnă că* f *transformă elementele comparabile în elemente comparabile, deci clasa* G_2*-contracţiilor coincide cu clasa operatorilor studiaţi de Petruşel şi Rus* [**48**]*, respectiv Nieto şi Rodriguez-Lopez* [**45**].

Primul rezultat care urmează arată legătura dintre covergenţa şirului aproximaţiilor succesive pentru Banach G-contracţii şi conectivitatea grafului G. Vom spune că două şirui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din X sunt **Cauchy echivalente** dacă ambele sunt şiruri Cauchy şi $d(x_n, y_n) \to 0$ atunci când $n \to \infty$.

Teorema 2.1.1 ([**30**], T. 3.1)**.** *Următoarele relaţii sunt echivalente:*

(i) G *este slab conex;*

(ii) pentru orice G*-contractie* $f : X$Ą $\to X$ *şi pentru* $x, y \in$ ĄX *date, şirurile* $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt Cauchy echivalente;*

(iii) pentru orice G*-contractie* $f : X \to X$, $card\,(Fix\,(f)) \leqslant 1$.

Pentru a demonstra teorema anterioară vom folosi următoarea lemă.

Lema 2.1.1 ([**30**], L. 3.1)**.** *Fie* $f : X \to X$ *o* G*-contractie cu constanta* α. *Pentru orice* $x \in X$ *şi* $y \in [x]_{\tilde{G}}$, *există* $r(x, y) \geqslant 0$ *astfel încât*

$$d(f^n x, f^n y) \leqslant \alpha^n r(x, y), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Proof: Fie $x \in X$ şi $y \in [x]_{\tilde{G}}$. Atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^{N}$ in $\tilde{G}$ de la x la y, adică, $x_0 = x$, $x_N = y$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ pentru $i = 1, ..., N$. Din Propoziţia 2.1.1, f este o $\tilde{G}$-contracţie. Folosind inducţia este uşor de demonstrat că

$$(f^n x_{i-1}, f^n x_i) \in E\left(\tilde{G}\right) \;\; şi \; d(f^n x_{i-1}, f^n x_i) \leqslant \alpha^n d(x_{i-1}, x_i)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $i = 1, ..., N$. Din inegalitatea triunghiului avem că:

$$d(f^n x, f^n y) \leqslant \sum_{i=1}^{N} d(f^n x_{i-1}, f^n x_i) \leqslant \alpha^n \sum_{i=1}^{N} d(x_{i-1}, x_i),$$

deci este suficient să notăm $r(x, y) := \sum\limits_{i=1}^{N} d(x_{i-1}, x_i)$.

Demonstraţia Teoremei 2.1.1. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie f o G-contracţie şi $x, y \in X$. Din ipoteză, $[x]_{\tilde{G}} = X$, deci $fx \in [x]_{\tilde{G}}$. Din Lema 2.1.1, avem că

$$d\left(f^n x, f^{n+1} x\right) \leqslant \alpha^n r(x, fx), \text{ pentru orice} \, n \in \mathbb{N}.$$

Deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d(f^n x, f^{n+1} x) < \infty$, relaţie care implică faptul că $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy. Deoarece $y \in [x]_{\tilde{G}}$, Lema 2.1.1 implică faptul că $d(f^n x, f^n y) \leqslant \alpha^n r(x, y)$. Prin urmare $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(f^n y)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt echivalente Cauchy. E evident, că dacă $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, la fel este şi $(f^n y)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie f o G-contracţie şi x, yĄ $\in Ff$. Din (ii), $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(f^n y)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt echivalente Cauchy, care implică $x = y$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Presupunem contrariul, G nu este slab conex, adică, există $x_0 \in X$ astfel încât ambele mulţimi $[x_0]_{\tilde{G}}$ şi $X \backslash [x_0]_{\tilde{G}}$ sunt nevide. Fie $y_0 \in X \backslash [x_0]_{\tilde{G}}$ şi definim $fx := x_0$ dacă $x \in [x_0]_{\tilde{G}}$; $fx := y_0$ dacă $x \in X \backslash [x_0]_{\tilde{G}}$. Este clar că, $Ff = \{x_0, y_0\}$. Vom demonstra că f este o G-contracţie. Fie $(x, y) \in E(G)$. Atunci $[x]_{\tilde{G}} = [y]_{\tilde{G}}$, deci $x, y \in [x_0]_{\tilde{G}}$,sau $x, y \in X \backslash [x_0]_{\tilde{G}}$. Deci în ambele cazuri $fx = fy$, deci $(fx, fy) \in E(G)$ deoarece $E(G) \supseteq \Delta$, şi $d(fx, fy) = 0 \leqslant \frac{1}{2} d(x, y)$. Prin urmare f este o G-contracţie care are două puncte fixe ceea ce este în contradicţie cu (iii).

□

Corolarul 2.1.1 ([**30**], C. 3.1)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) G este slab conex;

(ii) pentru orice G-contractie $f : X \to X$, există $x^* \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} f^n x = x^*$ pentru orice $x \in X$.

Exemplul următor ne arată că nu putem îmbunătăţi Corolarul 2.1.1 prin adăugarea în (ii) a faptului că x^* este un punct fix pentru f.

Exemplul 2.1.5 ([**30**], Ex. 3.2)**.** *Fie $X = [0, 1]$ şi d_E metrica euclidiană pe X, atunci (X, d_E) este un spaţiu metric complet. Definim graful G prin $V(G) = X$ şi*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \, | x \leqslant y\} \cup \{(0, 0) \, ; (0, 1)\} \, .$$

Graful G este slab conex deoarece $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $x,y \in (0,1]$ iar un drum în $\widetilde{G}$ de la 0 la $x \in [0,1]$ este $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = x$. Definim funcţia $f : X \to X$ prin $fx := \frac{x}{2}$ dacă $x \in (0,1]$ şi $f0 := \frac{1}{2}$. Un calcul simplu ne arată că f este o G-contracţie cu constanta $\alpha = \frac{1}{2}$ şi pentru orice $x \in X$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = 0$, dar f nu are puncte fixe.

Demonstraţia teoremei de punct fix pentru Banach G contracţii depinde de următorul rezultat

Propoziţia 2.1.2 ([**30**], P. 3.1)**.** *Presupunem că $f : X \to X$ este o G-contracţie astfel încât pentru un $x_0 \in X$, $fx_0 \in [x_0]_{\tilde{G}}$. Fie $\tilde{G}_{x_0}$ componenta lui $\tilde{G}$ care-l conţine pe x_0. Atunci $[x_0]_{\tilde{G}}$ este f-invariantă şi $f\big|_{[x_0]_{\tilde{G}}}$ este o $\tilde{G}_{x_0}$-contracţie. Mai mult, dacă $x, y \in [x_0]_{\tilde{G}}$, atunci $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy echivalente.*

Proof: Fie $x \in [x_0]_{\tilde{G}}$. Atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^{N}$ în $\tilde{G}$ de la x_0 la x, adică, $x_N = x$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\tilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N$. Din Propoziţia 2.1.1, f este o $\tilde{G}$-contracţie, deci $(fx_{i-1}, fx_i) \in E\left(\tilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N$, adică, $(fx_i)_{i=0}^{N}$ este un drum în $\tilde{G}$ de la fx_0 la fx. Prin urmare $fx \in [fx_0]_{\tilde{G}}$. Deoarece, din ipoteză, $fx_0 \in [x_0]_{\tilde{G}}$, adică, $[fx_0]_{\tilde{G}} \in [x_0]_{\tilde{G}}$, vom deduce că $fx \in [x_0]_{\tilde{G}}$. Deci $[x_0]_{\tilde{G}}$ este f-invariantă. Fie $(x,y) \in E\left(G_{x_0}\right)$. Aceasta înseamnă că există un drum $(x_i)_{i=0}^{N}$ în $\tilde{G}$ de la x_0 la y astfel încât $x_{N-1} = x$. Fie $(y_i)_{i=0}^{M}$ un drum în $\tilde{G}$ de la x_0 la fx_0. Repetând argumentarea din prima parte a demonstraţiei, vom obţine că $(y_0, y_1, ..., y_M, fx_1, ...fx_N)$ este un drum în $\tilde{G}$ de la x_0 la fy; în particular, $(fx_{N-1}, fx_N) \in E\left(\tilde{G}_{x_0}\right)$, adică , $(fx, fy) \in E\left(\tilde{G}_{x_0}\right)$. Mai mult, deoarece $E\left(\tilde{G}_{x_0}\right) \subseteq E\left(\tilde{G}\right)$ şi f este o $\tilde{G}$-contracţie, vom obţine că $f\big|_{[x_0]_{\tilde{G}}}$ este o $\tilde{G}_{x_0}$-contracţie. Aplicând Teorema 2.1.1, a doua parte a concluziei rezultă imediat deoarece $\tilde{G}_{x_0}$ este conex.

□

Teorema 2.1.2 ([**30**], Th 3.2)**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi fie tripletul (X,d,G) având următoarea proprietate:*

(2.33)

$$\text{pentru orice şir } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de elemente din } X, \text{ dacă } x_n \to x \text{ şi } (x_n, x_{n+1}) \in E(G)$$
$$\text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ atunci există un subşir } (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ cu } (x_{k_n}, x) \in E(G) \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Fie $f : X \to X$ o Banach G-contracţie, şi $X_f = \{x \in X \,|(x, fx) \in E(G)\}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1. *$card(Ff) = card\{[x]_{\tilde{G}} \,|x \in X_f\}$.*
2. *$Ff \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $X_f \neq \emptyset$.*
3. *f are un unic punct fix dacă şi numai dacă există $x_0 \in X_f$ astfel încât $X_f \subseteq [x_0]_{\tilde{G}}$.*
4. *Pentru orice $x \in X_f$, $f\big|_{[x]_{\tilde{G}}}$ este PO.*

5. Dacă $X_f \neq \emptyset$ şi G este slab conex, atunci f este PO.

6. Dacă $X' := \cup \{[x]_{\tilde{G}} \, | x \in G\}$ atunci $f\,|_{X'}$ este WPO.

7. Dacă $f \subseteq E(G)$, atunci f este WPO.

Proof: Vom începe demonstraţia cu punctele 4. şi 5. Fie $x \in X_f$, deci $fx \in [x]_{\tilde{G}}$, şi din Propoziţia 2.1.2, dacă $y \in [x]_{\tilde{G}}$, atunci $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(f^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy echivalente. Deoarece spaţiul este complet, $(f^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge spre un $x^* \in X$. Evident, şi $\lim\limits_{n\to\infty} f^n y = x^*$. Deoarece $(x, fx) \in E(G)$, (2.31) implică

$$\left(f^n x, f^{n+1} x\right) \in E(G)\,, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{2.34}$$

Din (2.33), rezultă că există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru orice $n \in N$. Deci folosind şi (2.34), obţinem că $\left(x, fx, f^2x, ..., f^{k_1}x, x^*\right)$ este un drum în G (deci şi în $\tilde{G}$) de la x la x^*, adică , $x^* \in [x]_{\tilde{G}}$. Mai mult, din (2.32),

$$d\left(f^{k_n+1}x, fx^*\right) \leqslant \alpha d\left(f^{k_n}x, x^*\right) \tag{2.35}$$

Trecând la limită în relaţia anterioară vom obţine că $fx^* = x^*$. Deci $f\Big|_{[x]_{\tilde{G}}}$ este PO. Mai mult, dacă G este slab conex, atunci $[x]_{\tilde{G}} = X$, deci f este PO. În continuare 6. este o simplă consecinţă a lui 4. Pentru a demonstra 7. să observăm că $f \subseteq E(G)$ înseamnă $X_f = X$. Aceasta implică $X' = X$ deci f este WPO conform 6. Pentru a demonstra 1., considerăm funcţia π definită prin

$$\pi(x) = [x]_{\tilde{G}} \text{ pentru orice } x \in Ff. \tag{2.36}$$

Este suficient să demonstrăm că π este o bijecţie de la Ff la $\mathcal{C} = \{[x]_{\tilde{G}} \,|\, x \in X_f\}$. Deoarece $E(G) \supseteq \Delta$, vom deduce că $Ff \subseteq X_f$ deci $\pi(Ff) \subseteq \mathcal{C}$. Pe de altă parte, dacă $x \in X_f$, atunci din 4., avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f^n x \in [x]_{\tilde{G}} \cap Ff$ care implică $\pi\left(\lim\limits_{n\to\infty} f^n x\right) = [x]_{\tilde{G}}$. Prin urmare f este o surjecţie. Dacă $x_1, x_2 \in Ff$ verifică $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, adică , $[x_1]_{\tilde{G}} = [x_2]_{\tilde{G}}$, atunci $x_2 \in [x_1]_{\tilde{G}}$, deci din 4.,

$$\lim_{n\to\infty} f^n x_2 \in [x_1]_{\tilde{G}} \cap Ff = \{x_1\}\,,$$

care implică, $x_2 = x_1$ deoarece $f^n x_2 = x_1$. În consecinţă, f este injectivă.

În final, observăm că 2. şi 3. sunt consecinţe ale lui 1.

□

2. Aplicaţii ale Banach G-contracţiilor

În continuare vom demonstra că teoremele de punct fix referitoare la contracţii sunt consecinţe ale Teoremei 2.1.2.

Concluzia 2.1. *Principiul contracţiilor a lui Banach (T 1.6.1) este o consecinţă a Teoremei 2.1.2.*

Proof: Considerăm graful G_0 definit prin $E(G_0) = X \times X$, care este un graf conex. Conform Exemplului 2.1.2, orice contracţie $f : X \to X$ este o G_0-contracţie, deci aplicând teorema 2.1.2 obţinem concluziile 1. şi 2. din Teorema 1.6.1.

□

Concluzia 2.2. *Teorema 1.8.3 datorată lui Ran şi Reurings* [**51**] *referitoare la contracţii în spaţii metrice parţial ordonate este o consecinţă a Teoremei 2.1.2.*

Proof: Considerăm graful G_1, definit prin $E(G_1) = \{(x, y) \in X \times X \,|x \preccurlyeq y\}$, care este un graf slab conex deoarece orice submulţime cu două elemente este mărginită şi orice aplicaţie $T : X \to X$ care verifică ipoteza acestei teoreme este o G_1-contracţie, deci aplicând Teorema 2.1.2 obţinem că T este PO. □

Teorema 2.1.2 este o generalizare şi a binecunoscutei teoreme de punct fix a lui Edelstein [**27**].

Teorema 2.2.1 (Edelstein, [**27**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi ϵ-înlănţuit pentru un $\epsilon > 0$, adică, pentru $x, y \in X$ date, există $N \in \mathbb{N}$ şi un şir $(x_i)_{i=0}^{N}$ astfel încât $x_0 = x, x_N = y$ şi $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ pentru $i = 1, ..., N$. Fie $T : X \to X$ astfel încât*

$$\exists \alpha \in (0, 1), \forall x, y \in X \,(d(x, y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y)). \tag{2.37}$$

Atunci T este PO.

Proof: Pentru început să observăm că relaţia (2.37) implică faptul că T este continuu. Considerăm graful G astfel încât $V(G) = X$ şi

$$E(G) = \{(x, y) \in X \times X \,|d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Atunci ϵ-înlănţuirea lui (X, d) implică faptul că graful G este conex. Dacă $(x, y) \in E(G)$ atunci

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y) \leqslant \alpha\varepsilon \leqslant \varepsilon$$

deci $(Tx, Ty) \in E(G)$ şi din Definiţia (2.37), T este o G-contracţie. Aplicând acum Teorema 2.1.2, obţinem că T este PO.

□

Teorema de punct fix a lui W.A. Kirk, P.S. Srinivasan and P. Veeramani [**39**] este o consecinţă a Teoremei 2.1.2, şi anume:

Teorema 2.2.2 ([**39**]). *Fie $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ şi $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ o familie de p submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric (X, d). Presupunem că $T : \{A_i\}_{i=1}^{p} \to \{A_i\}_{i=1}^{p}$ verifică (1.18) şi*

$$d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y), \text{ pentru orice } x \in A_i, \; y \in A_{i+1}, 1 \leq i \leq p \tag{2.38}$$

unde $A_{p+1} = A_1$. Dacă $k \in (0, 1)$ atunci T are un unic punct fix.

Proof: Considerăm graful G astfel încât $V(G) = X$ şi

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X \,| x \in A_i \text{ şi } y \in A_{i+1}, i = 1, ..., p\}$$

Deoarece T este un operator ciclic avem că dacă $(x,y) \in E(G)$ atunci $x \in A_i$ şi $y \in A_{i+1}$ deci $Tx \in A_{i+1}$ şi $Ty \in A_{i+2}$, prin urmare $(Tx, Ty) \in E(G)$. Folosind şi relaţia (2.38) ne rezultă că T este o G-contracţie. Din definirea muchiilor lui G avem că G este slab conex. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci există $j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $x \in A_j$. Dar şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în fiecare mulţime A_i, pentru $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ format din acei termeni care se găsesc în A_{j-1} verifică condiţia (2.32) din Teorema 2.1.2 punctul 5, şi deci T este PO.

□

Ultima consecinţă pe care o vom prezenta este faptul că şi Teorema Luxemburg-Jung [**40**], [**32**] sau Alternativa punctului fix este o consecinţă a Teoremei 2.1.2. După care vom prezenta două aplicaţii ale acestei teoreme la stabilitatea de tip Hyers-Ulam pentru o ecuaţie funcţională generalizată de tip Cauchy respectiv pentru o ecuaţie diferenţială liniară de ordin I. Folosind teoria punctului fix pentru contracţii pe un graf vom prezenta şi vom demonstra de fapt forma acestei teoreme introdusă de V. Radu în [**50**].

Teorema 2.2.3 (Alternativa punctului fix)**.** *Fie (Ω, d) un spaţiu metric generalizat şi $T : \Omega \to \Omega$ o contracţie cu constanta $a \in [0, 1)$ Atunci, pentru fiecare element $x \in \Omega$, ori*

$$d\left(T^n x,\, T^{n+1}x\right) = \infty,\ \forall n \geqslant 0,$$

ori există un număr natural n_0 astfel încât

i. $d(T^n x,\, T^{n+1}x) < \infty$ *pentru orice* $n \geqslant n_0$*;*
ii. Şirul $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ *este convergent către un punct fix* y^* *a lui* T*;*
iii. y^* *este unicul punct fix a lui* T *în mulţimea* $\Gamma = \{y \in \Omega \,| d(T^{n_0}x, y) < \infty\}$*;*
iv. $d(y,\, y*) \leqslant \frac{1}{1-a} d(y,\, Ty)$ *pentru orice* $y \in \Gamma$*.*

Proof: Considerăm graful G astfel încât $V(G) = X$ şi

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X \,| d(x,y) < \infty\}.$$

Datorită simetriei distanţei avem că $\widetilde{G} = G$.

Dacă $(x,y) \in E(G)$ adică $d(x,y) < \infty$, atunci $d(Tx, Ty) \leqslant ad(x,y) < \infty$ deci şi $(Tx, Ty) \in E(G)$, iar T fiind o contracţie va rezulta că T este o G-contracţie.

Fie $x \in X$ astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $d(T^{n_0}x,\, T^{n_0+1}x) < \infty$, atunci $(T^{n_0}x,\, T^{n_0+1}x) \in E(G)$ adică $T^{n_0}x \in X_T$ şi deci

$$X_T \neq \emptyset.$$

Prin inducţie se demonstrează uşor că

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant a^{n-n_0} d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right), \text{ pentru orice } n \geqslant n_0,$$

şi deci $d\left(T^n x,\, T^{n+1}x\right) < \infty$ pentru orice $n \geqslant n_0$, adică relaţia de la *i.* este demonstrată.

Pentru acelaşi x ales mai sus, avem că:

$$\left[T^{n_0}x\right]_G = \{y \in X \mid \exists \text{ un drum în } G \text{ de la } x \text{ la } y\}.$$

Dacă $y \in \left[T^{n_0}x\right]_G$ atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^{N}$ in G de la $T^{n_0}x$ la y, adică, $x_0 = T^{n_0}x$, $x_N = y$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ pentru $i = 1, ..., N$. Atunci

$$d\left(T^{n_0}x, y\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} d\left(x_{i-1}, x_i\right) < \infty$$

Prin urmare $\left[T^{n_0}x\right]_G \subseteq \Gamma$ iar relaţia $\Gamma \subseteq \left[T^{n_0}x\right]_G$ este imediată, rezultă că $\Gamma = \left[T^{n_0}x\right]_G$.

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir convergent la $x^* \in X$ cu proprietatea $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci pentru $\epsilon = 1$ există $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d\left(x_n, x^*\right) < 1$ pentru orice $n \geq n_\epsilon$, deci

$$\left(x_n, x^*\right) \in E(G),\ \forall n \geqslant n_\epsilon.$$

Prin urmare subşirul $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ verifică condiţia (2.32) din Teorema 2.1.2. Atunci din punctul *4.* al acestei teoreme ne rezultă că $T|_{[T^{n_0}x]_G}$ este PO ceea ce implică *ii.* şi *iii.* din Alternativa punctului fix.

Pentru *iv.*, fie $y \in \Delta$ deci $d\left(y, T^{n_0}x\right) < \infty$. Deoarece şirul $(T^n x)_{n\geqslant n_0}$ este convergent atunci $d\left(T^{n_0}x, T^{n-1}x\right) < \infty$ pentru orice $n > n_0$ şi deci $d\left(y, T^{n-1}x\right) < \infty$, adică $\left(y, T^{n-1}x\right) \in E(G)$. Aplicând inegalitatea triunghiului şi faptul că T este o G-contracţie vom obţine:

$$d\left(y, T^n x\right) \leqslant d\left(y, Ty\right) + d\left(Ty, T^n x\right) \leqslant d\left(y, Ty\right) + a d\left(y, T^{n-1}x\right), \tag{2.39}$$

pentru orice $n \geq n_0$.

Trecând la limită în relaţia (2.39) vom obţine că

$$d\left(y, y^*\right) \leqslant d\left(y, Ty\right) + a d\left(y, y^*\right)$$

adică $d\left(y,\, y*\right) \leqslant \frac{1}{1-a} d\left(y,\, Ty\right)$ pentru orice $y \in \Delta$ şi deci teorema este demonstrată. $\square$

În continuare vom prezenta o aplicaţie a Alternativei punctului fix deci şi a Teoremei 2.1.2 la stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei:

$$f\left(a_1(x_1) + a_2(x_2) + ... + a_n(x_n)\right) = m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + ... + m_n f(x_n), \tag{2.40}$$

unde $a_i : X \to X$, $i = \overline{1, n}$ sunt n funcţii date, $f : X \to Y$ este funcţia necunoscută şi $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 1$, pe care autorul a demonstrat-o în [**13**].

Studiul stabilităţii ecuaţiiilor funcţionale este strâns legat de problema lui Ulam [**65**] referitoare la stabilitatea morfismelor de grupuri şi anume:

Fie G_1 un grup şi G_2 un grup metric cu o metrică $d(\cdot,\cdot)$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$ astfel încât, dacă funcţia $h : G_1 \to G_2$ verifică inegalitatea

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$$

pentru orice $x, y \in G_1$, atunci există un morfism $H : G_1 \to G_2$ cu

$$d(h(x), H(x)) < \varepsilon$$

pentru orice $x \in G_1$? Cu alte cuvinte, dacă o funcţie este aproape un morfism atunci există un morfism de grupuri "apropiat" de aceasta?

D. H. Hyers (1941) [**29**] a dat un răspuns afirmativ la problema lui Ulam pentru spaţii Banach şi anume

Teorema 2.2.4 (Hyers)**.** *Fie E şi E' două spaţii Banach şi $f : E \to E'$ o funcţie care verifică relaţia*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta,\ \forall x, y \in X. \tag{2.41}$$

Atunci limita $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ există pentru orice $x \in E$, L este o funcţie aditivă şi inegalitatea

$$\|f(x) - L(x)\| < \delta \tag{2.42}$$

este adevărată pentru orice $x \in E$. Mai mult $L(x)$ este singura funcţie aditivă care verifică inegalitatea (2.42).

Th. M. Rassias [**53**], Z. Gajda [**5**] si T. Aoki [**1**] au extins rezultatele obţinute de D.H. Hyers slăbind condiţiile din ipoteză şi anume înlocuind membrul din partea stângă cu o funcţie nemărginită si au demonstrat că:

Teorema 2.2.5 (Aoki-Rassias-Gajda)**.** *Fie E şi E' un spaţiu normat, respectiv un spaţiu Banach iar $f : E \to E'$ o funcţie. Presupunem că funcţia $f(tx)$ este continuă în t, unde $t \in \boldsymbol{R}$, pentru orice $x \in E$ fixat şi că*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant \theta \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right) \tag{2.43}$$

pentru orice $x, y \in E$, unde $p \neq 1$. În aceste condiţii există o unică funcţie liniară $L : E \to E'$ astfel încât

$$\|f(x) - L(x)\| \leqslant \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \tag{2.44}$$

pentru orice $x \in E$.

În [**20**], Pasc Găvruţă a generalizat teorema lui Rassias şi deci implicit teorema lui Hyers, în articolul publicat în anul 1992.

Notăm cu $(G,+)$ un grup abelian şi cu $(X,\|\cdot\|)$ un spaţiu Banach, iar cu $\phi : G\times G\to[0,\infty)$ o funcţie cu proprietatea:

$$\widetilde{\phi}(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi\left(2^k x, 2^k y\right) < \infty \tag{2.45}$$

pentru orice $x,y\in G$.

Teorema 2.2.6 (Găvruţă)**.** *Fie $f : G\to X$ o funcţie astfel încât*

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leqslant \phi(x,y) \tag{2.46}$$

pentru orice $x,y\in G$.

Atunci există o unică funcţie aditivă $L : G\to X$ astfel încât

$$\|f(x)-L(x)\| \leqslant \frac{1}{2}\widetilde{\phi}(x,x) \tag{2.47}$$

pentru orice $x,y\in G$.

În [**50**] V. Radu a avut excelenta idee să folosească Alternativa punctului fix pentru a demonstra stabilitatea ecuaţiei funcţionale a lui Cauchy. Folosind aceeaşi tehnică vom demonstra stabilitatea Hyers-Ulam şi stabilitatea Hyers-Ulam generalizată pentru o generalizare a ecuaţiei lui Cauchy şi anume pentru ecuaţia

$$f(a_1(x_1)+a_2(x_2)+...+a_n(x_n)) = m_1 f(x_1)+m_2 f(x_2)+...+m_n f(x_n), \tag{2.48}$$

Stabilitatea unor generalizări ale ecuaţiei lui Cauchy au fost facute în[**3**], [**52**] şi [**64**].

În completare vom demonstra următoarea lemă:

Lema 2.2.1 (F. Bojor, [**13**])**.** *Fie X şi Y două spaţii vectoriale şi $a_i : X\to X$, $i=\overline{1,n}$, sunt n funcţii astfel încât cel puţin două dintre ele sunt bijective, iar $m_1+m_2+...+m_n\neq 1$. În aceste condiţii orice soluţie a ecuaţiei (2.40) este o funcţie aditivă.*

Proof: În (2.40) înlocuim $x_i := 0$, $i=\overline{1,n}$ şi vom obţine $f(0) = (m_1+m_2+...+m_n)f(0)$ de unde va rezulta că $f(0)=0$. Fără a reduce generalitatea putem presupune că funcţiile a_1 şi a_2 sunt bijective. În (2.40) înlocuim $x_i := 0$ pentru $i\in\{1,2,...,n\}\setminus\{j\}$; $j=\overline{1,n}$ şi vom obţine

$$f(a_j(x)) = m_j f(x),\ \ \forall x\in X \text{ şi } \forall j\in\{1,2,...,n\} \tag{2.49}$$

şi cu aceaste relaţii ecuaţia (2.40), pentru $x_3=x_4=...=x_n := 0$ devine

$$f(a_1(x_1)+a_2(x_2)) = f(a_1(x_1))+f(a_2(x_2)),\ \ \forall x_1,x_2\in X \tag{2.50}$$

Deoarece funcţiile a_1 şi a_2 sunt bijective deci inversabile putem înlocui $x_1 := a_1^{-1}(x)$ şi $x_2 := a^{-1}(y)$ în (2.50) şi obţinem

$$f(x+y) = f(x)+f(y),\forall x,y\in X$$

adică funcţia f este aditivă. $\square$

În continuare vom demonstra stabilitatea Hyers-Ulam generalizată pentru ecuaţia (2.40). Pentru o funcţie $g : X \to Y$ vom nota cu

$$Dg(x_1, x_2, ..., x_n) = g(a_1(x_1) + a_2(x_2) + ... + a_n(x_n)) - m_1 g(x_1) - m_2 g(x_2) - ... - m_n g(x_n)$$

pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in X$.

Teorema 2.2.7 (F. Bojor, [**13**]). *Se consideră următoarele noţiuni:*

- **i.** *X un spaţiu normat real şi Y un spaţiu Banach real;*
- **ii.** *$m_1, m_2, ...m_n \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $m_1 + m_2 + ... + m_n \overset{not}{=} S \neq 0$*
- **iii.** *$a_i : X \to X$, $i = \overline{1,n}$, n funcţii astfel încât funcţia $A : X \to Y$ definită prin $A(x) = a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x)$, $\forall x \in X$ să fie aditivă , bijectivă şi să comute cu fiecare dintre funcţiile a_i, unde $i = \overline{1,n}$;*
- **iv.** *$\varphi : X^n \to [0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea că*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi\left(A^{ki}(x_1), A^{ki}(x_2), ..., A^{ki}(x_n)\right)}{|S|^{ki}} = 0 \tag{2.51}$$

pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, unde $i \in \{\pm 1\}$, iar funcţia

$$x \mapsto \psi(x) = \varphi\left(A^{-1}(x), A^{-1}(x), ..., A^{-1}(x)\right)$$

are proprietatea că $\exists\, M = M(i) \in (0,1)$ astfel încât

$$\psi\left(A^i(x)\right) \leqslant |S|^i M \psi(x), \forall x \in X, i \in \{\pm 1\} \tag{2.52}$$

- **v.** *$f : X \to Y$ o funcţie care verifică inegalitatea*

$$\|Df(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leqslant \varphi(x_1, x_2, ..., x_n), \ \forall\, x_1, x_2, ..., x_n \in X. \tag{2.53}$$

În aceste condiţii există o unică soluţie $L : X \to Y$ a ecuaţiei (2.40) astfel încât inegalitatea

$$\|f(x) - L(x)\| \leqslant \frac{M^{\frac{1-i}{2}}}{(1-M)} \psi(x), \tag{2.54}$$

este adevărată pentru orice $x \in X$.

Proof: Considerăm mulţimea $\Omega := \{g \,|\, g : X \to Y\}$ şi introducem o metrică generalizată pe Ω:

$$d(g,h) = d_\psi(g,h) = \inf\{K \in (0, \infty) \,|\, \|g(x) - h(x)\| \leqslant K\psi(x), \forall x \in X\}.$$

Este uşor de demonstrat că spaţiul $(\Omega,\, d)$ este un spaţiu metric generalizat complet.

Definim funcţia $T : \Omega \to \Omega$ prin:

$$Tf(x) = \frac{1}{S^i} f\left(A^i(x)\right), \ \forall\, x \in X, i \in \{\pm 1\} \tag{2.55}$$

Să observăm că, pentru orice $g, h \in \Omega$ avem:

$$\begin{aligned} d(g,h) < K &\Rightarrow \|g(x) - h(x)\| \leqslant K\psi(x), \quad x \in X \\ &\Rightarrow \left\| \frac{1}{S^i} g\left(A^i(x)\right) - \frac{1}{S^i} h\left(A^i(x)\right) \right\| \leqslant \frac{1}{|S|^i} K\psi\left(A^i(x)\right), \; x \in X \\ &\Rightarrow \left\| \frac{1}{S^i} g\left(A^i(x)\right) - \frac{1}{S^i} h\left(A^i(x)\right) \right\| \leqslant MK\psi(x), \; x \in X \\ &\Rightarrow d(Tg, Th) \leqslant MK. \end{aligned}$$

Deci vom obţine că $d(Tg, Th) \leqslant Md(g,h)$ pentru orice $g, h \in \Omega$ deci T este o contracţie cu constanta de contracţie M.

Dacă în relaţia (2.53) înlocuim $x_1 = x_2 = ... = x_n := x$ obţinem că

$$\|f(A(x)) - Sf(x)\| \leqslant \varphi(x, x, ..., x), \quad \forall x \in X. \tag{2.56}$$

Relaţia (2.56) poate fi scrisă astfel:

$$\left\| \frac{1}{S} f(A(x)) - f(x) \right\| \leqslant \frac{1}{|S|} \cdot \psi(A(x)), \quad \forall x \in X,$$

relaţie ce devine folosind (2.52) şi (2.55)

$$\|Tf(x) - f(x)\| \leqslant M\psi(x), \quad \forall x \in X$$

şi deci

$$d(Tf, f) \leqslant M < \infty, \text{în cazul } i = 1. \tag{2.57}$$

Dacă în (2.56) înlocuim $x := A^{-1}(x)$ vom obţine că

$$\left\| f(x) - Sf\left(A^{-1}(x)\right) \right\| \leqslant \psi(x), \; \forall\, x \in X. \tag{2.58}$$

Relaţie care devine

$$\|f(x) - Tf(x)\| \leqslant \psi(x), \; \forall\, x \in X$$

adică

$$d(f, Tf) \leqslant 1 < \infty, \text{în cazul } i = -1. \tag{2.59}$$

Folosind Alternativa punctului fix, ne va rezulta în ambele cazuri, că există un punct fix L a lui T în Ω astfel încât

$$L(x) = \lim_{k \to \infty} T^k f(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{f\left(A^{ki}(x)\right)}{S^{ki}}, \quad \forall x \in X \tag{2.60}$$

deoarece $\lim\limits_{k \to \infty} d\left(T^k f, L\right) = 0$

Pentru a demonstra că L este soluţie a ecuaţiei (2.40) vom înlocui în (2.53) pe $x_j := A^{ki}(x_j)$ unde $j = \overline{1, n}$ şi vom obţine:

$$\begin{aligned} \left\| f\left(a_1\left(A^{ki}(x_1)\right) + ... + a_n\left(A^{ki}(x_n)\right)\right) - m_1 f\left(A^{ki}(x_1)\right) - ... - m_n f\left(A^{ki}(x_n)\right) \right\| \leqslant \\ \leqslant \varphi\left(A^{ki}(x_1), ..., A^{ki}(x_n)\right) \end{aligned}$$

relaţie pe care o împărţim cu $|S|^{ki}$ şi obţinem:
(2.61)
$$\left\|T^k f\left(a_1\left(x_1\right)+\ldots+a_n\left(x_n\right)\right)-m_1 T^k\left(f\left(x_1\right)\right)-\ldots-m_n T^k\left(f\left(x_n\right)\right)\right\| \leqslant \frac{\varphi\left(A^{ki}\left(x_1\right), \ldots, A^{ki}\left(x_n\right)\right)}{|S|^{ki}}$$

Trecând la limită în (2.61), când $k \rightarrow \infty$ şi folosind (2.51) vom obţine că

$$L\left(a_1\left(x_1\right)+\ldots+a_n\left(x_n\right)\right)=m_1 L\left(x_1\right)+\ldots+m_n L\left(x_n\right) \tag{2.62}$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in X$, adică funcţia L este soluţie a ecuaţiei funcţionale (2.40).

Aplicând Alternativa punctului fix, deoarece L este unicul punct fix a lui T în mulţimea $\Delta=\{g \in \Omega \mid d(f, g) \leqslant \infty\}$, va rezulta că L este unica funcţie astfel încât

$$d(f, L) \leqslant \frac{1}{1-M} d(f, T f),$$

de unde folosind (2.57) şi (2.59) vom obţine că relaţia (2.54) este adevarată şi cu aceasta teorema este demonstrată. □

În ceea ce urmează vom deduce din Teorema 2.2.7 stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.40)

Corolarul 2.2.1 (F. Bojor, [**13**]). *Se consideră următoarele noţiuni:*

- ***i.*** *X un spaţiu normat real şi Y un spaţiu Banach real;*
- ***ii.*** *$m_1, m_2, \ldots m_n \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $m_1+m_2+\ldots+m_n \stackrel{not}{=} S \neq 0$*
- ***iii.*** *$a_i: X \rightarrow X$, $i=\overline{1, n}$, n funcţii omogene astfel încât funcţia $A: X \rightarrow Y$ definită prin $A(x)=a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)=b x$, $\forall x \in X$ unde $b \in R \backslash\{0\}$;*
- ***iv.*** *ε şi p sunt două numere fixate astfel încât $\varepsilon \geq 0$ şi $p \neq \log_{|b|}|S|$ iar $f: X \rightarrow Y$ o funcţie care verifică inegalitatea*

(2.63)
$$\left\|f\left(a_1\left(x_1\right)+\ldots+a_n\left(x_n\right)\right)-m_1 f\left(x_1\right)-\ldots-m_n f\left(x_n\right)\right\| \leqslant \theta\left(\left\|x_1\right\|^p+\ldots+\left\|x_n\right\|^p\right),$$

pentru $\forall x_1, \ldots x_n \in X$

În aceste condiţii există o unică soluţie $L: X \rightarrow Y$ a ecuaţiei (2.40) astfel încât inegalitatea

$$\|f(x)-A(x)\| \leqslant \frac{n \varepsilon}{\left||S|-|b|^p\right|}\|x\|^p \tag{2.64}$$

pentru orice $x \in X$.

Proof: Notăm cu $\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right):=\varepsilon\left(\left\|x_1\right\|^p+\left\|x_2\right\|^p+\ldots+\left\|x_n\right\|^p\right)$. Atunci avem că

$$\frac{\varphi\left(A^{ki}\left(x_1\right), \ldots, A^{ki}\left(x_n\right)\right)}{|S|^{ki}}=\left(\frac{|b|^p}{|S|}\right)^{ki} \varepsilon\left(\left\|x_1\right\|^p+\ldots+\left\|x_n\right\|^p\right) \rightarrow 0$$

atunci când $k \to \infty$, unde $p < \log_{|b|}|S|$ dacă $i = 1$ şi $p > \log_{|b|}|S|$ dacă $i = -1$ deci relaţia (2.51) este adevărată. Deoarece

$$\frac{1}{|S|^{ki}}\psi\left(A^{ki}(x)\right) = n\varepsilon\left(\frac{|b|^p}{|S|}\right)^{ki}\|x\|^p$$

are loc pentru orice $x \in X$, observăm că relaţia (2.52) are loc pentru $a = \frac{|S|}{|b|^p}$, unde $p < \log_{|b|}|S|$ dacă $i = -1$ respectiv $a = \frac{|b|^p}{|S|}$, unde $p > \log_{|b|}|S|$ dacă $i = 1$ Atunci relaţia (2.54) implică relaţia (2.64) care încheie demonstraţia. $\square$

Următorul corolar este demonstrarea stabilităţii Hyers-Ulam pentru ecuaţia (2.40).

Corolarul 2.2.2 (F. Bojor, [**13**]). *Se consideră următoarele noţiuni:*

i. *X un spaţiu normat real şi Y un spaţiu Banach real;*

ii. *$m_1, m_2, ...m_n \in \boldsymbol{R}$ astfel încât $m_1 + m_2 + ... + m_n \overset{not}{=} S \neq 0$*

iii. *$a_i : X \to X$, $i = \overline{1,n}$, n funcţii omogene astfel încât funcţia $A : X \to Y$ definită prin $A(x) = a_1(x) + a_2(x) + ... + a_n(x) = bx$, $\forall x \in X$ unde $b \in R\setminus\{0\}$;*

iv. *$\theta \geq 0$ un număr real fixat şi $f : X \to Y$ o funcţie care verifică inegalitatea*

$$\|f(a_1(x_1) + ... + a_n(x_n)) - m_1 f(x_1) - ... - m_n f(x_n)\| \leqslant \theta, \tag{2.65}$$

pentru $\forall x_1, ...x_n \in X$

Atunci există o unică soluţie a ecuaţiei (2.40), $A : X \to Y$ care verifică inegalitatea

$$\|f(x) - A(x)\| \leqslant \frac{\theta}{||S| - 1|},\ \forall x \in X. \tag{2.66}$$

Proof: În Corolarul 2.2.1, înlocuim $p := 0$ şi $\varepsilon := \frac{\theta}{n}$, de unde rezultă concluzia corolarului. $\square$

În continuare vom prezenta a doua aplicaţie a Alternativei punctului fix deci şi a Teoremei 2.1.2 la stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul întâi.

Fie $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ şi I un interval. Pentru $y \in C^n(I, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ şi $\varphi \in C(I, \mathbb{R}_+)$ considerăm următoarea ecuaţie:

$$y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t),\ t \in I \tag{2.67}$$

şi următoarele inecuaţii

$$\left|y^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t)\right| \leq \varepsilon,\ t \in I \tag{2.68}$$

respectiv

$$\left|y^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t)\right| \leq \varphi(t),\ t \in I \tag{2.69}$$

Definiţia 2.2.1. *Ecuaţia (2.67) este Hyers-Ulam stabilă dacă există un număr real* $c > 0$ *astfel încât pentru orice* $\varepsilon > 0$ *şi pentru orice soluţie* $s \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ *a inecuaţiei (2.68) există o soluţie* $y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ *a ecuaţiei (2.67) cu proprietatea*

$$|s(t) - y(t)| \leqslant c \cdot \varepsilon, \forall t \in I.$$

Definiţia 2.2.2. *Ecuaţia (2.67) este Hyers-Ulam-Rassias stabilă, în raport cu* φ*, dacă există un număr real* $c_\varphi > 0$ *astfel încâtpentru orice soluţie* $s \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ *a inecuaţiei (2.69) există o soluţie* $y \in C^{(n)}(I, \mathbb{R})$ *a ecuaţiei (2.67) cu proprietatea*

$$|s(t) - y(t)| \leqslant c_\varphi \cdot \varphi(t), \forall t \in I.$$

Alsina şi Ger au fost primii autori care au investigat stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiilor diferenţiale. În 1998, au demonstrat [**8**] stabilitatea ecuaţiei diferenţiale:

$$y'(t) = y(t). \tag{2.70}$$

Folosind aceaşi abordare ca în [**8**], Miura [**42**] a demonstrat stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei diferenţiale

$$y'(t) = \lambda y(t). \tag{2.71}$$

S.M. Jung [**36**], [**35**], [**33**], [**34**] a aplicat Alternativa punctului fix pentru a demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei integrale Volterra de ordinul doi şi a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi. În continuare vom demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias şi stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei diferenţiale

$$y'(x) + f(x)y(x) + g(x) = 0 \tag{2.72}$$

în anumite condiţii, altele decât cele din [**36**].

Pentru început vom demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.72) pe intervale de forma $I = [a, b)$ where $-\infty < a < b \leq \infty$.

Teorema 2.2.8 (F. Bojor, [**16**]). *Fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv* M *astfel încât ,* $|f(x)| \geq M$ *pentru orice* $x \in I$*. Presupunem că* $\psi : I \to [0, \infty)$ *este o funcţie integrabilă cu proprietatea că* $\exists\, P \in (0, 1)$ *astfel încât*

$$\int_a^x |f(t)|\psi(t)\,dt \leq P\psi(x) \tag{2.73}$$

pentru orice $x \in I$*. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă* $y : I \to \mathbb{R}$ *verifică relaţia:*

$$|y'(x) + f(x)y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.74}$$

pentru orice $x \in I$*, atunci există o unică soluţie* $S : I \to \mathbb{R}$ *a ecuaţiei (2.72) care verifică relaţiile:*

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP}\psi(x) \tag{2.75}$$

pentru orice $x \in I$ şi $S(a) = y(a)$.

Proof: Considerăm mulţimea $\Omega = \{h : I \to \mathbb{R} \,|\, h$ este continuă şi $h(a) = y(a)\}$ şi metrica generalizată $d(h_1, h_2)$ definită pe Ω prin:

$$d(h_1, h_2) = d_\psi(h_1, h_2) = \inf\{k > 0 \,||h_1(x) - h_2(x)| \le k\psi(x), \forall x \in I\}.$$

Atunci (Ω, d) este un spaţiu metric generalizat (see [**36**]). Definim operatorul $T : \Omega \to \Omega$, prin

$$Th(x) = y(a) - \int_a^x (f(t)h(t) + g(t))dt \ \ (x \in I)$$

pentru orice $h \in \Omega$. Întradevăr Th este o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe I, deoarece f şi g sunt funcţii continue şi $Th(a) = y(a)$.

Fie $h_1, h_2 \in \Omega$. Atunci avem:

$$\begin{aligned} &|Th_1(x) - Th_2(x)| = |\textstyle\int_a^x f(t)(h_1(t) - h_2(t))\,dt| \le \\ &\le \textstyle\int_a^x |f(t)|\,|h_1(t) - h_2(t)|\,dt \le d(h_1, h_2)\int_a^x |f(t)|\psi(t)\,dt \le P\psi(x)\,d(h_1, h_2) \end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$. Prin urmare,

$$d(Th_1, Th_2) \le Pd(h_1, h_2) \tag{2.76}$$

adică operatorul T este o contracţie cu constanta P.

Integrând ambii termeni ai relaţiei (2.74) pe $[a, x]$ wom obţine:

$$\left| y(x) - y(a) + \int_a^x (f(t)y(t) + g(t))\,dt \right| \le \frac{P}{M}\psi(x) \tag{2.77}$$

pentru orice $x \in I$, care implică $d(y, Ty) \le \frac{P}{M} < \infty$. Aplicând Alternativa punctului fix ne rezultă că există un element $S = \lim\limits_{n\to\infty} T^n y$ şi S este unicul punct fix a lui T în mulţimea $\Delta = \{h \in \Omega \,|\, d(y, h) < \infty\}$

Pentru a demonstra că S este o soluţie a ecuaţiei (2.72), vom deriva în raport cu x ambii membrii ai ecuaţiei:

$$S(x) = TS(x),\ x \in I. \tag{2.78}$$

Vom obţine:

$$S'(x) = -f(x)S(x) - g(x) \tag{2.79}$$

pentru orice $x \in I$ relaţie care implică că funcţia S este o soluţie a ecuaţiei (2.72) şi verifică relaţia $S(a) = y(a)$.

Aplicând din nou Alternativa punctului fix, vom obţine:

$$d(h, S) \le \frac{1}{1-P}d(h, Th) \ \text{ pentru orice } h \in \Delta.$$

Deoarece $y \in \Delta$ vom avea că

$$d(y, S) \leqslant \frac{1}{1-P}d(y, Ty) \leqslant \frac{P}{M(1-P)}$$

prin urmare

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP}\psi(x)$$

pentru orice $x \in I$. Deci relaţia (2.75) este demonstrată.

$\square$

Analog se poate demonstra următoarea teoremă referitoare la stabilitatea de tip Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.72) pe intervale de forma $J = (b, a]$, unde $-\infty \leq b < a < \infty$.

Teorema 2.2.9 (F. Bojor, [**16**])**.** *Fie $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv M astfel încât $|f(x)| \geq M$ pentru orice $x \in J$. Presupunem că $\psi : J \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă cu proprietatea că $\exists\, P \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\int_x^a |f(t)|\psi(t)\, dt \leq P\psi(x) \tag{2.80}$$

pentru orice $x \in J$. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ verifică relaţia:

$$|y'(x) + f(x)\, y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.81}$$

pentru orice $x \in J$, atunci există o unică soluţie $S : J \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.72) care verifică următoarele relaţii:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP}\psi(x) \tag{2.82}$$

pentru orice $x \in J$ şi $S(a) = y(a)$.

Stabilitatea Hyers-Ulam-Rassias a ecuaţiei (2.72) pe $\mathbb{R}$ o vom demonstra folosind Teorema 2.2.8 şi Teorema 2.2.9.

Corolarul 2.2.3 (F. Bojor, [**16**])**.** *Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii continue cu proprietatea că există un număr pozitiv M,astfel încât $|f(x)| \geq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Presupunem că $\psi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ este o funcţie integrabilă cu proprietatea că $\exists\, P \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\left|\int_0^x |f(t)|\psi(t)\, dt\right| \leq P\psi(x) \tag{2.83}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ verifică relaţia:

$$|y'(x) + f(x)\, y(x) + g(x)| \leq \psi(x) \tag{2.84}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, atunci există o unică soluţie $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.72) care verifică următoarele relaţii:

$$|y(x) - S(x)| \leq \frac{P}{M - MP} \cdot \psi(x) \tag{2.85}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $S(0) = y(0)$.

Proof: Din inegalitatea (2.83) avem că:

$$\int_0^x |f(t)|\psi(t)\,dt \le P\psi(x) \tag{2.86}$$

pentru orice $x \ge 0$. Aplicând Teorema 2.2.8, ne rezultă că există o soluţie a ecuaţiei (2.72), $S_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ care verifică (2.75) şi $S_1(0) = y(0)$.

Tot din inegalitatea (2.83) vom obţine că:

$$\int_x^0 |f(t)|\psi(t)\,dt \le P\psi(x) \tag{2.87}$$

pentru orice $x \le 0$. Aplicând Teorema 2.2.9, ne rezultă că există o soluţie a ecuaţiei (2.72), $S_2 : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$ care verifică (2.82) şi $S_2(0) = y(0)$. Este uşor de verificat că funcţia

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \ge 0 \\ S_2(x), & x < 0 \end{cases} \tag{2.88}$$

este derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$, este soluţie a ecuaţiei (2.72) pe $\mathbb{R}$ şi verifică (2.85). □

Folosind Teorema 2.2.8 vom demonstra stabilitatea de tip Hyers-Ulam a ecuaţiei (2.72) pe $I = [a,b)$ unde $-\infty < a < b \le \infty$.

Corolarul 2.2.4 (F. Bojor,[**16**]). *Fie $\varepsilon, M > 0$ şi $f : I \to [M,\infty)$ respectiv $g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Dacă o funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : I \to \mathbb{R}$ verifică relaţia*

$$|y'(x) + f(x)y(x) + g(x)| \le \varepsilon \tag{2.89}$$

pentru orice $x \in I$, atunci există o unică soluţie $S : I \to \mathbb{R}$ a ecuaţiei (2.72) care verifică relaţiile:

$$|y(x) - S(x)| \le \frac{\varepsilon}{M(2q-1)} \tag{2.90}$$

pentru orice $x \in I$, unde $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi $S(a) = y(a)$.

Proof: Fie $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Înmulţind relaţia (2.89) cu $e^{q\int_a^x f(t)dt}$, şi notând

$$z(x) := y(x)\,e^{q\int_a^x f(t)dt}, x \in I \tag{2.91}$$

avem că

$$\left|z'(x) + (1-q)f(x)z(x) + g(x)e^{q\int_a^x f(t)dt}\right| \le \varepsilon \cdot e^{q\int_a^x f(t)dt} \tag{2.92}$$

pentru orice $x \in I$. Atunci funcţia $F(x) = (1-q)f(x),\, x \in I$ este continuă pe I şi satisface relaţia $|F(x)| > (1-q)M$ pentru orice $x \in I$.

Fie $\psi(x) = \varepsilon \cdot e^{q\int_a^x f(t)dt}$, $x \in I$ atunci

$$\int_a^x |F(t)|\,\psi(t)\,dt = (1-q)\,\varepsilon\int_a^x f(t)\,e^{q\int_a^t f(u)du}dt \le \frac{1-q}{q}\psi(x) \tag{2.93}$$

pentru orice $x \in I$, deci funcţia $\psi : I \to [0, \infty)$ verifică relaţia (2.73), cu $P = \frac{1-q}{q} \in (0, 1)$.

Din Teorema 2.2.8 ne rezultă că există $s \in C^1(I, \mathbb{R})$ care este unica soluţie a ecuaţiei:

$$z'(x) + (1-q) f(x) z(x) + g(x) e^{q \int_a^x f(t)dt} = 0 \tag{2.94}$$

şi verifică relaţiile

$$|z(x) - s(x)| \leq \frac{1}{M(2q-1)} \cdot \varepsilon \cdot e^{q \int_a^x f(t)dt} \tag{2.95}$$

pentru orice $x \in I$ şi $s(a) = z(a)$.

Atunci funcţia $S(x) = s(x) e^{-q \int_a^x f(t)dt}$, este o soluţie a ecuaţiei (2.72) şi verifică (2.90). □

Ecuaţia (2.72) nu este Hyers-Ulam stabilă pe intervale de forma $J = (-\infty, a]$ în general, aşa cum se poate vedea din următorul exemplu.

Exemplul 2.2.1 (F. Bojor,[**16**]). *Fie ecuaţia (2.72) unde $f(x) = x^2$ şi $g(x) = 0$. Soluţia acestei ecuaţii $S : J \to \mathbb{R}$ care verifică condiţia $S(a) = p$ este*

$$S(x) = p \cdot e^{\frac{a^3 - x^3}{3}}. \tag{2.96}$$

O funcţie derivabilă cu derivata continuă $y : J \to \mathbb{R}$ care verifică (2.89) este

$$y(x) = p \cdot e^{\frac{a^3 - x^3}{3}} + \varepsilon \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} \int_a^x e^{\frac{t^3}{3}} dt. \tag{2.97}$$

Presupunând că ecuaţia (2.72) este Hyers-Ulam stabilă, va rezulta că există $k > 0$ astfel încât

$$|y(x) - S(x)| \leq \varepsilon \cdot k \tag{2.98}$$

pentru orice $x \in J$. Prin înlocuire vom obţine că:

$$\left| \int_a^x e^{\frac{t^3}{3}} dt \right| \leq k e^{\frac{x^3}{3}} \tag{2.99}$$

pentru orice $x \in J$. Trecând la limită când $x \to -\infty$ vom obţine o contradicţie. Deci ecuaţia (2.72) nu este Hyers-Ulam stabilă pe $\mathbb{R}$.

CAPITOLUL 3

Teoreme de punct fix pentru contracţii generalizate în spaţii metrice înzestrate cu un graf

În acest capitol, lucrând în spaţii metrice înzestrate cu un graf vom generaliza noţiunile de operatori Kannan, Zamfirescu, Círić-Reich-Rus, Bianchini şi φ- contracţii pentru spaţii metrice înzestrate cu un graf şi vom da condiţii necesare pentru ca aceşti operatori să fie PO. Toate aceste teoreme vor generaliza şi extinde rezultatele clasice obţinute pentru aceşti operatori. In cele ce urmează vom considera că (X, d) este un spaţiu metric, şi că G este un graf orientat cu proprietăţile $V(G) = X$, $E(G) \supseteq \Delta$ iar G nu are muchii paralele. Contribuţiile originale ale autorului din acest capitol sunt:
Definiţiile 3.1.1,3.2.1,3.3.1,3.4.1,3.5.1,
Teoremele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3, 3.5.2,
Corolarele 3.1.1, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1,
Lemele 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.5.1, 3.5.2,
Exemplele 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.2, 3.3.3,3.3.4, 3.4.2,3.4.3, 3.5.2, 3.5.3, 3.5.4,
Observaţiile 3.1.1, 3.1.2, 3.2.3, 3.2.2,
demonstraţiile Teoremelor 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2, 3.4.4, 3.5.3 şi Propoziţia 3.4.1.

1. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Kannan

În această secţiune, folosind ideea lui Jakhymski [**30**] pentru Banach contracţii, vom considera următorul concept:

Definiţia 3.1.1 (F. Bojor, [**17**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric şi G un graf. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-Kannan dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x, y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.
2. *există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a\left[d(x, Tx) + d(y, Ty)\right]$$

pentru orice $(x, y) \in E(G)$.

Observaţia 3.1.1. *Dacă T este un operator G-Kannan, atunci T este atât operator G^{-1}-Kannan cât şi operator $\widetilde{G}$-Kannan.*

Exemplul 3.1.1. *Orice operator Kannan este un operator G_0-Kannan, unde graful G_0 este definit prin $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.1.2 (F. Bojor, [**17**]). *Fie mulţimea $X = \{0,1,3\}$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Operatorul $T : X \to X$, $Tx = 0$,* pentru $x \in \{0,1\}$ şi $Tx = 1$, pentru $x = 3$ *este operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{1}{3}$ pe spaţiul metric X înzestrat cu graful G definit prin $E(G) = \{(0,1);(1,3);(0,0);(1,1));(3,3)\}$, dar nu este un operator Kannan deoarece $d_E(T0,T3) = 1$ şi $d_E(0,T0) + d_E(3,T3) = 2$.*

Observaţia 3.1.2 (F. Bojor, [**17**]). *La fel ca şi în cazul contracţiilor şi a operatorilor Kannan, există G-contraţii care nu sunt operatori G-Kannan precum şi operatori G-Kannan care nu sunt G-contraţii. Mai mult, există operatori G-Kannan care nu sunt G_1-contraţii pentru orice graf G_1 cu proprietatea $G_1 \neq \Delta$, după cum se poate vedea din exemplul următor.*

Exemplul 3.1.3 (F. Bojor, [**17**]). *Fie mulţimea $X = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ şi operatorul $T : X \to X$ definit prin $Tx = 2x$. Considerăm graful G definit prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \left\{\left(2^k n, 2^k(n+1)\right) : n \in X, k \in \mathbb{N}\right\} \cup \Delta$$

Atunci T este un operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{2}{5}$ deoarece

$$\begin{aligned} d_E\left(T2^k n, T2^k(n+1)\right) &= 2^{k+1} \leqslant \frac{2}{5}2^k(2n+1) \\ &= \frac{2}{5}\left[d_E\left(2^k n, T2^k n\right) + d_E\left(2^k(n+1), T2^k(n+1)\right)\right] \end{aligned}$$

pentru orice $n \in X$ şi orice $k \in \mathbb{N}$.

Dacă ar exista un graf $G_1 \neq \Delta$ astfel încât operatorul T să fie o G_1-Banach contracţie cu constanta $a \in [0,1)$ atunci ar exista $x, y \in X$ cu $x \neq y$ astfel încât $(x,y) \in G_1$. Dar atunci

$$d_E(Tx,Ty) = 2|x-y| \leqslant a|x-y|$$

de unde $a \geq 2$. Deci operatorul T nu este o G_1-Banach contracţie.

Lema 3.1.1 (F. Bojor, [**17**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator G-Kannan cu constanta a. Dacă graful G este slab $T-$conex atunci, pentru orice $x, y \in X$, există $r(x,y) \geqslant 0$ astfel încât*

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x,y) + ad\left(T^{n-1}y, T^n y\right) \tag{3.100}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Proof: Fie $x, y \in X$. Dacă $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci pentru $r(x,y) = 0$ relaţia (3.100) este adevărată. Dacă $(x,y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^N$ în $\widetilde{G}$ de la x la y, adică, $x_0 = x, x_N = y$ cu $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N$ şi $(x_i, Tx_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N-1$. Din Observaţia 3.1.1, T este un operator $\widetilde{G}$-Kannan.

Folosind metoda inducţiei matematice, e simplu de demonstrat că $(T^n x_{i-1}, T^n x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N$, $(T^{n-1}x_i, T^n x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N-1$ şi

$$d\left(T^{n-1}x_i, T^n x_i\right) \leqslant \left(\frac{a}{1-a}\right)^{n-1} d\left(x_i, Tx_i\right)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i = 1, ..., N-1$. Aplicând inegalitatea triunghiului vom obţine:

$$\begin{aligned} d\left(T^n x, T^n y\right) &\leqslant \sum_{i=1}^{N} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right) \\ &\leqslant a\left[d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1} d\left(T^{n-1}x_i, T^n x_i\right) + d\left(T^{n-1}y, T^n y\right)\right] \\ &\leqslant a\left[d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + 2\left(\frac{a}{1-a}\right)^{n-1}\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right) + d\left(T^{n-1}y, T^n y\right)\right], \end{aligned}$$

deci este suficient să notăm

$$r\left(x, y\right) = 2\left(1-a\right)\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right)$$

şi astfel demonstraţia este completă.

□

Următoarea teoremă este principalul rezultat pentru operatorii G-Kannan.

Teorema 3.1.1 (F. Bojor, [**17**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi*
$T : X \to X$ un operator G-Kannan. Presupunem că:

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente ale lui X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) = X \times X$ atunci teorema se reduce la Teorema lui Kannan din [**38**].

Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) \neq X \times X$, atunci alegem un element $x \in X$ fixat. Din Lema 3.1.1, există $r\left(x, Tx\right) \geqslant 0$ astfel încât

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r\left(x, Tx\right) + ad\left(T^n x, T^{n+1}x\right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant \frac{a}{1-a} d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \frac{a^n}{\left(1-a\right)^{n+1}} r\left(x, Tx\right). \tag{3.101}$$

Folosind relaţia (3.101) şi un calcul elementar vom obţine:

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d\left(x, Tx\right) + n\frac{a^n}{\left(1-a\right)^{n+1}} r\left(x, Tx\right) \tag{3.102}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $b := \frac{a}{1-a}$. Deoarece $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, atunci vom avea că $b \in [0,1)$ şi folosind relaţia (3.102) vom obţine că:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} d\left(T^k x, T^{k+1} x\right) &\leqslant d\left(x, Tx\right) \sum_{i=0}^{n} b^k + \frac{r\left(x, Tx\right)}{1-a} \sum_{i=0}^{n} k \cdot b^k \\ &= d\left(x, Tx\right) \frac{1-b^{n+1}}{1-b} + \frac{r\left(x, Tx\right)}{1-a} \cdot \frac{nb^{n+2} - (n+1)\, b^{n+1} + b}{(1-b)^2}.\end{aligned}$$

Prin urmare, folosind faptul că $b \in [0,1)$ ne va rezulta că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) < \infty$ şi deoarece

$$d\left(T^n x, T^{n+p} x\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n+p} d\left(T^i x, T^{i+1} x\right) - \sum_{i=0}^{n-1} d\left(T^i x, T^{i+1} x\right) \to 0$$

atunci când $n \to \infty$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}$, rezultă că $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0}$ este un şir Cauchy. Dar (X, d) este un spaţiu metric complet, prin urmare $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0}$ converge la un element $x^* \in X$. Prin urmare şirul $\left(T^n x\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent pentru orice $x \in X$.

Fie $x, y \in X$ atunci există $x^*, y^* \in X$ astfel încât$\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0} \to x^*$ şi $\left(T^n y\right)_{n \geqslant 0} \to y^*$, atunci când $n \to \infty$.
Aplicând Lema 3.1.1, vom obţine că:

$$d\left(T^n x, T^n y\right) \leqslant ad\left(T^{n-1} x, T^n x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r\left(x, y\right) + ad\left(T^{n-1} y, T^n y\right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită când $n \to \infty$ vom obţine că $d\left(x^*, y^*\right) \leqslant 0$, deci $x^* = y^*$ şi deci pentru orice $x \in X$ există un unic $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = x^*.$$

În continuare vom demonstra că $x^* \in F_T$. Deoarece graful G este slab $T-$conex şi $E\left(\widetilde{G}\right) \neq X \times X$, atunci există cel puţin un $x_0 \in X$ astfel încât $\left(x_0, Tx_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ deoarece în caz contrar, pentru orice $x, y \in X$ vom avea că $(x, y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ adică $E\left(\widetilde{G}\right) = X \times X$, prin urmare $\left(T^n x_0, T^{n+1} x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dar $\lim\limits_{n \to \infty} T^n x_0 = x^*$, şi folosind (ii.) ne va rezulta că există un subşir $\left(T^{k_n} x_0\right)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\left(T^{k_n} x_0, x^*\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice$n \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$\begin{aligned}d\left(x^*, Tx^*\right) &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + d\left(T^{k_n+1} x_0, Tx^*\right) \\ &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + a\left[d\left(T^{k_n} x_0, T^{k_n+1} x_0\right) + d\left(x^*, Tx^*\right)\right].\end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Adică

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leqslant \frac{1}{1-a} d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + \frac{a}{1-a} d\left(T^{k_n} x_0, T^{k_n+1} x_0\right)$$

Acum, trecând la limită când $n \to \infty$, vom obţine că

$$d(x^*, Tx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*, \text{ adică, } x^* \in \mathrm{F}_T.$$

Dacă există $y \in X$ astfel încât $Ty = y$, atunci de mai sus, ne rezultă că $T^n y \to x^*$, deci $y = x^*$ şi prin urmare, T este PO. $\square$

Următorul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Kannan să fie PO.

Exemplul 3.1.4 (F. Bojor, [**17**]). *Fie $X := [0,1]$ înzestrat cu metrica euclidiană d_E. Definim graful G prin*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times (0,1] \,|\, x \geqslant y\} \cup \{(0,0),(0,1)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0,1], \text{ şi } T0 = 1$$

Este simplu de verificat că (X, d_E) este un spaţiu metric complet, G este slab $T-$conex şi T este un operator G-Kannan cu constanta $a = \frac{3}{7}$ deoarece pentru orice $x, y \in (0,1]$ cu proprietatea $x \geq y$ avem că:

$$d(Tx,Ty) = \frac{|x-y|}{4} \leqslant \frac{x+y}{4} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3x}{4} + \frac{3y}{4}\right) = \frac{1}{3}\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_n = \frac{1}{n}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem că $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $(x_n, 0) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci condiţia (ii.) nu este îndeplinită şi evident, T nu are puncte fixe.

Exemplul 3.1.3 ne arată că graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-Kannan T, să fie PO. Evident operatorul T este G-Kannan, graful G este slab conex, deoarece pentru orice $m, n \in X$ cu proprietatea $m < n$ avem că şirul $x_0 = m$, $x_1 = m+1, ..., x_{m-n} = n$ este un drum în G de la m la n. Dar graful G nu este slab T-conex deoarece $(2,4) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ şi singurul drum în $\widetilde{G}$ de la 2 la 4 este $y_0 = 2, y_1 = 3, y_2 = 4$ iar $(3, T3) = (3,6) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$.

Din Teorema 3.1.1 putem deduce următorul corolar care se referă la condiţiile suficiente ca un operator Kannan definit pe un spaţiu metric ordonat să fie PO.

Corolarul 3.1.1 (F. Bojor, [**17**]). *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată şi d o metrică pe X astfel încât spaţiul metric (X,d) este complet. Fie $T : X \to X$ un operator crescător astfel încât următoarele trei condiţii sunt adevărate:*

(i.) există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât $d(Tx,Ty) \leqslant a\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$ pentru orice $x, y \in X$ cu $x \leqslant y$;

(ii.) pentru orice $x, y \in X$, elemente incomparabile din $(X, \leqslant)$, există $z \in X$ astfel încât $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ şi $z \leqslant Tz$;

(iii.) dacă un şir crescător (x_n) converge la $x^* \in X$, atunci $x_n \leqslant x^*$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Considerăm graful G cu $V(G) = X$, şi

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X \,|\, x \leqslant y\}.$$

Deoarece T este crescător şi are loc (i.) avem că T este un operator $G-$Kannan. Din (ii.) rezultă că G este slab $T-$conex şi condiţia (iii.) din corolar implică condiţia (ii.) din Teorema 3.1.1. Deci aplicând Teorema 3.1.1 rezultă că T este PO. □

În ceea ce urmează vom arăta că teorema de punct fix pentru operatori Kannan ciclici, demonstrată în [**7**] de Petric şi Zlatanov este o consecinţă a Teoremei 3.1.1. Vom prezenta aici o varianta puţin modificată a Teoremei 1.7.4 din [**7**].

Teorema 3.1.2. *Fie $p \geq 2$ un număr natural şi $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet (X,d). Presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic, care verifică condiţia: există $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $(x,y) \in A_i \times A_{i+1}$, cu $i \in \{1,2,...,p\}$, are loc relaţia*

$$d(Tx,Ty) \leqslant a\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right].$$

În aceste condiţii T este PO.

Proof: Fie $Y = \cup_{i=1}^{p} A_i$ atunci (Y,d) este un spaţiu metric complet.
Considerăm graful G cu $V(G) = Y$, şi

$$E(G) = \left\{(x,y) \in Y \times Y : \exists\, i \in \{1,2,...,p\} \text{ astfel încât } x \in A_i \,\text{şi}\, y \in A_{i+1}\right\} \cup \Delta$$

Deoarece T este un operator ciclic, vom avea că

$$(Tx,Ty) \in E(G)\,, \text{ pentru orice } (x,y) \in E(G)$$

şi fiind un operator Kannan ciclic va rezulta că T este un operator G-Kannan iar graful G este slab $T-$conex.

Pentru a demonstra proprietatea (ii.) din Teorema 3.1.1, alegem $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X care verifică condiţiile $x_n \to x^*$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece mulţimea $\cup_{i=1}^{p} A_i$ este închisă atunci $x^* \in \cup_{i=1}^{p} A_i$ şi deci există $j \in \{1,2,...,n\}$ astfel încât $x^* \in A_j$. Folosind (1.18) şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în fiecare mulţime A_i, pentru orice $i \in \{1,2,...,p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ format din acei termeni care aparţin lui A_{j-1} verifică condiţia (ii.) din Teorema 3.1.1. În concluzie operatorul T este PO.

□

In continuare vom prezenta câteva exemple de operatori G-Kannan care verifică ipoteza Teoremei 3.1.1.

Exemplul 3.1.5 (F. Bojor, [**17**]). *Fie mulţimea* $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *înzestrată cu metrica euclideana* d_E *şi aplicaţia* $T : X \to X$ *definită prin:*

$$Tx = \begin{cases} -\left|\sin x\right|, \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \end{cases}.$$

Considerăm graful G *definit prin*

$$V(G) = X \ \text{ şi } \ E(G) = \{(0, x) : x \in X\}.$$

Graful G *este slab* T *conex şi proprietatea ii. din Teorema 3.1.1 este îndeplinită.*

Pentru orice $x \in X$ *avem că dacă* $(0, x) \in E(G)$ *atunci şi* $(T0, Tx) = (0, Tx) \in E(G)$ *şi folosind elemente de analiză matematică se poate demonstra că* T *este un operator* G*-Kannan cu constanta*

$$a = \frac{3}{2\pi + 1} < \frac{1}{2}.$$

Aplicând Teorema 3.1.1 operatorul T *este PO şi* T *are un unic punct fix* $x^* = 0$.

Operatorul T *nu este un operator Kannan deoarece presupunând că există* $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *astfel încât*

$$d_E(Tx, Ty) \leqslant a\left[d_E(x, Tx) + d_E(y, Ty)\right], \ \forall x, y \in X$$

şi alegând $x = \frac{\pi}{2}, \ y = \frac{\pi}{6}$ *vom obţine că:*

$$a \geqslant \frac{3}{4\pi - 9} > \frac{1}{2}.$$

Exemplul 3.1.6 (F. Bojor, [**17**]). *Fie mulţimea* $X = [0, 5]$ *înzestrată cu metrica euclideana* d_E *şi aplicaţia* $T : X \to X$ *definită prin:*

$$Tx = \begin{cases} x - 4; \ x \in (4, 5] \\ \frac{x}{4}; \quad x \in [0, 4] \end{cases}$$

Considerăm graful G *definit prin*

$$V(G) = X \ \text{ şi } \ E(G) = \{(4, x) : x \in (4, 5]\} \cup [0, 4] \times [0, 4] \cup \Delta.$$

Graful G *este slab* T *conex şi proprietatea ii. din Teorema 3.1.1 este îndeplinită.*

Pentru orice $x \in X$ *avem că dacă* $(4, x) \in E(G)$ *atunci şi* $(T4, Tx) = \left(\frac{1}{4}, \frac{x}{4}\right) \in E(G)$ *şi* T *este un operator* G*-Kannan cu constanta* $a = \frac{1}{3}$*, deoarece:*

Cazul I. *dacă* $x \in (4, 5]$*, deci* $(4, x) \in E(G)$ *avem că*

$$d_E(T4, Tx) = |1 - x + 4| = |5 - x| \leqslant 1 \leqslant \frac{7}{3} \leqslant \frac{1}{3}\left[d_E(4, T4) + d_E(x, Tx)\right]$$

Cazul II. *Dacă* $(x, y) \in [0, 4] \times [0, 4]$*, atunci*

$$d_E(Tx, Ty) = \left|\frac{x - y}{4}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left[|x| + |y|\right] \leqslant \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{4} + \frac{3y}{4}\right] = \frac{1}{3}\left[d_E(x, Tx) + d_E(y, Ty)\right]$$

Aplicând Teorema 3.1.1 operatorul T *este PO şi* T *are un unic punct fix* $x^* = 0$.

Operatorul T nu este o G-Banach contracţie deoarece

$$\left(4, \frac{9}{2}\right) \in E\left(G\right), \; d_E\left(4, \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ şi } d_E\left(T4, T\frac{9}{2}\right) = d_E\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Zamfirescu

În această secţiune vom extinde noţiunea de operator de tip Zamfirescu la operatori care verifică condiţiile respective doar pe muchiile unui graf G şi astfel vom obţine noţiunea de operator G-Zamfirescu.

Definiţia 3.2.1 (F. Bojor, [**19**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-Zamfirescu dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x,y) \in E\left(G\right)$ avem că $(Tx, Ty) \in E\left(G\right)$.
2. *există numerele reale α, β şi γ care verifică condiţiile: $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < \frac{1}{2}$ şi $0 \le \gamma < \frac{1}{2}$, iar pentru fiecare $(x,y) \in E\left(G\right)$, are loc cel puţin una dintre condiţiile următoare:*
   (z_1) $d\left(Tx, Ty\right) \le \alpha d\left(x, y\right)$;
   (z_2) $d\left(Tx, Ty\right) \leqslant \beta\left[d\left(x, Tx\right) + d\left(y, Ty\right)\right]$;
   (z_3) $d\left(Tx, Ty\right) \leqslant \gamma\left[d\left(x, Ty\right) + d\left(y, Tx\right)\right]$.

Observaţia 3.2.1. *Dacă T verifică condiţia (z_1) pentru orice $(x,y) \in E\left(G\right)$ atunci T este o Banach $G-$contracţie şi dacă T verifică condiţia (z_2) pentru orice $(x,y) \in E\left(G\right)$ atunci T este operator $G-$Kannan.*

Observaţia 3.2.2. *Dacă T este un operator G-Zamfirescu, atunci T este atât operator G^{-1}-Zamfirescu cât şi operator $\widetilde{G}$-Zamfirescu.*

Exemplul 3.2.1. *Orice operator Zamfirescu este un operator G_0-Zamfirescu, unde graful G_0 este definit prin $V\left(G_0\right) = X$ şi $E\left(G_0\right) = X \times X$.*

Exemplul 3.2.2. *Fie mulţimea $X = \{0,1,2,3\}$ înzestrată cu metrica euclidiană. Operatorul $T : X \to X$, $Tx = 0$, pentru $x \in \{0,1\}$ şi $Tx = 1$, pentru $x \in \{2,3\}$ este un operator G-Zamfirescu verificând (z_1) din Definiţia 3.2.1 cu constanta $\alpha = \frac{2}{3}$, unde $G = \{(0,1); (0,2); (2,3); (0,0); (1,1)); (2,2); (3,3)\}$, dar nu este un operator Zamfirescu deoarece*

- *$d\left(T1, T2\right) = 1$ şi $d\left(1,2\right) = 1$ deci (z_1) din Definiţia 1.6.10 nu este îndeplinită;*
- *$d\left(T1, T2\right) = 1$ şi $d\left(1, T1\right) + d\left(2, T2\right) = 2$ deci (z_2) din Definiţia 1.6.10 nu este îndeplinită;*
- *$d\left(T1, T2\right) = 1$ şi $d\left(1, T2\right) + d\left(2, T1\right) = 2$ deci (z_3) din Definiţia 1.6.10 nu este îndeplinită.*

Prin urmare, noţiunea de operator G-Zamfirescu este mult mai cuprinzătoare decât cea de de operator Zamfirescu, ceea ce justifică studiul existenţelor punctelor fixe pentru opratori G-Zamfirescu.

Pentru început vom demonstra următoarea lema, care este o extindere a unui rezultat din [**11**], pentru operatori Zamfirescu.

Lema 3.2.1 (F. Bojor, [**19**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ un operator G-Zamfirescu. Atunci*

$$d(Tx,Ty) \leqslant 2\delta d(x,Ty) + \delta d(x,y) \tag{3.103}$$

pentru orice $(x,y) \in E(G)$, unde $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

Proof: Pentru început fie $(x,y) \in E(G)$ fixate. Cel puţin una dintre relaţiile (z_1), (z_2) sau (z_3) este adevărată.

Dacă (x,y) verifică (z_1), atunci relaţia 3.103 este adevărată.

Dacă (x,y) verifică (z_2), atunci avem

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &\leqslant \beta\left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right] \leqslant \\ &\leqslant \beta\left\{\left[d(x,Ty) + d(Ty,Tx)\right] + \left[d(y,x) + d(x,Ty)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Deci

$$(1-\beta)\, d(Tx,Ty) \leqslant 2\beta d(x,Ty) + \beta d(x,y)$$

relaţie care implică

$$d(Tx,Ty) \leqslant \frac{2\beta}{1-\beta} d(x,Ty) + \frac{\beta}{1-\beta} d(x,y)$$

Dacă (x,y) verifică (z_3), atunci analog vom obţine

$$d(Tx,Ty) \leqslant \frac{2\gamma}{1-\gamma} d(x,Ty) + \frac{\gamma}{1-\gamma} d(x,y)$$

Deoarece

$$\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$$

vom avea că $\delta \in [0,1)$ şi deci, următoarea inegalitate

$$d(Tx,Ty) \leqslant 2\delta d(x,Ty) + \delta d(x,y)$$

are loc. În acelaşi mod vom obţine că

$$d(Tx,Ty) \leqslant 2\delta d(x,Ty) + \delta d(x,y)$$

pentru orice $(x,y) \in E(G)$.

□

Observaţia 3.2.3 (F. Bojor, [**19**])**.** *În mod analog cu Lema 3.2.1 se poate obţine că:*

$$d(Tx,Ty) \leqslant 2\delta d(x,Tx) + d(x,y) \tag{3.104}$$

pentru orice $(x,y) \in E(G)$.

Lema 3.2.2 (F. Bojor, [**19**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T: X \to X$ un operator G-Zamfirescu astfel încât graful G este slab $T-$conex.*

Dacă $(x,y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci există $r(x,y) \geqslant 0$ astfel încât

$$d\left(T^n x, T^n y\right) \leqslant n\delta^n r(x,y) \tag{3.105}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $\delta = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\right\}$.

Proof: Fie $z,t \in X$ cu proprietăţile $(z,t) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ şi $(z,Tz) \in E\left(\widetilde{G}\right)$. Utilizând inducţia matematică, se demonstrează simplu că $\left(T^n z, T^n t\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ and $\left(T^n z, T^{n+1} z\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in N$. Din Lema 3.2.1, pentru $x := Tz$ şi $y := z$ vom obţine că

$$d\left(T^2 z, Tz\right) \leqslant 2\delta d(Tz,Tz) + \delta d(Tz,z)$$

relaţie care implică

$$d\left(T^2 z, Tz\right) \leqslant \delta d(Tz,z).$$

Inductiv vom obţine că:

$$d\left(T^n z, T^{n-1} z\right) \leqslant \delta^{n-1} d(Tz,z) \tag{3.106}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $x = T^{n-1}z$ şi $y = T^{n-1}t$, din (3.104), avem că

$$d\left(T^n z, T^n t\right) \leqslant 2\delta d\left(T^{n-1}z, T^n z\right) + \delta d\left(T^{n-1}z, T^{n-1}t\right)$$

deci, folosind (3.103)

$$d\left(T^n z, T^n t\right) \leqslant 2\delta^n d(z,Tz) + \delta d\left(T^{n-1}z, T^{n-1}t\right) \tag{3.107}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Folosind relaţia (3.107) şi un calcul elementar, vom obţine

$$d\left(T^n z, T^n t\right) \leqslant 2n\delta^n d(z,Tz) + \delta^n d(z,t) \tag{3.108}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $z,t \in X$ cu proprietăţile $(z,t) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ şi $(t,Tt) \in E\left(\widetilde{G}\right)$. Atunci folosind simetria distanţei d şi (3.108) avem că

$$d\left(T^n z, T^n t\right) \leqslant 2n\delta^n d(t,Tt) + \delta^n d(z,t) \tag{3.109}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $(x,y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$. Atunci există un drum în $\widetilde{G}$, $(x_i)_{i=0}^N$ de la x la y astfel încât $x_0 = x, x_N = y$ cu $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ...N$ şi $(x_i, Tx_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ..., N-1$.

Folosind inegalitatea triunghiului, (3.108) and (3.109) vom obţine că:

$$\begin{aligned} d\left(T^n x, T^n y\right) &\leqslant \sum_{i=1}^{N} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right) \leqslant \\ &\leqslant 2n\delta^n \left[\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right) + d\left(x_{N-1}, Tx_{N-1}\right)\right] + \delta^n \sum_{i=1}^{N} d\left(x_{i-1}, x_i\right) \\ &\leqslant 2n\delta^n \left[\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right) + d\left(x_{N-1}, Tx_{N-1}\right) + \sum_{i=1}^{N} d\left(x_{i-1}, x_i\right)\right] \end{aligned}$$

este suficient să notăm

$$r\left(x,y\right) := 2\left[\sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right) + d\left(x_{N-1}, Tx_{N-1}\right) + \sum_{i=1}^{N} d\left(x_{i-1}, x_i\right)\right].$$

şi astfel lema este demonstrată. □

Principalul rezultat din această secţiune este următoarea teoremă.

Teorema 3.2.1 (F. Bojor, [**19**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Zamfirescu. Presupunem că:*

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) pentru orice $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $\left(x_n, x_{n+1}\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $\left(x_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\left(x_{k_n}, x\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) = X \times X$ atunci teorema se reduce la Teorema lui Zamfirescu din [**66**].

Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) \neq X \times X$, atunci fie $x \in X$ fixat. Vom analiza două cazuri, singurele posibile:

1. Dacă $(x, Tx) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci din Lema 3.2.2, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $r\left(x, Tx\right) \geqslant 0$ astfel încât

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant n\delta^n r\left(x, Tx\right). \tag{3.110}$$

   Deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant r\left(x, Tx\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} n\delta^n < \infty$.

2. Dacă $(x, Tx) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci din Lema 3.2.1, avem că

$$d\left(Tx, T^2 x\right) = d\left(T^2 x, Tx\right) \leqslant 2\delta d\left(Tx, Tx\right) + \delta d\left(Tx, x\right)$$

   deci

$$d\left(Tx, T^2 x\right) \leqslant \delta d\left(x, Tx\right) \tag{3.111}$$

   Prin inducţie, vom obţine

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \delta^n d\left(x, Tx\right) \tag{3.112}$$

Deci şi în acest caz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant d\left(x, Tx\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty$.

În ambele cazuri, ne va rezulta că $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0}$ este un şir Cauchy. Dar spaţiu (X, d) este un spaţiu metric complet şi deci există un $x^* \in X$ astfel încât $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0} \rightarrow x^*$, când $n \rightarrow \infty$. În consecinţă şirul $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0}$ este convergent pentru orice $x \in X$.

Fie $x, y \in X$, atunci există $x^*, y^* \in X$ astfel încât $\left(T^n x\right)_{n \geqslant 0} \rightarrow x^*$ şi $\left(T^n y\right)_{n \geqslant 0} \rightarrow y^*$.

1. Dacă $(x, y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci din Lema 3.2.2, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $r\left(x, y\right) \geqslant 0$ astfel încât

$$d\left(T^n x, T^n y\right) \leqslant n \delta^n r\left(x, y\right). \tag{3.113}$$

   Trecând la limită când $n \rightarrow \infty$ vom obţine că $d\left(x^*, y^*\right) \leqslant 0$, prin urmare $x^* = y^*$.
2. Dacă $(x, y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ avem că $\left(T^n x, T^n y\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, Atunci din Observaţia 3.2.3 avem că

$$d\left(T^n x, T^n y\right) \leqslant 2\delta d\left(T^{n-1} x, T^n x\right) + \delta d\left(T^{n-1} x, T^{n-1} y\right)$$

   pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită când $n \rightarrow \infty$ ne va rezulta că $d\left(x^*, y^*\right) \leqslant \delta d\left(x^*, y^*\right)$ şi deoarece $\delta \in [0, 1)$ vom obţine $x^* = y^*$.

Prin urmare, pentru orice $x \in X$ există un unic $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x^*.$$

În continuare vom demonstra că $x^* \in F_T$. Deoarece graful G este $T-$conex şi $E(G) \neq X \times X$, atunci există $x_0 \in X$ astfel încât $\left(x_0, Tx_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ deci $\left(T^n x_0, T^{n+1} x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dar $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x^*$, şi folosind (ii.) ne va rezulta că există un subşir $\left(T^{k_n} x_0\right)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\left(T^{k_n} x_0, x^*\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom avea că

$$\begin{aligned} d\left(x^*, Tx^*\right) &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + d\left(T^{k_n+1} x_0, Tx^*\right) \\ &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + 2\delta d\left(T^{k_n} x_0, T^{k_n+1} x_0\right) + \delta d\left(x^*, Tx^*\right). \end{aligned}$$

Deci

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leqslant \frac{1}{1-\delta} d\left(x^*, T^{k_n+1} x\right) + \frac{\delta}{1-\delta} d\left(T^{k_n} x_0, T^{k_n+1} x_0\right)$$

Acum, trecând la limită când $n \rightarrow \infty$, vom avea că

$$d(x^*, Tx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*, \text{ deci, } x^* \in F_T.$$

Dacă avem $Ty = y$ pentru un $y \in X$, atunci din demonstraţia de mai sus, vom avea că $T^n y \rightarrow x^*$, deci $y = x^*$ şi prin urmare, T este PO. □

Următorul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Zamfirescu să fie PO.

Exemplul 3.2.3 (F. Bojor, [**19**]). *Fie mulţimea $X := [0,3]$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim graful G prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = E(G) = (0,1] \times (0,1] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (1,3] \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}.$$

Definim aplicaţia $T : X \to X$ prin

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, x\,(0,1] \\ \frac{1}{2},\ x \in (0,1] \cup \{0\} \\ 1,\ x \in [2,3] \end{cases}.$$

E uşor de verificat că (X,d) este un spaţiu metric complet, G este slab $T-$conex. Aplicaţia T este un operator G-Zamfirescu care verifică (z_1) cu $\alpha = \frac{1}{2}$ pentru orice $(x,y) \in (0,1] \times (0,1]$, verifică (z_2) cu $\beta = \frac{1}{3}$ pentru orice $(x,y) \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \times (1,2] \cup \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right\}$ şi verifică (z_3) cu $\gamma = \frac{1}{3}$ pentru orice $(x,y) \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \times [2,3]$. Este clar că, $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte fixe.

Observaţia 3.2.4. *Se poate demonstra că operatorul T de la exemplul anterior nu este o Banach G-contracţie, nici un operator G-Kannan.*

Următorul exemplu ne arată ca graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-Zamfirescu T să fie PO.

Exemplul 3.2.4 (F. Bojor, [**19**]). *Fie $X := [0,3]$ înzestrat cu metrica euclidiană d_E Definim aplicaţia*

$$Tx = \begin{cases} x+2;\ x \in [0,1] \\ \frac{x}{3};\quad x \in (1,3] \end{cases}.$$

Definim graful G prin $V(G) = X$ şi

$$E(G) = [0,1] \times [0,1] \cup (1,3] \times (1,3] \cup \left\{\left(\frac{3^n - 1}{3^n}, 3\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\left(\frac{3^n - 1}{3^{n-1}}, 1\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Atunci (X, d_E) este un spaţiu metric complet, G este slab conex dar nu este slab $T-$conex deoarece $(1,3) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ şi orice drum în $\widetilde{G}$ de la 1 la 3 trece prin 0 dar $(0, T0) = (0,2) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ sau trece prin $x_0 = \frac{3^n-1}{3^{n-1}}$ cu $n \in N^*$ dar $(x_0, Tx_0) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$.

T este un operator G-Zamfirescu care verifică condiţia (z_2) cu $\beta = \frac{1}{3}$ pentru $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ respectiv condiţia (z_1) cu $\alpha = \frac{1}{3}$ pentru $(x,y) \in E(G) \setminus [0,1] \times [0,1]$. Este evident, $T^n x$ nu converge pentru orice $x \in X$ şi T nu are puncte fixe.

Corolarul 3.2.1 (F. Bojor, [**19**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ o G-contracţie. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Proof: Dacă T este o $G-$contracţie atunci T este un operator G-Zamfirescu deoarece verifică condiţia (z_1). Aplicând Teorema 3.2.1 ne rezultă că T este PO. □

Observaţia 3.2.5. *Se observă că rezultatul anterior este mai slab ca cel obţinut de Jachymski în* [**30**]*, deoarece graful G nu trebuie să fie slab $T-$conex pentru ca T să fie PO.*

Corolarul 3.2.2 (F. Bojor, [**19**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator $G-$Kannan. Presupunem că:*

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Dacă T este o un operator $G-$Kannan atunci T este un operator G-Zamfirescu deoarece verifică condiţia (z_2). Aplicând Teorema 3.2.1 ne rezultă că T este PO. □

Corolarul 3.2.3 (F. Bojor, [**19**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet înzestrat cu graful G şi $T : X \to X$ un operator care verifică condiţia (z_3) din Definiţia 3.2.1. (Operatorul T îl vom numi operator G-Chatterjea). Presupunem că:*

(i.) G este slab $T-$conex;

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Din Teorema 3.2.1, vom obţine un corolar referitor la operatori Zamfirescu în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.2.4 (F. Bojor, [**19**])**.** *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată şi d o metrică pe X astfel încât spaţiul metric (X, d) este complet. Fie $T : X \to X$ un operator crescător, care verifică următoarele trei condiţi:*

(i.) există numerele reale α, β şi γ care verifică condiţile $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < \frac{1}{2}$ şi $0 \le \gamma < \frac{1}{2}$, astfel încât, pentru orice $x, y \in X$ cu $x \leqslant y$, cel puţin una dintre relaţiile următoare este adevărată:

(z_1) $d(Tx, Ty) \le \alpha d(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant \beta [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant \gamma [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

(ii.) *pentru orice $x, y \in X$, elemente incomparabile ale $(X, \leqslant)$, există $z \in X$ astfel încât $x \leqslant z$, $y \leqslant z$ şi $z \leqslant Tz$;*

(iii.) *dacă un şir crescăror (x_n) converge la x din X, atunci $x_n \leqslant x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Proof: Fie graful G cu $V(G) = X$, şi

$$E(G) = \{(x, y) \in X \times X \mid x \leqslant y\}.$$

Deoarece T este un operator crescător şi are loc (i.) atunci T este un operator $G-$Zamfirescu. Din (ii.) graful G este slab $T-$conex şi condiţia (iii.) impliucă condiţia (ii.) din Teorema 3.2.1. Concluzia va rezulta din Teorema 3.2.1. □

În cele ce urmează vom arăta că teorema de punct fix pentru operatori ciclici Zamfirescu demonstrată în [**7**] de Petric şi Zlatanov este o consecinţă a Teoremei 3.2.1.

Teorema 3.2.2 ([**7**], T 3.1)**.** *Fie $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric (X, d) şi presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic, pentru care există numerele reale $a \in [0, 1)$, $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ şi $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ astfel încât pentru orice pereche $(x, y) \in A_i \times A_{i+1}$, pentru $i \in \{1, 2, ..., p\}$, cel puţin una din relaţiile următoare este adevărată:*

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$;

(z_2) $d(Tx, Ty) \leqslant b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$;

(z_3) $d(Tx, Ty) \leqslant c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Atunci T este PO.

Proof: Fie $Y = \cup_{i=1}^{p} A_i$ atunci (Y, d) este un spaţiu metric complet.

Fie graful G cu $V(G) = Y$, şi

$$E(G) = \{(x, y) \in Y \times Y \mid \exists\, i \in \{1, 2, ..., n\} \text{ astfel încât } x \in A_i \text{ şi } y \in A_{i+1}\}$$

Deoarece T este un operator ciclic, avem că

$$(Tx, Ty) \in E(G), \text{ pentru orice } (x, y) \in E(G)$$

şi folosind ipoteza T este un operator G-Zamfirescu iar graful G este slab $T-$conex. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de elemente ale lui X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x \in Y$ atunci există $j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $x \in A_j$. Deoarece T este un operator ciclic atunci şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în orice mulţime A_i, cu $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ format din acei termeni care aparţin mulţimii A_{j-1} verifică condicţia (ii.) din Teorema 3.2.1. În concluzie operatorul T este PO.

□

3. Teoreme de punct fix pentru operatori G-Ćirić-Reich-Rus

În această secţiune vom extinde noţiunea de operator Ćirić-Reich-Rus introdusă de Rus [**59**] şi Reich [**56**] pentru spaţii metrice înzestrate cu un graf şi vom da condiţii suficiente ca un astfel de operator să fie PO.

Definiţia 3.3.1 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte operator G-Ćirić-Reich-Rus dacă:*

1. $\forall x, y \in X$ cu proprietatea $(x,y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.
2. *există numerele pozitive a, b, c cu $a+b+c<1$, astfel încât, pentru orice $(x,y) \in E(G)$, are loc relaţia:*

$$d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty).$$

Exemplul 3.3.1. *Orice operator Ćirić-Reich-Rus este un operator G_0-Ćirić-Reich-Rus, unde graful G_0 este definit prin $V(G_0) = X$ şi $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.3.2 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie mulţimea $X = \{0,1,2,3\}$ înzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim $T : X \to X$, prin $Tx = 0$, $for\ x \in \{0,1\}$ and $Tx = 1$, $for\ x \in \{2,3\}$. Atunci T este un operator G-Ćirić-Reich-Rus cu constantele $a = \frac{1}{3}, b = 0$ şi $c = \frac{1}{3}$, unde $G = \{(0,1);(0,2);(2,3);(0,0);(1,1));(2,2);(3,3)\}$, dar nu este un operator Ćirić-Reich-Rus deoarece $d(T1,T2) = 1$, $d(1,2) = 1$, $d(1,T1) = 1$ şi $d(2,T2) = 1$.*

Observaţia 3.3.1 (F. Bojor, [**15**])**.** *Dacă $T : X \to X$ este un operator G-Ćirić-Reich-Rus, $a \neq b$ şi muchiile grafului G nu sunt simetrice atunci condiţia 2. din Definiţia 3.3.1* ***nu*** *este echivalentă cu următoarea:*

2'. *există numerele pozitive a, b cu proprietatea $a + 2b < 1$ astfel încât, pentru orice $(x,y) \in E(G)$, are loc relaţia:*

$$d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y) + b[d(x,Tx) + d(y,Ty)].$$

ci doar $2' \Rightarrow 2$.

Pentru început prezentăm următoarea lema.

Lema 3.3.1 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Ćirić-Reich-Rus. Dacă $x \in X$ verifică condiţia $(x,Tx) \in E(G)$ atunci*

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant \alpha^n d(x,Tx) \tag{3.114}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $\alpha = \frac{a+b}{1-c}$.

Proof: Fie $(x,y) \in E(G)$. Este simplu de demonstrat prin inducţie că $(T^n x, T^n y) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + bd\left(T^{n-1}x + T^n x\right) + cd\left(T^n x, T^{n+1}x\right)$$

care implică

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \alpha d\left(T^{n-1} x, T^n x\right)$$

unde $\alpha = \frac{a+b}{1-c}$, deci

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \alpha^n d(x, Tx)$$

□

Lema 3.3.2 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Ćirić-Reich-Rus astfel încât graful G este $T-$conex. Pentru orice $x \in X$ şirul $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy.*

Proof: Fie $x \in X$ fixat.

Cazul 1. Dacă $(x, Tx) \in E(G)$ atunci din Lema 3.3.1 avem

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \alpha^n d(x, Tx)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $\alpha = \frac{a+b}{1-c}$. Deoarece $\alpha < 1$ vom obţine că

$$\sum_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) = \frac{1}{1-\alpha} d(x, Tx) < \infty$$

şi un calcul simplu ne arată că şirul $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental.

Cazul 2. Dacă $(x, Tx) \notin E(G)$, atunci există un drum în G, $(x_i)_{i=0}^N$ de la x la Tx astfel încât $x_0 = x, x_N = Tx$ cu $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ pentru orice $i = 1, ...N$ şi $(x_i, Tx_i) \in E(G)$ pentru orice $i = 1, ..., N-1$.

Aplicând inegalitatea triunghiului şi (3.114) vom obţine

$$\begin{aligned}
d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) &\leqslant \sum_{i=1}^{N} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right) \leqslant \\
&\leqslant a \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_{i-1}, T^{n-1} x_i\right) + b \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_{i-1}, T^n x_{i-1}\right) + c \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_i, T^n x_i\right) \\
&\leqslant a \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_{i-1}, T^{n-1} x_i\right) + bd\left(T^{n-1} x, T^n x\right) + b\alpha^{n-1} \sum_{i=2}^{N} d\left(x_{i-1}, Tx_{i-1}\right) + \\
&\quad + cd\left(T^n x, T^{n+1} x\right) + c\alpha^{n-1} \sum_{i=1}^{N-1} d\left(x_i, Tx_i\right).
\end{aligned}$$

Dacă notăm

$$x_n := \sum_{i=1}^{N} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right),\ n \in \mathbb{N}$$

şi

$$r(x) := (b+c) \sum_{i=2}^{N} d\left(x_{i-1}, Tx_{i-1}\right),$$

atunci vom avea

$$x_n \leqslant (a+b) x_{n-1} + (b+c) \alpha^{n-1} r(x) + cx_n$$

deci

$$x_n \leqslant \alpha x_{n-1} + \frac{b+c}{1-c}\alpha^{n-1} r(x). \tag{3.115}$$

Folosind 3.115 şi un calcul elementar vom avea că

$$x_n \leqslant n\frac{b+c}{1-c}\alpha^{n-1} r(x)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $\alpha \in [0,1)$ vom avea că

$$\sum_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x_n \leqslant \frac{b+c}{1-c} r(x) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{b+c}{(1-c)(1-\alpha)^2} r(x) < \infty$$

şi deci $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ este un şir Cauchy. □

Teorema de punct fix corespunzătoare operatorilor G-Čirič-Reich-Rus este următoarea:

Teorema 3.3.1 (F. Bojor, [**15**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi*
$T: X \to X$ un operator G-Čirič-Reich-Rus. Presupunem că:

(i.) G este $T-$conex;

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem că există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Dacă $E(G) = X \times X$ atunci teorema se reduce la rezultatul obţinut de Rus [**59**] şi Reich [**56**].

În continuare vom considera că $E(G) \neq X \times X$. Din Lema 3.3.2, $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ este un şir Cauchy pentru orice $x \in X$ şi folosind ipoteza $(T^n x)_{n\geqslant 0}$ este convergent.

Fie $x, y \in X$ atunci există $x^*, y^* \in X$ astfel încât $(T^n x)_{n\geqslant 0} \to x^*$ şi $(T^n y)_{n\geqslant 0} \to y^*$, când $n \to \infty$.

1. Dacă $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ vom avea că $(T^n x, T^n y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^{n-1}y\right) + bd\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + cd\left(T^{n-1}y, T^n y\right)$$

   pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită când $n \to \infty$ vom obţine că $d(x^*, y^*) \leqslant ad(x^*, y^*)$ şi deoarece $a \in [0,1)$ ne va rezulta că $x^* = y^*$.
2. Dacă $(x,y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$, atunci există un drum $\widetilde{G}$, $(x_i)_{i=0}^N$ de la x la y astfel încât $x_0 = x, x_N = y$ cu $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1,...N$ şi $(x_i, Tx_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1,...,N-1$. Atunci $(T^n x_{i-1}, T^n x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru

orice $n \in \mathbb{N}$ şi $i = 1, ..., N$ iar din inegalitatea triunghiului vom avea că:

$$
\begin{aligned}
d\left(T^n x, T^n y\right) &\leqslant \sum_{i=1}^{N} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right) \leqslant a \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_{i-1}, T^{n-1} x_i\right) + \\
&\quad b \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_{i-1}, T^n x_{i-1}\right) + c \sum_{i=1}^{N} d\left(T^{n-1} x_i, T^n x_i\right)
\end{aligned} \tag{3.116}
$$

Din Lema 3.3.2 ne rezultă că şirul $\left(T^n x_i\right)_{n \geqslant 0}$ este fundamental şi deoarece spaţiul (X, d) este complet vom avea că şirul $\left(T^n x_i\right)_{n \geqslant 0}$ este convergent pentru orice $i = 1...N$. Folosind continuitatea distanţei vom obţine că, şirul $\left(d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent pentru orice $i = 1...N$.

Vom nota $\lim\limits_{n \to \infty} d\left(T^n x_{i-1}, T^n x_i\right) := \ell_i \geq 0$ pentru orice $i = 1, ..., N$ şi trecând la limită când $n \to \infty$ vom obţine că $\ell_i = 0$ pentru orice $i = 1, ..., N$ adică $d\left(x^*, y^*\right) \leqslant 0$, deci $x^* = y^*$.

În consecinţă, pentru orice $x \in X$ există un unic element $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = x^*.$$

În continuare vom demonstra că $x^* \in F_T$. Deoarece G este $T-$conex, există cel puţin $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, Tx_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ deci $\left(T^n x_0, T^{n+1} x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dar $\lim\limits_{n \to \infty} T^n x_0 = x^*$, atunci din (ii.) există un subşir $\left(T^{k_n} x_0\right)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\left(T^{k_n} x_0, x^*\right) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom avea că

$$
\begin{aligned}
d\left(x^*, Tx^*\right) &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x_0\right) + d\left(T^{k_n+1} x_0, Tx^*\right) \\
&\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+1} x_0\right) + ad\left(T^{k_n} x_0, x^*\right) + bd\left(T^{k_n+1} x_0, T^{k_n} x_0\right) + cd\left(x^*, Tx^*\right)
\end{aligned}
$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ vom obţine că

$$d\left(x^*, Tx^*\right) \leqslant cd\left(x^*, Tx^*\right) \Rightarrow x^* = Tx^*, \text{ adică, } x^* \in F_T$$

Dacă vom avea $Ty = y$ pentru un $y \in X$, atunci din demonstraţia anterioară ne va rezulta că $T^n y \to x^*$, deci $y = x^*$ şi prin urmare, T este PO. □

Următoarul exemplu ne arată că condiţia (ii.) este necesară pentru ca un operator G-Čiriĉ-Reich-Rus să fie PO.

Exemplul 3.3.3 (F. Bojor, [**15**]). *Fie mulţimea $X := [0, 1]$ inzestrată cu metrica euclidiană d_E. Definim graful G prin*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \,|\, x \geqslant y\} \cup \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0, 1], \text{ şi } T0 = 1$$

Este uşor de verificat că (X, d) este un spaţiu metric complet, G este $T-$conex şi T este un operator G-Čiriĉ-Reich-Rus cu constantele $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{16}$, $c = \frac{1}{8}$. Este evident că, $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte fixe.

Următorul exemplu ne arată că graful G trebuie să fie $T-$conex pentru ca un operator G-Ćirič-Reich-Rus T să fie PO.

Exemplul 3.3.4 (F. Bojor, [**15**]). *Fie mulţimea $X=[0,\infty)$ inzestrată cu metrica euclidiană d_E şi*

$$T:X\to X,\quad Tx=x+5$$

Definim graful G prin

$$V(G)=X \text{ şi } E(G)=\{(x,x+\alpha),(x+\alpha,x):x\in X,\alpha\in[0,1]\}$$

Atunci (X,d) este un spaţiu metric complet, G este conex deoarece pentru orice $x,y\in X$ şirul $x_0=x,x_1=x+\alpha,x_2=x+2\alpha,...,x_n=x+n\alpha=y$, unde $n=[x-y]+1$ şi $\alpha=\frac{x-y}{n}$ este un drum în G de la x la y. Graful G nu este $T-$conex deoarece $(x,Tx)\notin E(G)$ pentru orice $x\in X$.

Pentru orice $(x,y)\in E(G)$ ne rezultă că $(Tx,Ty)=(x+5,y+5)\in E(G)$ şi T verifică relaţia 2. *din Definiţia 3.3.1 cu constantele $a=\frac{1}{6},b=c=\frac{1}{3}$ deoarece pentru orice $x\in X,\alpha\in[0,1]$ avem că*

$$d_E(Tx,T(x+\alpha))=|x+5-x-\alpha-5|=\alpha\leqslant 1$$

iar

$$ad_E(x,x+\alpha)+bd_E(x,Tx)+cd_E(x+\alpha,T(x+\alpha))=\frac{1}{6}\alpha+\frac{10}{6}>1.$$

Evident, şirul $(T^nx)_{n\in mathbbN}$ nu este convergent pentru orice $x\in X$ şi T nu are puncte fixe.

Corolarul 3.3.1 (F. Bojor, [**15**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T:X\to X$ un operator. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) *există numerele pozitive a şi b cu proprietatea $a+2b<1$ astfel încât, pentru orice $(x,y)\in E(G)$, vom avea că $(Tx,Ty)\in E(G)$ şi*

$$d(Tx,Ty)\le ad(x,y)+b[d(x,Tx)+d(y,Ty)];$$

(iii.) *pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şir de elemente din X, dacă $x_n\to x$ şi $(x_n,x_{n+1})\in E(G)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n},x)\in E(G)$ pentru $n\in\mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Proof: Este evident că T este un operator $\widetilde{G}$-Ćirič-Reich-Rus cu $b=c$ deci concluzia rezultă din Teorema 3.3.1. □

Corolarul 3.3.2 (F. Bojor, [**15**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G şi $T:X\to X$ o Banach G-contracţie. Presupunem că:*

(i.) *G este slab $T-$conex;*

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şir de elemente din* X*, dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *este PO.*

Proof: Dacă T este o Banach $G-$contracţie cu constanta $\alpha \in [0,1)$ atunci T este un operator G-Ċirič-Reich-Rus cu constantele $a = \alpha, b = c = 0$ atunci din Corolarul 3.3.1, T este PO. □

Corolarul 3.3.3 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$ *un operator* $G-$*Kannan. Presupunem că:*

(i.) G *este slab* $T-$*conex;*

(ii.) pentru orice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şir de elemente din* X*, dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *este PO.*

Proof: Dacă T este un operator $G-$Kannan cu constanta $\alpha \in [0,1)$ atunci T este un operator G-Ċirič-Reich-Rus cu constantele $a = 0, b = c = \alpha$ atunci din Corolarul 3.3.1, T este PO.

□

Din Teorema 3.3.1, vom obţine următorul corolar referitor la operatorul de tip Ċirič-Reich-Rus în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.3.4 (F. Bojor, [**15**])**.** *Fie* $(X, \leqslant)$ *o mulţime parţial ordonată şi* d *o metrică pe* X *astfel încât spaţiul metric* (X,d) *este complet. Fie* $T : X \to X$ *un operator crescător care verifică relaţiile:*

(i.) există numerele reale pozitive $a, b > 0$ *cu* $a + 2b < 1$*, astfel încât, pentru orice* $x, y \in X$ *cu* $x \leqslant y$ *avem că*

$$d(Tx, Ty) \leqslant ad(x,y) + b[d(x,Tx) + d(y,Ty)].$$

(ii.) pentru orice $x, y \in X$*, elemente incomparabile din* $(X, \leqslant)$*, există* $z \in X$ *astfel încât* $x \leqslant z$*,* $y \leqslant z$ *şi* $z \leqslant Tz$*;*

(iii.) dacă un şir crescător (x_n) *converge la* x *în* X*, atunci* $x_n \leqslant x$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

În aceste condiţii T *este PO.*

Proof: Fie graful G cu $V(G) = X$, şi

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X \,|\, x \leqslant y\}.$$

Deoarece T este crescător şi are loc (i.) ne rezultă că T este un operator Ćirić-Reich-Rus. Din (ii.) graful G este slab $T-$conex şi condiţia (iii.) implică condiţia (ii.) din Corolarul 3.3.1 şi aplicând acest corolar ne rezultă concluzia. □

În ceea ce urmează vom demonstra că teorema de punct fix pentru operatorii Ćirić-Reich-Rus ciclici demonstrată de [**6**] by Petric este o consecinţă a Teoremei 3.3.1 .

Teorema 3.3.2 (M. Petric, [**6**]). *Fie $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet (X,d). Presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic,şi există numerele pozitive a,b,c cu proprietatea $a+b+c<1$ astfel încât pentru orice $(x,y) \in A_i \times A_{i+1}$, cu $i \in \{1,2,...,p\}$, avem că*

$$d(Tx,Ty) \leqslant ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty).$$

Atunci T este PO.

Proof: Fie $Y = \cup_{i=1}^{p} A_i$ atunci (Y,d) este un spaţiu metric complet.

Fie graful G cu $V(G) = Y$, şi

$$E(G) = \{(x,y) \in Y \times Y \mid \exists\, i \in \{1,2,...,p\} \text{ astfel încât } x \in A_i \text{ şi } y \in A_{i+1}\}$$

Deoarece T este un operator ciclic vom obţine că

$$(Tx,Ty) \in E(G), \text{ pentru orice } (x,y) \in E(G)$$

şi folosind ipoteza ne va rezulta că T este un operator G-Ćirić-Reich-Rus iar graful G este $T-$conex.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de elemente din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $j \in \{1,2,...,n\}$ astfel încât $x \in A_j$. Dar şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în fiecare mulţime A_i, pentru orice $i \in \{1,2,...,p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ formaţi din termenii care se găsesc în A_{j-1} verifică condiţia (ii.) din Teorema 3.3.1. În concluzie T este PO. Pentru $b=c$ vom obţine Teorema 3.1 din [**6**]. □

4. Teoreme de punct fix pentru (G,φ) −contracţii

Folosind aceiaşi tehnică ca în secţiunile precedente vom introduce noţiunea de (G,φ)-contracţie şi vom da condiţii suficiente pentru ca o astfel de contraţie să fie PO, condi

c tii care vor generaliza teoremele existente referitoare la φ-contracţii.

Definiţia 3.4.1 (F. Bojor, [**14**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G. Aplicaţia $T : X \to X$ se numeşte (G,φ) − contraction dacă:*

1. $\forall\, x,y \in X\, ((x,y) \in E(G) \Rightarrow (Tx,Ty) \in E(G))$.

2. *există o funcţie de comparaţie* $\varphi : R_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x, y))$$

pentru orice $(x, y) \in E(G)$.

Observaţia 3.4.1. *Dacă* T *este o* $(G, \varphi)-$*contracţie, atunci* T *este atâ t* $(G^{-1}, \varphi)-$*contracţie cât şi* $\left(\widetilde{G}, \varphi\right)-$*contracţie. Aceasta fiind o consecinţă a simetriei distanţei şi a relaţiei* 1.

Exemplul 3.4.1. *Orice* $\varphi-$*contracţie este o* $(G_0, \varphi)-$*contracţie, unde graful* G_0 *este definit prin* $E(G_0) = X \times X$.

Exemplul 3.4.2. *Orice* $G-$*contracţie este o* $(G, \varphi)-$*contracţie, unde funcţia de comparaţie este* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) = at$.

Primul rezultat referitor la această noţiune este următorul:

Teorema 3.4.1 (F. Bojor, [**14**])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G *şi* $T : X \to X$. *Presupunem că:*

(i.) G *este slab conex;*

(ii.) există $x_0 \in X$ *astfel încât* $(x_0, Tx_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$, *iar şirul* $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ *are proprietatea: există* k, $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\left(T^{kn}x_0, T^{km}x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$ $m, n \geqslant n_0$;

$(iii.)_a$ T *este orbital continuu*

sau

$(iii.)_b$ T *este orbital G-continuu şi există un subşir* $(T^{n_k}x_0)_{k\in\mathbb{N}}$ *al şirului* $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât* $(T^{n_k}x_0, x^*) \in E(G)$ *pentru orice* $k \in N$;

(iv.) există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât* T *este o* $(G, \varphi)-$*contracţie;*

(v.) metrica d *este completă.*

În aceste condiţii T *este PO.*

Proof: Fie $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, Tx_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$. Atunci, din Observaţia 3.4.1 şi o simplă inducţie vom obţine că

$$\left(T^n x_0, T^{n+1}x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right) \text{ şi } d\left(T^n x_0, T^{n+1}x_0\right) \leqslant \varphi^n(d(x_0, Tx_0)) \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) = 0$ şi din condiţia (ii.) există $k, n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left(T^{kn}x_0, T^{km}x_0\right) \in E\left(\widetilde{G}\right) \text{ pentru orice } m, n \in \mathbb{N}\ m, n \geqslant n_0.$$

Deoarece $d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right) \to 0$, pentru un $\varepsilon > 0$ oarecare, vom putea alege un $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n_0$ astfel încât

$$d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right) < \varepsilon - \varphi(\varepsilon) \text{ pentru orice } n \geqslant N.$$

Deoarece $\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right) \in E(G)$ vom avea că pentru orice $n \geqslant N$

$$d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+2)}x_0\right) \leqslant d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right) + d\left(T^{k(n+1)}x_0, T^{k(n+2)}x_0\right)$$
$$< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi^k\left(d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right)\right) < \varepsilon.$$

Deoarece $\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+2)}x_0\right) \in E(G)$ vom avea că pentru orice $n \geqslant N$:

$$d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+3)}x_0\right) \leqslant d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+1)}x_0\right) + d\left(T^{k(n+1)}x_0, T^{k(n+3)}x_0\right)$$
$$< \varepsilon - \varphi(\varepsilon) + \varphi^k\left(d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+2)}x_0\right)\right) < \varepsilon.$$

Prin inducţie vom obţine că:

$$d\left(T^{kn}x_0, T^{k(n+m)}x_0\right) < \varepsilon, \text{ pentru orice } m \in \mathbb{N} \text{ şi } \ n \geqslant N.$$

Deci $\left(T^{kn}x_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy în (X,d). Din condiţia (v.) ne rezultă că $T^{kn}x_0 \to x^*$, atunci când $n \to \infty$. Deoarece $d(T^n x_0, T^{n+1}x_0) \to 0$, vom avea că $T^n x_0 \to x^*$, atunci când $n \to \infty$.

Fie $x \in X$ arbitrar ales.

(1) Dacă $(x, x_0) \in E(G)$, atunci $(T^n x, T^n x_0) \in E(G)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi deci $d(T^n x, T^n x_0) \leqslant \varphi(d(x, x_0))$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Trecând la limită când $n \to \infty$ vom obţine că $T^n x \to x^*$.

(2) Dacă $(x, x_0) \notin E(G)$, atunci, din condiţia (i.), există un drum $(x_i)_{i=0}^M$ în $\widetilde{G}$ de la x_0 la x, adică, $x_M = x$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ..., M$. O simplă inducţie ne arată că $(T^n x_{i-1}, T^n x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ..., M$ şi
$$d(T^n x_0, T^n x) \leqslant \sum_{i=1}^{M} \varphi^n\left(d(x_{i-1}, x_i)\right)$$
deci $d(T^n x, T^n y) \to 0$ şi vom obţine că $T^n x \to x^*$.

În consecinţă pentru orice $x \in X$ există un unic $x^* \in X$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$$

Acum vom demonstra că $x^* \in F_T$. Dacă are loc condiţia $(iii.)_a$, atunci este evident că $x^* \in F_T$, iar dacă are loc condiţia $(iii.)_b$ atunci, deoarece $(T^{n_k}x_0)_{k\in\mathbb{N}} \to x^*$ şi $(T^{n_k}x_0, x^*) \in E(G)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ vom obţine din G-continuitatea orbitală a luik T, că $T^{n_k+1}x_0 \to Tx^*$ atunci când $k \to \infty$. Deci $x^* = Tx^*$. Dacă avem $Ty = y$ pentru un $y \in X$, atunci din demonstraţia de mai sus, vom avea că $T^n y \to x^*$, adică $y = x^*$. În consecinţă T este PO. □

Observaţia 3.4.2 (F. Bojor, [**14**]). *Teorema 3.4.1 este o generalizare a Teoremei 3.3 din* [**46**] *(Vezi T. 1.8.4).*

Proof: Definim graful G prin

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x, y) \,|\, x \leqslant y\}$$

Din condiţia (i) a Teoremei 1.8.4 ne rezultă că graful G este slab conex. Condiţiile (ii) *si* (vi) sunt echivalente cu faptul că f este o (G, φ) $-$contracţie. Condiţiile (iii) *si* (iv) implică condiţia (ii) din Teorema 3.4.1. În consecinţă aplicând Teorema 3.4.1 ne va rezulta concluzia Teoremei 1.8.4. □

Dacă îmbunătăţim proprietăţile operatorului T vom putea să renunţăm la unele proprietăţi ale grafului G. În continuare vom considera că φ este funcţie de (c) $-$comparaţie.

În cele ce urmează vom demonstra că covergenţa şirului aproximaţiilor succesive ale unei (G, φ) $-$contracţie este strâns legată de conectivitatea grafului G.

Teorema 3.4.2 (F. Bojor, [**14**]). *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *G este slab conex;*

(ii) *pentru orice (G, φ) $-$contracţie $T : X \to X$ si $x, y \in X$ date, şirurile $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt echivalente Cauchy;*

(iii) *pentru orice (G, φ) $-$contracţie $T : X \to X$,* $\operatorname{card}(F_T) \leqslant 1$.

Proof: $(i) \Rightarrow (ii)$: Fie T o (G, φ) $-$contracţie şi $x, y \in X$. Dn poteză, $[x]_{\widetilde{G}} = X$, deci $y \in [x]_{\widetilde{G}}$. Atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^N$ în $\widetilde{G}$ de la x la y, adică, $x_0 = x, x_N = y$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ..., N$. Se deomonstrează uşor prin inducţie că $(T^n x_{i-1}, T^n x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1, ..., N$ şi

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \varphi^n \left(d(x_{i-1}, x_i)\right)$$

deci $d(T^n x, T^n y) \to 0$.

Analog, există un drum $(z_i)_{i=0}^M$ în $\widetilde{G}$ de la x la Tx, adică, $z_0 = x, z_M = Tx$ şi $(z_{i-1}, z_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., M$. Atunci vom avea că:

$$d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \leqslant \sum_{i=1}^{M} \varphi^n \left(d(z_{i-1}, z_i)\right)$$

Deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} d\left(T^n x, T^{n+1} x\right) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \left(d(z_{i-1}, z_i)\right) < \infty$$

şi un calcul simplu ne arată că $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy la fel va fi şi $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Fie T o (G, φ) $-$contracţie şi $x, y \in F_T$. Din (ii), $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy echivalente ceea ce implică $x = y$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Presupunem contrariul că G nu este slab conex, adică există $x_0 \in X$ astfel încât ambele mulţimi $[x_0]_{\widetilde{G}}$ şi $X \setminus [x_0]_{\widetilde{G}}$ sunt nevide. Fie $y_0 \in X \setminus [x_0]_{\widetilde{G}}$ şi definim

$$Tx = x_0 \text{ dacă } x \in [x_0]_{\widetilde{G}} \quad \text{şi} \quad Tx = y_0 \text{ if } x \in X \setminus [x_0]_{\widetilde{G}}$$

Este evident că, $F_T = \{x_0, y_0\}$. Vom arăta că T este o (G, φ) $-$contracţie. Fie $(x, y) \in E(G)$, atunci $[x]_{\widetilde{G}} = [y]_{\widetilde{G}}$, deci ori $x, y \in [x]_{\widetilde{G}}$, ori $x, y \in X \setminus [x]_{\widetilde{G}}$. Şi în ambele cazuri $Tx = Ty$, deci $(Tx, Ty) \in E(G)$ deoarece $E(G) \supseteq \Delta$, şi $d(Tx,Ty) = 0 \leqslant \varphi(d(x,y))$. Prin urmare T este o $(G,\varphi)-$contracţie care are două puncte fixe, ceea ce este în contradicţie cu (iii). □

O consecinţă imediată a Teoremei 3.4.2, este:

Corolarul 3.4.1 (F. Bojor, [**14**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet înzestrat cu un graf G slab conex. Pentru orice $(G,\varphi)-$contracţie $T : X \to X$, există un unic $x^* \in X$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$ pentru orice $x \in X$.*

Următorul exemplu ne arată că nu putem îmbunătăţi Corolarul 3.4.1 adăugând că x^* este un punct fix a lui T.

Exemplul 3.4.3 (F. Bojor, [**14**]). *Fie mulţimea $X := [0,1]$ înzestrată cu metrica euclidiană. Definim graful G prin*

$$E(G) = \{(x,y) \in (0,1] \times (0,1]\,|x \geqslant y\} \cup \{(0,0),(0,1)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0,1], \text{ şi } T0 = \frac{1}{4}$$

Este simplu de verificat că G este slab conex şi T este o $(G,\varphi)-$contracţie cu $\varphi(t) = \frac{t}{4}$. Evident, $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte.

Demonstrarea teoremelor de punct fix depind de următorul rezultat

Propoziţia 3.4.1 (F. Bojor, [**14**]). *Presupunem că $T : X \to X$ este o $(G,\varphi)-$contracţie astfel încâtpentru un $x_0 \in X$, $Tx_0 \in [x_0]_{\widetilde{G}}$. Fie $\widetilde{G}_{x_0}$ componenta lui $\widetilde{G}$ care-l conţine pe x_0. Atunci $[x_0]_{\widetilde{G}}$ este invariantă în raport cu T şi $T|_{[x_0]_{\widetilde{G}}}$ este o $\left(\widetilde{G}_{x_0},\varphi\right)-$contracţie. Mai mult, dacă $x, y \in [x_0]_{\widetilde{G}}$, atunci $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy echivalente.*

Proof: Fie $x \in [x_0]_{\widetilde{G}}$. Atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^N$ în $\widetilde{G}$ de la x_0 la x, adică, $x_N = x$ şi $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1,...,N$. Dar T este o $(G,\varphi)-$contracţie deci $(Tx_{i-1}, Tx_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $i = 1,...,N$, adică, $(Tx_i)_{i=0}^N$ este un drum în $\widetilde{G}$ de la Tx_0 la Tx. Prn urmare $Tx \in [Tx_0]_{\widetilde{G}}$. Dar, din ipoteză, $Tx_0 \in [x_0]_{\widetilde{G}}$, ceea ce implică, $[Tx_0]_{\widetilde{G}} = [x_0]_{\widetilde{G}}$, prin urmare $Tx \in [x_0]_{\widetilde{G}}$ adică $[x_0]_{\widetilde{G}}$ este invariantă în raport cu T.

Fie $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}_{x_0}\right)$, deci există $((x_i)_{i=0}^N$ în $\widetilde{G}$ de la x_0 la y astfel încât $x_{N-1} = x$. Fie $(y_i)_{i=0}^M$ un drum în $\widetilde{G}$ de la x_0 la Tx_0. Repetând algoritmul din prima parte a demonstraţiei, ne va rezulta că $(y_0, y_1, ...y_M, Tx_1, Tx_2, ...Tx_N)$ este un drum în $\widetilde{G}$ de la x_0 la Ty; în particular, $(Tx_{N-1}, Tx_N) \in E\left(\widetilde{G}_{x_0}\right)$, deci $(Tx, Ty) \in E\left(\widetilde{G}_{x_0}\right)$. Mai mult, deoarece $E\left(\widetilde{G}x_0\right) \subseteq E\left(\widetilde{G}\right)$ şi T este o $\left(\widetilde{G},\varphi\right)-$contracţie, va rezulta că $T|_{[x_0]_{\widetilde{G}}}$ este o $\left(\widetilde{G}_{x_0},\varphi\right)-$contracţie. Din Teorema 3.4.2, rezultă ultima parte a concluziei deoarece $\widetilde{G}x_0$ este conex. □

Teorema 3.4.3 (F. Bojor, [**14**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, şi fie tripletul (X, d, G) având următoarea proprietate:*

(3.117)

$$\text{pentru orice şir } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de elemente din } X, \text{ dacă } x_n \to x \text{ şi } (x_n, x_{n+1}) \in E(G)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $T : X \to X$ o $(G, \varphi)-$contracţie, şi $X_T = \{x \in X \,|(x, Tx) \in E(G)\}$. Atunci au loc următoarele relaţii.

(1) $\operatorname{card} F_T = \operatorname{card}\left\{[x]_{\widetilde{G}} \,| x \in X_T\right\}$.

(2) $F_T \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $X_T \neq \emptyset$.

(3) T are un unic punct fix dacă şi numai dacă există $x_0 \in X_f$ astfel încât $X_T \subseteq [x_0]_{\widetilde{G}}$.

(4) Pentru orice $x \in X_T$, $T\big|_{[x]_{\widetilde{G}}}$ este PO.

(5) Dacă $X_T \neq \emptyset$ şi G este slab conex, atunci T este PO.

(6) Dacă $X' := \cup\left\{[x]_{\widetilde{G}} \,| x \in G\right\}$ atunci $T\,|_{X'}$ este WPO.

(7) Dacă $T \subseteq E(G)$, atunci T este WPO.

Proof: Vom începe demonstraţia cu (4) şi (5). Fie $x \in X_f$ atunci $Tx \in [x]_{\widetilde{G}}$, şi din Propoziţia 3.4.1, dacă $y \in [x]_{\widetilde{G}}$, atunci $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(T^n y)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt echivalente Cauchy. Folosind faptul că spaţiul este complet, va rezulta că $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către un $x^* \in X$. Evident, şi $\lim\limits_{n\to\infty} T^n y = x^*$. Deoarece $(x, Tx) \in E(G)$, atunci prin inducţie vom avea că

$$\left(T^n x, T^{n+1} x\right) \in E(G)\,, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \tag{3.118}$$

Din ipoteză, există un subşir $\left(T^{k_n} x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\left(T^{k_n} x, x^*\right) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. De aici şi din (3.118), ne va rezulta că $\left(x, Tx, T^2 x, ..., T^{k_1} x, x^*\right)$ este un drum în G (deci şi în $\widetilde{G}$) de la x la x^*, adică, $x^* \in [x]_{\widetilde{G}}$. Mai mult, deoarece T este o $(G, \varphi)-$contracţie vom avea că

$$d\left(T^{k_n+1} x, Tx^*\right) \leqslant \varphi\left(d\left(T^{k_n} x, x^*\right)\right) < d\left(T^{k_n} x, x^*\right)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deci, trecând la limită vom obţine că $x^* = Tx^*$. În consecinţă $T\big|_{[x]_{\widetilde{G}}}$ estePO. Dacă G este slab conex, atunci $[x]_{\widetilde{G}} = X$, deci T este PO.

Acum (6) este o simplă consecinţă a lui (4). Pentru a demonstra (7) să observăm că $T \subseteq E(G)$ înseamnă că $X_T = X$. Aceasta implică $X' = X$, prin urmare T este WPO conform lui (6).

Pentru a demonstra (1), considerăm funcţia π definită prin

$$\pi(x) = [x]_{\widetilde{G}} \text{ for all } x \in \operatorname{Fix} T.$$

Este suficient să demonstrăm că π este o bijecţie de la F_T la $\Omega = \left\{[x]_{\widetilde{G}}\Big| \, x \in X_T\right\}$. Deoarece $E(G) \supseteq \Delta$, va rezulta că $F_T \subseteq X_T$ relaţie care implică $\pi(FixT) \subseteq \Omega$.

Pe de altă parte, dacă $x \in X_T$, atunci din (4), $\lim_{n\to\infty} T^n x \in [x]_{\widetilde{G}} \cap F_T$ care implică $\pi\left(\lim_{n\to\infty} T^n x\right) \in [x]_{\widetilde{G}}$. Deci π este o surjecţie de la F_T la Ω. Dacă $x_1, x_2 \in F_T$ sunt astfel încât $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, adică, $[x_1]_{\widetilde{G}} = [x_2]_{\widetilde{G}}$, atunci $x_2 \in [x_1]_{\widetilde{G}}$, deci din (4),

$$\lim_{n\to\infty} T^n x_2 \in [x_1]_{\widetilde{G}} \cap F_T = \{x_1\},$$

adică , $x_2 = x_1$ deoarece $T^n x_2 = x_2$. În consecinţă, T este injectivă şi (1) este demonstrat. În final, să observăm că (2) şi (3) sunt simple consecinţe ale lui (1). □

Corolarul 3.4.2 (F. Bojor, [**14**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet ε-înlănţuit pentru un $\varepsilon > 0$, adică, pentru $x, y \in X$ date, există $N \in \mathbb{N}$ şi un şir $(x_i)_{i=0}^N$ astfel încât*

$$x_0 = x, x_N = y \text{ şi } d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon \text{ pentru orice } i = 1, ..., N.$$

Fie $T : X \to X$ un operator şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de (c) −comparaţie astfel încât

$$\forall x, y \in X\, (d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(Tx,Ty) \le \varphi(d(x,y))) \tag{3.119}$$

Atunci T este PO.

Proof: Considerăm graful G cu

$$V(G) = X, \text{and } E(G) = \{(x,y) \in X \times X |\ d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Atunci ε-înlănţuirea lui (X,d) înseamnă că G este conex. Dacă $(x,y) \in E(G)$, atunci

$$d(Tx,Ty) \le \varphi(d(x,y)) < d(x,y) < \varepsilon$$

deci $(Tx,Ty) \in E(G)$, atunci T este o (G,φ) −contracţie.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X cu $x_n \to x$, atunci $d(x_n, x) < \varepsilon$ pentru un n suficient de mare, deci există $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $(x_{k_n}, x) \in E(G)$.

În continuare vom demonstra că $X_T \neq \emptyset$. Fie $x \in X$. Din Teorema 3.4.2, $(i) \Rightarrow (ii)$ ne rezultă că şirul $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy, deci pentru $\varepsilon > 0$ din corolar există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d\left(T^{n+p}x, T^n x\right) < \varepsilon,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Deci pentru $n := n_0$ şi $p := 1$ ne rezultă că $T^{n_0} x \in X_T$.

Atunci din punctul 5. al Teoremei 3.4.3, T este PO.

□

În continuare vom demonstra că teorema de punct fix pentru φ contraţii ciclice introdusă de Păcurar şi Rus [**49**] este o consecinţă a Teoremei 3.4.3. Vom prezenta şi demonstra o variantă puţin modificată a acestei teoreme.

Teorema 3.4.4 (Păcurar, Rus, [**49**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, $A_1, A_2, ..., A_p \in Pcl(X)$, $Y = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de (c)-comparţie şi $T : Y \to Y$ un operator. Presupunem că $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ este o reprezentare ciclică a lui Y în raport cu T şi T este o $\varphi-$contracţie ciclică, adică verifică relaţia:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi(d(x,y)) \tag{3.120}$$

pentru orice $x \in A_i$, $y \in A_{i+1}$, unde $1 \leqslant i \leqslant p$ şi $A_{p+1} = A_1$. Atunci T are un unic punct fix $x^* \in \bigcap_{i=1}^{p} A_i$ iar şirul Picard $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge la x^* pentru orice valoare iniţială $x \in Y$.

Proof: Considerăm graful G astfel încât $V(G) = X$ şi

$$E(G) = \{(x,y) \in X \times X \,|x \in A_i \text{ şi } y \in A_{i+1}, i = 1, ..., p\}$$

Deoarece T este un operator ciclic avem că dacă $(x,y) \in E(G)$ atunci $x \in A_i$ şi $y \in A_{i+1}$ deci $Tx \in A_{i+1}$ şi $Ty \in A_{i+2}$, prin urmare $(Tx, Ty) \in E(G)$şi folosind relaţia (3.120) ne rezultă că T este o $(G, \varphi)-$contracţie. Din definirea muchiilor lui G avem că G este slab conex şi $X_T \neq \emptyset$.

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de elemente din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $x \in A_j$. Dar şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în fiecare mulţime A_i, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ formaţi din termenii care se găsesc în A_{j-1} verifică condiţia 3.117 din Teorema 3.4.3. În concluzie T este PO. □

5. Teoreme de punct fix pentru operatori *G*-Bianchini

În această secţiune, vom generaliza condiţia de contracţie introdusă de Bianchini în [**4**] şi implicit teorema de punct fix corespunzătoare.

Definiţia 3.5.1 (F. Bojor, [**18**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G. Operatorul $T : X \to X$ se numeşte un operator G-Bianchini dacă:*

1. *Pentru orice $(x,y) \in E(G)$ avem că $(Tx, Ty) \in E(G)$.*
2. *există $a \in [0,1)$ astfel încât:*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$$

pentru orice $(x,y) \in E(G)$.

Exemplul 3.5.1. *Orice operator Bianchini este un operator G_0-Bianchini, unde graful G_0 este definit prin $E(G_0) = X \times X$.*

Exemplul 3.5.2 (F. Bojor, [**18**]). *Fie $X = \{0,1,2\}$ înzestrat cu metrica euclidiană d_E. Operatorul $T : X \to X$, $Tx = 0$, for $x \in \{0,1\}$* şi *$Tx = 1$, for $x = 2$ este un* *operator G-Bianchini cu constanta $a = \frac{1}{2}$, unde $G = \{(0,1);(0,0);(1,1));(2,2)\}$, dar nu este operator Bianchini deoarece $d(T0,T2) = 1$ şi*

$$max\,\{d(0,T0), d(2,T2)\} = \max\{0,1\} = 1$$

. Însa este simplu de observat că iteraţia Picard $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la 0 pentru orice $x \in X$.

Observaţia 3.5.1. *Dacă T este un operator G-Bianchini, atunci T este atât operator G^{-1}-Bianchini cât şi operator $\widetilde{G}$-Bianchini.*

Notaţie 3.5.1. *Fie X o mulţime nevidă, G un graf cu proprietatea $V(G) = X$, $T : X \to X$un operator şi $n_0 \in \mathbb{N}$. Vom nota*

$$X_{T^{n_0}} := \left\{x \in X \,\middle|\, \left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)\right\}.$$

Lema 3.5.1 (F. Bojor, [**18**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Bianchini cu constanta a. Dacă există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $x \in X$ astfel încât $x \in X_T^{n_0}$ atunci:*

$$d\left(T^n x, T^{n+1}x\right) \leqslant a^{n-n_0} d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) \tag{3.121}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Proof: Fie $x \in X$ astfel încât $(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$, atunci prin inducţie, vom obţine $(T^n x, T^{n+1}x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Din Observaţia 3.5.1, T este un operator $\widetilde{G}$-Bianchini, deci din Definiţia 3.5.1, vom obţine:

$$d\left(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x\right) \leqslant a \max\left\{d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right), d\left(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x\right)\right\}. \tag{3.122}$$

Dacă presupunem că $d(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) < d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x)$ atunci folosind 3.122 vom avea că

$$d\left(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x\right) \leqslant ad\left(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x\right)$$

care este o contradicţie deoarece $a \in [0,1)$ şi $d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x) \neq 0$.

Prin urmare, $d(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x) \geqslant d(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x)$ şi folosind relaţia 3.122 vom obţine că

$$d\left(T^{n_0+1}x, T^{n_0+2}x\right) \leqslant ad\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right).$$

Aplicînd metoda inducţiei matematice vom obţine concluzia lemei. □

Lema 3.5.2 (F. Bojor, [**18**]). *Fie (X,d) înzestrat cu un graf G şi $T : X \to X$ un operator G-Bianchini cu constanta a. Dacă graful G este slab conex şi*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{T^n} = X \tag{3.123}$$

atunci, pentru $x, y \in X$ fixate, există $r(x,y) \geqslant 0$ şi $k(x,y) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant a^{n-k(x,y)} r(x,y) \tag{3.124}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq k(x,y)$.

Proof: Fie $x, y \in X$.

Cazul 1. Dacă $(x,y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci prin inducţie, vom obţine că $(T^n x, T^n y) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci din Definiţia 3.5.1 vom avea:

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant a \max\left\{d\left(T^{n-1}x, T^n x\right), d\left(T^{n-1}y, T^n y\right)\right\} \leqslant a\left(d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + d\left(T^{n-1}y, T^n y\right)\right)$$

Din Lema 3.5.1 atunci există $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d\left(T^{n-1}x, T^n x\right) \leqslant a^{n-n_0-1} d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right)$$

şi

$$d\left(T^{n-1}y, T^n y\right) \leqslant a^{n-n_1-1} d\left(T^{n_1}y, T^{n_1+1}y\right).$$

Dacă notăm $r(x,y) = d\left(T^{n_0}x, T^{n_0+1}x\right) + d\left(T^{n_1}y, T^{n_1+1}y\right)$ şi $k(x,y) = \max\{n_0, n_1\}$ atunci, (3.124) este adevărată.

Cazul 2. Dacă $(x,y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$ atunci există un drum $(x_i)_{i=0}^N$ în $\widetilde{G}$ de la x la y, adică, $x_0 = x, x_N = y$ cu $(x_{i-1}, x_i) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru $i = 1, ..., N$. Din Observaţia 3.5.1, T este un operator $\widetilde{G}$-Bianchini. Atunci din inegalitatea triunghiului, vom obţine:

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n y) &\leqslant \sum_{i=1}^N d(T^n x_{i-1}, T^n x_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^N a \max\left\{d\left(T^{n-1}x_{i-1}, T^n x_{i-1}\right), d\left(T^{n-1}x_i, T^n x_i\right)\right\} \\ &\leqslant a \sum_{i=1}^N \left[d\left(T^{n-1}x_{i-1}, T^n x_{i-1}\right) + d\left(T^{n-1}x_i, T^n x_i\right)\right] \end{aligned}$$

Folosind relaţia (3.123), pentru $i = 1, ..., N$ atunci există $n_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_i \in X_{T^{n_i}}$ deci din Lema 3.5.1 avem că:

$$d\left(T^n x_i, T^{n+1}x_i\right) \leqslant a^{n-n_i} d\left(T^{n_i}x, T^{n_i+1}x\right) \tag{3.125}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_i$.

Deci este suficient să notăm

$$k(x,y) = \max\{n_i \,|i = 1, ..., N\}$$

şi

$$r(x,y) = \sum_{i=1}^N \left[d\left(T^{n_{i-1}}x_{i-1}, T^{n_{i-1}+1}x_{i-1}\right) + d\left(T^{n_i}x_i, T^{n_i+1}x_i\right)\right].$$

□

Principalul rezultat al acestei secţiuni este următoarea teoremă.

Teorema 3.5.2 (F. Bojor, [**18**]). *Fie* (X,d) *un spaţiu metric înzestrat cu un graf* G *şi* $T: X \to X$ *un operator* G*-Bianchini. Presupunem că:*

(i.) G *este slab conex;*

(ii.) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_{T^n} = X$;

(iii.) *pentru orice* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *din* X, *dacă* $x_n \to x$ *şi* $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *atunci există un subşir* $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *cu* $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci T *este PO.*

Proof: Fie $x \in X$. Din Lema 3.5.2, există $r(x, Tx) \geqslant 0$ şi $k(x, Tx) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant a^{n-k(x,Tx)} r(x, Tx) \tag{3.126}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq k(x, Tx)$. Deci

$$\begin{aligned} d\left(T^n x, T^{n+p} x\right) &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} d\left(T^{n+i} x, T^{n+i+1} x\right) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} a^{n+i-k(x,Tx)} r(x, Tx) \\ &= a^{n-k(x,Tx)} \cdot \frac{1-a^p}{1-a} r(x, Tx) \\ &\leqslant \frac{a^{n-k(x,Tx)}}{1-a} r(x, Tx) \end{aligned} \tag{3.127}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq k(x, Tx)$.

Deoarece $0 \leq a < 1$, ne rezultă că $a^n \to 0$ (as $n \to \infty$), care împreună cu (3.127) ne arată că $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy. Dar (X, d) este un spaţiu metric complet, prin urmare $(T^n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către un $x^* \in X$.

Fie $x, y \in X$ atunci $(T^n x)_{n\geqslant 0} \to x^*$ şi $(T^n y)_{n\geqslant 0} \to y^*$, atunci când $n \to \infty$. Din Lema 3.5.2, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*, n \geq k(x, y)$, vom obţine că

$$d(T^n x, T^n y) \leqslant a^{n-k(x,y)} r(x, y) \tag{3.128}$$

Tercând la limită când $n \to \infty$ în (3.128), vom obţine că $d(x^*, y^*) \leqslant 0$, deci $x^* = y^*$ şi pentru orice $x \in X$ există un unic x^* astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*.$$

În continuare vom demonstra că $x^* \in F_T$. Folosind condiţia (ii) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left(T^{n_0} x^*, T^{n_0+1} x^*\right) \in E\left(\widetilde{G}\right)$$

deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n := T^{n+n_0} x^*$ are proprietăţile $x_n \to x^*$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$. Din $(iii.)$ ne rezultă că există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x^*) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom avea că:

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+n_0+1} x^*\right) + d\left(T^{k_n+n_0+1} x_0, Tx^*\right) \\ &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+n_0+1} x\right) + a \cdot \max\left\{d\left(T^{k_n+n_0} x^*, T^{k_n+n_0+1} x^*\right), d(x^*, Tx^*)\right\} \\ &\leqslant d\left(x^*, T^{k_n+n_0+1} x\right) + a\left[d\left(T^{k_n+n_0} x^*, T^{k_n+n_0+1} x^*\right) + d(x^*, Tx^*)\right]. \end{aligned}$$

Deci

$$d(x^*, Tx^*) \leqslant \frac{1}{1-a} d\left(x^*, T^{k_n+1}x^*\right) + \frac{a}{1-a} d\left(T^{k_n}x^*, T^{k_n+1}x^*\right).$$

Trecând la limită când $n \to \infty$, vom obţine că:

$$d(x^*, Tx^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = Tx^*, \text{ adică , } x^* \in F_T.$$

Dacă avem $Ty = y$ pentru un $y \in X$, atunci din demonstraţia de mai sus, vom avea că $T^n y \to x^*$, deci $y = x^*$ şi prin urmare, T este PO. □

Exemplul următor ne arată că condiţia (*iii.*) este o condiţie suficientă pentru ca un operator G-Bianchini să fie PO.

Exemplul 3.5.3 (F. Bojor, [**18**])**.** *Fie $X := [0, 10]$ înzestrat cu metrica euclidiană $d(x, y) = |x - y|$, pentru orice $x, y \in X$. Definim graful G prin*

$$E(G) = \{(x, y) \in (0, 10] \times (0, 10] \,|\, x \geqslant y\} \cup \{(0, 0), (0, 10)\}$$

Fie

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ for } x \in (0, 10], \text{ and } T0 = \frac{5}{2}$$

Este simplu de verificat că (X, d) este un spaţiu metric complet, G este slab conex şi T este un operator G-Bianchini cu constanta $a = \frac{1}{3}$. Pentru orice $x \in (0, 10]$ vom avea că $(x, Tx) = \left(x, \frac{x}{4}\right) \in E(G)$ deoarece $x \geqslant \frac{x}{4}$ deci $(0, 10] \subset X_{T^0}$ şi $(T0, T^2 0) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{8}\right) \in E(G)$ deci $0 \in X_{T^1}$. În consecinţă $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_{T^n} = X$. Dar , $T^n x \to 0$ pentru orice $x \in X$ şi T nu are puncte fixe.

Următorul exemplu ne arată că graful G trbuie să fie slab conex pentru ca un operator G-Bianchini să fie PO.

Exemplul 3.5.4 (F. Bojor, [**18**])**.** *Fie $X := [0, 1]$ înzestrat cu metrica euclidiană $d(x, y) = |x - y|$, pentru orice $x, y \in X$ şi*

$$Tx = \frac{x}{4} \text{ pentru } x \in (0, 1], \text{ şi } T0 = 1$$

Definim graful G prin

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x, y) \in [0, 1) \times [0, 1) \,|\, x \geqslant y\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Atunci (X, d) este un spaţiu metric complet, G nu este slab conex deoarece nu există nici un drum în $\widetilde{G}$ de la 0 la 1, condiţiile (ii) şi (iii) sunt adevărate şi T este un operator G-Bianchini cu constanta $a = \frac{1}{3}$. Şirul $T^n x$ converge la 0 pentru orice $x \in X$, dar T nu are puncte fixe.

Prima consecinţă a teoremei de mai sus se referă la punctele fixe ale unui operator Bianchini în spaţii metrice parţial ordonate.

Corolarul 3.5.1 (F. Bojor, [**18**]). *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime parţial ordonată d o metrică pe X astfel încât spaţiul metric (X, d) să fie complet. Fie $T : X \to X$ un operator crescător astfel încât următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Există $a \in [0, 1)$ astfel încât $d(Tx, Ty) \leqslant a \cdot \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}$ pentru orice $x, y \in X$ cu $x \leqslant y$;*
2. *Pentru orice $x \in X$ există $n_x \in \mathbb{N}$ astfel încât $T^{n_x}x$ şi $T^{n_x+1}x$ sunt elemente comparabile în $(X, \leqslant)$;*
3. *Dacă un şir (x_n) converge la x în X, atunci există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_{k_n} \leqslant x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Atunci T este PO.

Proof: Considerăm graful G definit prin $V(G) = X$, şi

$$E(G) = \{(x, y) \in X \times X \,|\, x \leqslant y\}.$$

Deoarece operatorul T este crescător şi are loc (1), vom obţine că T esteun operator $G-$Bianchini. Condiţiile (2) şi (3) implică condiţiile (ii) respectiv (iii) din Teorema 3.5.2. Concluzia rezultă acum din Teorema 3.5.2. $\square$

În ceea ce urmează vom demonstra că teorema de punct fix pentru operatori ciclici Bianchini demonstrată în [**6**] by Petric este o consecinţă a Teoremei 3.5.2.

Teorema 3.5.3 (M. Petric, [**6**]). *Fie $p \leqslant 2$ şi $A_1, A_2, ..., A_p, A_{p+1} = A_1$ submulţimi nevide şi închise ale spaţiului metric complet (X, d) şi presupunem că $T : \cup_{i=1}^{p} A_i \to \cup_{i=1}^{p} A_i$ este un operator ciclic pentru care există $a \in [0, 1)$ astfel încât pentru orice pereche $(x, y) \in A_i \times A_{i+1}$, cu $i \in \{1, 2, ..., p\}$, avem că*

$$d(Tx, Ty) \leqslant a \cdot \max\{d(x, Tx), d(y, Ty)\}.$$

Atunci T este PO.

Proof: Fie $Y = \cup_{i=1}^{p} A_i$ atunci (Y, d) este un spaţiu metric complet.
Considerăm graful G cu $V(G) = Y$ şi

$$E(G) = \{(x, y) \in Y \times Y \,|\exists\, i \in \{1, 2, ..., p\} \text{ astfel încât } x \in A_i \text{ şi } y \in A_{i+1}\}$$

Deoarece T este operator ciclic

$$(Tx, Ty) \in E(G), \text{ pentru orice } (x, y) \in E(G)$$

şi folosind ipoteza T este un operator G-Bianchini, graful G este conex şi $(x, Tx) \in E(G)$ pentru orice $x \in Y$. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din X cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci există $j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $x \in A_j$. Conform definiţiei grafului G, şirul $\{x_n\}$ are o infinitate de termeni în fiecare mulţime A_i, cu $i \in \{1, 2, ..., p\}$. Subşirul şirului $\{x_n\}$ format din acei termeni care se găsesc în A_{j-1} verifică condiţia (*iii.*) din Teorema 3.5.2. În concluzie operatorul T este PO. $\square$

CAPITOLUL 4

Câteva extinderi ale teoremelor de punct fix în spaţii metrice înzestrate cu un graf

În acest capitol vom extinde teoremele de punct fix din Capitolul 3 în cazul spaţiilor metrice G complete definind iniţial acest concept şi la teoreme de tip Maia.

Contribuţiile autorului din acest capitol sunt: Definiţia 4.1.2, Exemplul 4.1.1 şi Teoremele 4.1.1, 4.2.2

1. Teoreme de punct fix în spaţii metrice G-complete

În anul 1971 Ćirić [**24**] a extins teoremele de punct fix pentru operatorii contractivi pentru spaţii metrice care nu sunt complete si anume pentru spaţiile orbital complete.

Definiţia 4.1.1 (Ćirić [**24**]). *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $T : X \to X$ un operator. Spunem că spaţiu X este orbital complet dacă orice şir Cauchy inclus în $O(x,\infty) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, pentru un $x \in X$ este convergent*

Folosind acest concept mai mulţi autori au introdus şi au demonstrat teoreme de punct fix [**23**], [**24**], [**2**], [**63**].

În cele ce urmează vom considera că (X,d) este un spaţiu metric înzestrat cu un graf G cu proprietăţile $V(G) = X$ şi $\Delta = \{(x,x) \,|x \in X\} \subseteq E(G)$ şi vom generaliza conceptul din definiţia anterioară pentru astfel de spaţii.

Definiţia 4.1.2. *Spunem că spaţiul metric (X,d) este G complet dacă orice şir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea*

$$(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

este convergent.

Se observă că orice spaţiu metric complet este un spaţiu metric G complet pentru orice graf G dar reciproca este în general falsă după cum se poate vedea din exemplul următor.

Exemplul 4.1.1. *Fie $X = [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ care este un spaţiu metric în raport cu metrica euclidiană. Definim graful G prin*

$$V(G) = X \text{ şi } E(G) = \{(x,0) \,|x \in X\}$$

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy cu proprietatea

$$(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are un subşir constant 0 deci este convergent la 0. Dar spaţiu metric X nu este complet deoarece şirul $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definit prin $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nu este convergent în X.

În continuare vom extide Teorema 3.1.1 [**17**] la spaţii metrice G complete.

Teorema 4.1.1. *Fie (X, d) un spaţiu metric înzestrat cu un graf G astfel încât spaţiul (X, d) să fie $\widetilde{G}$ complet. Dacă:*

i. $T : X \to X$ este un operator G-Kannan cu constanta a;

ii. graful G este slab T-conex;

iii. pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X, cu proprietăţile $x_n \to x$ şi $(x_n, x_{n+1}) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există un subşir $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(x_{k_n}, x) \in E\left(\widetilde{G}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci T este PO.

Proof: Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) = X \times X$ atunci operatorul T este un operator Kannan în sens clasic şi spaţiul X este un spaţiu metric complet, deci aplicând Teorema lui Kannan ne rezultă că T este PO.

Dacă $E\left(\widetilde{G}\right) \neq X \times X$ atunci există cel puţin o pereche $(x, y) \in X \times X$ astfel încât $(x, y) \notin E\left(\widetilde{G}\right)$. Dar graful G este slab T-conex, prin urmare există cel puţin un punct $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, Tx_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$.

Prin inducţie se demonstrează că $(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi

$$d\left(T^n x_0, T^{n+1} x_0\right) \leqslant \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, Tx_0) \;\; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.129}$$

Flosind relaţia (4.129) şi faptul că $\frac{a}{1-a} \in [0, 1)$ ne rezultă că $T^n x_0$ este un şir Cauchy. Dar $(T^n x_0, T^{n+1} x_0) \in E\left(\widetilde{G}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi spaţiul X este un spaţiu metric $\widetilde{G}$ complet, rezultă că şirul $T^n x_0$ este convergent, deci există $x^* \in X$ astfel încât $T^n x_0 \to x^*$.

În acelaşi mod ca la Teorema 3.1.1 rezultă că x^* este un punct fix pentru T şi pentru orice $x \in X$ şirul $T^n x$ este un şir Cauchy.

Fie $x \in X$ fixat. Din Lema 3.1.1 rezultă că există $r(x, x^*) \geqslant 0$ astfel încât

$$d(T^n x, T^n x^*) \leqslant ad\left(T^{n-1}x, T^n x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x, x^*) + ad\left(T^{n-1}x^*, T^n x^*\right)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dar x^* este un punct fix pentru operatorul T, deci vom obţine că

$$d(T^n x, x^*) \leqslant ad\left(T^n x, T^{n-1}x\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x, x^*). \tag{4.130}$$

Trecând la limită în relaţia (4.130) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} d(T^n x, x^*) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$. Prin urmare pentru orice $x \in X$ avem că $T^n x \to x^*$ şi x^* este un punct fix a lui T.

Dacă T ar avea un alt punct fix $y \in X$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} T^n y = x^*$ de unde rezultă că $y = x^*$. În consecinţă operatorul T este PO. □

În mod analog se pot demonstra teoreme de punct fix pentru operatori G-Zamfirescu, G-Ćirić-Reich-Rus, G-Bianchini în spaţii metrice G-complete.

2. Teoreme de tip Maia pentru operatori G-Kannan

În [**41**] Maia a demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 4.2.1 (Maia, [**41**])**.** *Fie X o mulţime nevidă, d şi ρ două metrice pe X şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

i. $d(x,y) \leqslant \rho(x,y)\,,\ \forall x,y \in X$*;*
ii. (X,d) *este un spaţiu metric complet;*
iii. $T : (X,d) \to (X,d)$ *este continuu;*
iv. $T : (X,\rho) \to (X,\rho)$ *este o a contracţie cu constanta* $a \in [0,1)$*;*

Extinderea Teoremei lui Maia pentru operatori G-Kannan pe spaţii metrice înzestrate cu un graf este:

Teorema 4.2.2. *Fie X o mulţime nevidă înzestrată cu un graf G, d şi ρ două metrice pe X şi $T : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

i. $d(x,y) \leqslant \rho(x,y)\,,\ \forall x,y \in X$*;*
ii. (X,d) *este un spaţiu metric complet;*
iii. $T : (X,d) \to (X,d)$ *este continuu;*
iv. $T : (X,\rho) \to (X,\rho)$ *este un operator G-Kannan cu constanta* $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$*;*
v. graful G este slab T-conex.

Atunci T este PO.

Proof: Fie $x_0 \in X$ fixat. Din (iv.) şi (v.) folosind aceleaşi argumente ca în demonstraţia Teoremei 3.1.1 va rezulta că şirul $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental în (X,ρ).

Din (i.) rezultă că şirul $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ este fundamental şi în (X,d). Dar din (ii.) spaţiul (X,d) este complet deci şirul $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la un element $x^* \in X$. Folosind (iii.) rezultă că x^* este un punct fix pentru operatorul T. Deci pentru orice $x_0 \in X$ şirul $(T^n x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la un punct fix a lui T.

Presupunem că T are cel puţin două puncte fixe x^* şi y^*.Din Lema 3.1.1 rezultă că există $r(x^*,y^*) \geqslant 0$ astfel încât

$$d(T^n x^*, T^n y^*) \leqslant ad\left(T^{n-1}x^*, T^n x^*\right) + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x^*,y^*) + ad\left(T^{n-1}y^*, T^n y^*\right)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dar x^* şi y^* sunt puncte fixe pentru operatorul T, deci vom obţine că

$$d(x^*,y^*) \leqslant \left(\frac{a}{1-a}\right)^n r(x^*,y^*)\,. \tag{4.131}$$

Trecând la limită în relaţia (4.131) rezultă că $\lim_{n\to\infty} d(x^*, y^*) = 0$, deci $x^* = y^*$. Prin urmare pentru orice $x \in X$ avem că $T^n x \to x^*$ şi x^* este un punct fix a lui T, deci T este PO. □

În mod analog se pot demonstra teoreme de punct fix de tip Maia pentru operatori G-Zamfirescu, G-Ćirić-Reich-Rus, G-Bianchini.

3. Lista lucrarilor ştiinţifice ale autorului

Lucrări ştiinţifice publicate

(1) *Fixed point theorems for Reich type contractions on metric spaces with a graph*, Nonlinear Anal., **75** (2012), 3895Ű3901.
(2) *Note on the stability of first order liniar differential equation*, Opuscula Math., **32** (2012), no. 1, 67Ű74.
(3) *Fixed point of φ-contraction in metric spaces endowed with a graph*, Ann. Univ. Craiova, Math. Comput. Sci. Ser., **37** (2010), no. 4, 85Ű92.
(4) *Generalized additive Cauchy equations and their Ulam-Hyers stability*, Creative Math Info., **18** (2009), no. 2, 129Ű135.

Bibliografie

[1] **Aoki T.**, *On the stability of the linear transformation in Banach spaces.*, J. Math. Soc.Japan, **2** (1950), 64–66.

[2] **Babu G. V. R., Kameswari M. V. R.** , *Some fixed point theorems relating to the orbital continuity*, Tamkang J. Math., **36(1)** (2005), 73–80.

[3] **Badea C.**, *On the Hyers-Ulam stability of mappings: the direct method*, Hadronic Press (1994), 7–13.

[4] **Bianchini R.M.T.**, *Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi*, Bolletino U.M.I., **4(5)** (1972), 103–106.

[5] **Gajda Z.**, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431–434.

[6] **Petric M.A.**, *Some remarks concerning Círíc-Reich-Rus operators*, Creative Math. and Info., **18** (2009), 188–193.

[7] **Petric M.A.** and B.G. Zlatanov, *Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions*, (accepted).

[8] **Alsina C., Ger R.**, *On some inequalities and stability results related to the exponential function*, J. Inequal. Appl, **2** (1998), 373–380.

[9] **Banach S.** , *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math., **3** (1922), 133–181.

[10] **Berinde V.**, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, **9(1)** (2004), 43–53.

[11] **Berinde V.**, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg New York, 2007.

[12] **Berinde, V., Păcurar, M.**, *A note on the paper "Remarks on fixed point theorems of Berinde"*, Nonlinear Analysis Forum, **14** (2009), 119–124.

[13] **Bojor F.**, *Generalized additive Cauchy equations and their Ulam-Hyers stability*, Creative Math. and Info., **18** (2009), no. 2, 129–135.

[14] **Bojor F.**, *Fixed point of φ-contraction in metric spaces endowed with a graph*, Ann. Univ. Craiova, Math. Comput. Sci. Ser., **37** (2010), no. 4, 85–92.

[15] **Bojor F.**, *Fixed point theorems for Reich type contractions on metric spaces with a graph*, Nonlinear Anal., **75** (2012), 3895–3901.

[16] **Bojor F.**, *Note on the stability of first order liniar differential equation*, Opuscula Math., **32** (2012), no. 1, 67–74.

[17] **Bojor F.**, *Fixed point of Kannan mapping in metric spaces endowed with a graph*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. ((acceptat)).

[18] **Bojor F.**, *Fixed points of Bianchini mappings in metric spaces endowed with a graph*, Carpathian J. Math. ((acceptat)).

[19] **Bojor F.**, *Fixed point theorems for Zamfirescu mappings in metric spaces endowed with a graph*, ((trimis)).

[20] **Borelli C. , Forti L.**, *On a general Hyers-Ulam stability rezult*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **18** (1995), 229–236.

[21] **Bourbaki, N.**, *Topologie générale*, Herman, 1961.

[22] **Chatterjea, S.K.**, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci., **25** (1972), 727–730.

[23] **Ćirić, Lj. B.**, *Generalized contractons and fixed point theorem*, Publ. L'Inst. Math., **12** (1971), 19–26.

[24] **Ćirić, Lj. B.**, *On contraction type mappings*, Math. Balkanica, **1** (1971), 52–57.

[25] **Ćirić, Lj. B.**, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc.Am. Math. Soc., **45** (1974), 267–273.

[26] **Diestel R.**, *Graduate texts in mathematics*, Springer-Verag, 2005.

[27] **Edelstein M.**, *An extension of Banach's contracţie principle*, Proc. Amer. Math. Soc., **12** (1961), 7–10.

[28] **Fréchet, M.**, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[29] **Hyers D. H.**, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Natl. Acad. Sci., **27** (1941), 222–224.

[30] **Jachymski J.**, *The contracţie principle for mappings on a metric space with a graph*, Proc. Amer. Math. Soc., **1** (2008), 1359–1373.

[31] **Jachymski J., Jóźwik I.**, *Nonlinear contractive conditions: A comparison and related problems*, Banach Center Publ., **77** (2007), 123–146.

[32] **Jung C. F. K.**, *On generalized complet metric spaces*, Bull. A.M.S., **75** (1969), 113–116.

[33] **Jung S. M.**, *Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order*, Appl. Math. Lett., **17** (2004), 1135–1140.

[34] **Jung S. M.**, *Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations of First Order (II)*, Appl. Math. Lett., **19** (2006), 854–858.

[35] **Jung S. M.**, *A Fixed Point Approach to the Stability of a Volterra Integral Equation*, Fixed Point Theory Appl., **Article ID 57064** (2007).

[36] **Jung S. M.**, *A Fixed Point Approach to the Stability of Differential Equations* $y' = F(x, y)$, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., **33** (2010), no. 2, 47–56.

[37] **Jungnickel, D.**, *Graphs, networks and algorithms*, Springer, 2008.

[38] **Kannan, R.**, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10, pages = 71-76,** (1968).

[39] **Kirk W.A., Srinivasan P.S., Veeramani P.**, *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 1, 79–89.

[40] **Luxemburg W. A. J.**, *n the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations. II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, **20** (1958), 540–546.

[41] **Maia M. G.**, *Unósservazione sulle contrazioni metriche*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **40** (1968), 139–143.

[42] **Miura T.** , *On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map*, Sci. Math. Japan, **55** (2002), 17–24.

[43] **Nieto J. J., Pouso R. L. Rodríyguez-López R**, *Fixed point theorems in ordered abstract spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **135** (2007), 2505–2517.

[44] **Nieto J. J., Rodríyguez-López R.**, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, **22** (2005), 223–239.

[45] **Nieto J. J., Rodríyguez-López R.**, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Acta Math. Sinica, English Ser. (2007), 2205–2212.

[46] **O'Reagan D., Petruşel A.**, *Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 1241ï£¡1252.

[47] **Petric M.A.**, *Fixed points and best proximity points theorems for cyclical contractive operators*, Teză de doctorat, 2011.

[48] **Petruşel A., Rus I.A.**, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134)** (2006), 411–418.

[49] **Păcurar M., Rus I.A.**, *Fixed point theorems for cyclic φ-contractions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **72** (2010), 1181ï£¡1187.

[50] **Radu V.**, *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory, **4** (2003), 91–96.

[51] **Ran A.M.C., Reurings M.C.B.**, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 1435ï£¡1443.

[52] **Rassias J. M.**, *Solution of a stability problem of Ulam*, Discuss. Math., **12** (1992), 431–434.

[53] **Rassias Th. M.**, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **72** (1978), 297–300.

[54] **Rassias Th. M.**, *Communication, 27-th International Symposium on Functional Equation*, , **Bielsko-Biala, Katowice, Krokow, Poland,** (1989).

[55] **Reich S.**, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. U.M.I., **4** (1971), 1–11.

[56] **Reich S.**, *Some remarks concerning contraction mappings*, Canad. Math. Bull., **14** (1971), 121ï£¡124.

[57] **Rhoades B. E.**, *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **226** (1977), 257–290.

[58] **Rus I. A.** , *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Ist. di Matem. Unic. di Trieste, **3** (1971), 1–4.

[59] **Rus I. A.**, *Cyclic representatioms and fixed points*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, **3** (2005), 171ï£¡178.

[60] **Rus I.A.**, *Principii şi aplicatţiii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca„ 1979.

[61] **Rus I.A.**, *Generalized contractions and Applications*, Cluj University Press, 2001.

[62] **Rus I.A., Petruşel A, Petruşel G.**, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008.

[63] **Samet B, Vetro C.**, *Berinde mappings in orbitally complete metric spaces*, Chaos Solitons Fract., **44** (2011), 1075–1079.

[64] **Trif T.**, *On the stability of a functional equation deriving from an inequality of Popoviciu for convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **272** (2002), 604ï£¡616.

[65] **Ulam S.M.**, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publ. New York, 1960.

[66] **Zamfirescu T.**, *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel) (1972), 292–298.

[67] BERINDE V., *Contracţii generalizate şi aplicaţii*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.