Universitatea de Nord din Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe

Teză de doctorat

PUNCTE TRIPLE FIXE PENTRU OPERATORI DEFINIŢI PE SPAŢII METRICE PARŢIAL ORDONATE

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Marin Borcut

Baia Mare
2012

Cuprins

Prefaţă

Tema tezei face parte din domeniul analizei neliniare şi anume, din teoria punctului fix. Rezultatul fundamental din teoria metrică a punctului fix este **Principiul Contracţiilor lui Banach-Caccioppoli-Picard** [**17**] care, în esenţă, afirmă că într-un spaţiu metric complet, un operator $F : X \to X$ care îndeplineşte condiţia de contracţie:

$$d(F(x), F(y)) \leq ad(x, y) \;\forall\; x, y \in X, a \in [0, 1), \tag{0.1}$$

are un punct fix unic care poate fi obţinut prin metoda iteraţiilor Picard.

Pornind de la acest rezultat, în ultimii 50 de ani s-a dezvoltat o teorie foarte bogată, după cum se poate vedea în lucrările: [**106**], [**118**],[**119**], [**120**], [**121**], [**122**] [**27**], [**28**], [**29**], [**30**]. Printre aceste contribuţii se numără şi contribuţiile şcolii româneşti de teorie a punctelor fixe de la Cluj, condusă de Prof. Univ. Dr. Ioan Rus. Aceste contribuţii se referă atât la teoria punctului fix în sine, cât şi la aplicaţiille acestei teorii la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale, a ecuaţiilor diferenţiale, a ecuaţiilor integrale, a ecuaţiilor integro-diferenţiale ş.a.m.d.

Un moment important în evoluţia teoriei punctului fix este marcat de lucrarea [**108**] din anul 2004 a lui **Ran** şi **Reurings**, care consideră condiţia de contracţie (0.1) într-un **spaţiu metric parţial ordonat** şi nu trebuie să fie satisfăcută de orice $x, y \in X$, ci numai de elementele comparabile în sensul relaţiei de ordine definite pe X:

$$\exists\; 0 < c < 1 : \; d(F(x), F(y)) \leq cd(x, y) \;\forall\; x \geq y. \tag{0.2}$$

Ran şi Reurings a obţinut existenţa şi unicitatea punctului fix pentru astfel de contracţii pentru spaţii metrice parţial ordonate şi au indicat aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii matriceale.

Această nouă direcţie de cercetare a atras foarte mulţi cercetători şi a fost foarte fructuoasă. Printre cei care au obţinut rezultate în această direcţie sunt **Nieto** şi **R. Rodríguez-López** în lucrarea [**96**], care au obţinut existenţa şi unicitatea punctului fix în condiţiile în care operator $F : X \to X$ verifică condiţia de contracţie (0.2), este monoton crescător, dar nu este continuu. Pentru a fi posibil acest fapt, autorii au introdus condiţia adiţională spaţiului X:

$$\text{dacă există un şir crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n. \tag{0.3}$$

Dacă operatorul $F : X \to X$ este monoton descrescător, atunci şirul din condiţia (0.3) trebuie să fie descrescător.

Sintetizând rezultatele din lucrarea lui Nieto [**96**], **Bhaskar** şi **Lakshmikantham**, în lucrarea [**62**] au propus studiul punctelor cuplate fixe pentru operatori $[F : X \times X \to X]$, în prezenţa unei condiţii de contracţie:

$$d\left(F(x,y),F(u,v)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(x,u)+d(y,v)\right] \text{ pentru } x \geq u, y \leq v. \tag{0.4}$$

Tematica punctelor cuplate după lucrarea lui Bhaskar şi Lakshmikantham s-a bucurat de un interes imens. Numai în baza de date Scopus există peste [80] de lucrări: [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**10**], [**8**], [**11**], [**12**], [**13**], [**14**], [**16**], [**18**], [**19**], [**20**], [**21**], [**22**], [**23**], [**24**], [**25**], [**45**], [**48**], [**49**], [**50**], [**51**], [**54**], [**55**], [**56**], [**58**], [**60**], [**64**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**69**], [**70**], [**71**], [**74**], [**77**], [**78**], [**81**], [**85**], [**86**], [**87**], [**89**], [**92**], [**93**],[**94**], [**95**], [**96**], [**97**], [**99**], [**102**], [**103**], [**123**], [**124**], [**125**], [**126**], [**127**], [**128**], [**129**], [**130**], [**131**], [**132**], [**133**], [**134**], [**136**], [**137**], [**140**], [**141**], [**142**], [**135**], [**98**], [**100**], [**101**], [**76**], [**53**], [**26**], [**42**],[**114**], [**90**], [**15**], [**59**], [**63**], lucrări în care s-au obţinut atât rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor fixe cuplate pentru operatori ce verifică diferite tipuri de contracţie, cât şi aplicaţii pentru aceste rezultate în rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale şi integrale.

Pornind de la aceste rezultate ne-am propus studiul punctelor fixe triple, care se referă la operatori $F : X \times X \times X \to X$, motivaţi de faptul că, prin intermediul tehnicii punctelor fixe cuplate nu putem rezolva un sistem de forma:

$$\begin{cases} x^2+2yz-6x+3=0 \\ y^2+2zx-6y+3=0 \\ z^2+2xy-6z+3+0 \end{cases}. \tag{0.5}$$

În articolele [**31**] **"Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** şi [**32**] **"Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** autorii **Berinde-Borcut** respectiv **Borcut-Berinde** introduc conceptele de **punct fix triplu** şi **punct coincident triplu** şi prezintă rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctului triplu fix, respectiv a punctului triplu coincident pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate ce verifică condiţie de contracţie de tipul:

există $j,k,l \in [0,1)$ cu $j+k+l<1$, astfel încât

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right), \tag{0.6}$$

$\forall x \geq u, y \leq v, z \geq w$, respectiv

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right) \leq jd\left(g\left(x\right),g\left(u\right)\right)+kd\left(g\left(y\right),g\left(v\right)\right)+ \tag{0.7}$$

$$+ld\left(g\left(z\right),g\left(w\right)\right),$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w \in X$ cu $g\left(x\right) \leq g\left(u\right),\ g\left(y\right) \geq g\left(v\right),\ g\left(z\right) \leq g\left(w\right)$.

De aceea, scopul principal al acestei teze este de a prezenta conceptele şi rezultatele ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple fixe, respectiv a punctelor triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Ca fundament pentru această nouă teorie, s-a prezentat un pachet minimal din teoria punctului fix, a punctelor cuplate fixe şi a punctelor cuplate coincidente.

Lucrarea este structurată în 4 capitole şi se încheie cu lista referinţelor bibliografice.

Capitolul I, intitulat **Elemente de bază din teoria punctului fix**, este un capitol ce cuprinde pachetul minimal de noţiuni şi rezultate din teoria punctului fix, exemple şi aplicaţii. Acest capitol este format din 4 paragrafe.

În **Paragraful 1.1: Noţiuni din teoria punctului fix** sunt prezentate 23 de definiţii în subparagrafele 1.1.1 şi 1.1.2, şi se referă atât la o mulţime nevidă X ce ne arată că este: **spaţiu metric, spaţiu metric complet, spaţiu ordonat, spaţiu parţial ordonat**, cât şi la un operator $F : X \to X$ ce ne arată că: are **punct fix**, este **continuu, Lipschitz, a-contracţie, φ-contracţie.** Subparagraful 1.1.3 conţine trei teoreme de punct fix [Principii de Contracţie], fundamentale pentru această lucrare. Aceste teoreme sunt: **Teorema Banach-Caccioppoli-Picard, Teorema Matkowski, Teorema Ran-Reurings**. Ultima teoremă este de fapt Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard aplicat pe spaţii metrice parţial ordonate.

Paragraful 1.2: Puncte cuplate fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate cuprinde trei subparagrafe. Subparagraful 1.2.1 conţine următoarele concepte: spaţiul metric produs $X \times X$ parţial ordonat, operatorul mixt-monoton $F : X \times X \to X$, punctului cuplat fix pentru F, compunerea simetrică a doi operatori şi proprietăţile acestora. În paragrafele 1.2.2 şi 1.2.3 sunt prezentate 8 Teoreme de existenţă şi unicitate a punctelor cuplate fixe pentru operatori mixt-monotoni şi continui, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, operatori de tip Picard [extensii sau generalizări ale condiţiei de contracţie] sau φ-contracţii. Dacă condiţia de continuitate nu este îndeplinită, atunci spaţiul X trebuie să îndeplinească o condiţie în plus, condiţie ce impune existenţa a două şiruri convergente din X, unul crescător şi unul descrescător. Pentru a avea unicitatea punctului fix cuplat, la ipotezele teoremelor de existenţă se impune o condiţie de comparare a elementelor din $X \times X$, condiţie legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat spaţiul $X \times X$.

Paragraful 1.3: Puncte cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Acest paragraf este structurat pe trei subparagrafe, în subparagraful 1.3.1 fiind prezentate conceptele: operator mixt-g-monoton, punct cuplat coincident şi comutativitatea operatorului F cu funcţia g. În paragrafele 1.3.2 şi

1.3.3 sunt redate 2 teoreme de existenţă şi 3 teoreme de unicitate a punctelor cuplate coincidente pentru operatori mixt-g-monotoni de tip φ-contracţie [Matkowski].

Paragraful 1.4: Exemple. Aplicaţii. În acest paragraf sunt prezentate exemple ce reflectă conceptele definite în acest capitol. Ca aplicaţie, s-a prezentat un studiu pentru existenţa şi unicitatea soluţiei problemei la limită cu valori periodice, aplicaţie a teoremei 1.2.34.

Contribuţiile autorului la acest capitol sunt: Exemplul 1.4.59; Exemplul 1.4.60; Exemplul 1.4.61; Exemplul 1.4.62.

Capitolele II şi III formează nucleul tezei şi sunt în totalitatea lor contribuţiile autorului. Aceste două capitole conţin **12 definiţii, 27 teoreme, 3 corolare, 4 propoziţii, 12 exemple şi o aplicaţie**. Fiecare capitol are trei paragrafe, care la rândul lor sunt divizate în subparagrafe.

Capitolul II Puncte triple fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate.

Paragraful 2.1 Puncte triple fixe pentru operatori mixt-monotoni: Primul subparagraf este dedicat definirii noilor concepte. Pentru $(X, d, \leq)$ un spaţiu metric complet parţial ordonat se definesc: spaţiul metric produs $X \times X \times X = X^3$ parţial ordonat, metrica pe acest spaţiu, iar pentru operatorul $F : X^3 \to X$ definim: proprietatea de mixt-monotonie, punctul triplu fix pentru operatori mixt-monotoni astfel: $(x, y, z) \in X^3$ este punct triplu fix dacă

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y), z = F(z, y, x).$$

În subparagrafele 2.1.2 respectiv 2.1.3 sunt prezentate teoreme de existenţă, respectiv teoreme de unicitate a punctelor fixe triple pentru operatori de tip Picard. Pentru a avea unicitatea punctului triplu fix, la ipotezele teoremelor de existenţă se introduce o condiţie suplimentară cu privire la compararea elementelor, ce trebuie să o îndeplinească spaţiul X^3.

Paragraful 2.2 Puncte fixe triple pentru operatori monotoni: Structura acestui paragraf este ca şi a paragrafului precedent, numai că operatorii sunt monotoni, iar definiţia punctului triplu fix este cu totul alta, şi anume: $(x, y, z) \in X^3$ este punct triplu fix pentru operatorul monoton F dacă

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z), z = F(z, y, x).$$

Rezultatele privind existenţa şi, respectiv, unicitatea punctelor triple fixe pentru operatori monotoni, sunt prezentate în subparagrafele 2.2 şi respectiv 2.3.

Paragraful 2.3 Exemple. Aplicaţii. În acest paragraf sunt prezentate exemple de operatori mixt-monotoni (monotoni) ce au unul sau mai multe puncte triple fixe.

Ca aplicaţie la teoria punctelor fixe, este prezentată rezolvarea ecuaţiei integrale:

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x(s)) + g(s,x(s)) + h(s,x(s))]ds + a(t), t \in [0,T], T > 0.$$

Considerăm spaţiul $X = C([0,T],\mathbb{R})$ a operatorilor continui definiţi pe $[0,T]$ cu valori reale, înzestrat cu metrica

$$d(u,v) = \max_{0\le t\le T} |u(t) - v(t)|\,, \text{ pentru } u, v \in X,$$

şi operatorul $F : X^3 \to X$ definit astfel:

$$F(x_1,x_2,x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x_1(s)) + g(s,x_2(s)) + h(s,x_3(s))]ds + a(t), t \in [0,T],$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in X$, îndeplineşte condiţiile Teoremei 2.1.15.

Capitolul III Puncte triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, capitol în care se introduce conceptul de punct triplu coincident atât pentru operatori mixt-g-monotoni, cât şi pentru operatori g-monotoni. Ca şi capitolul II, capitolul III este structurat pe trei paragrafe, iar primele două paragrafe sunt impărţite în câte trei subparagrafe.

Paragraful 3.1 Puncte triple coincidente pentru operatori mixt-g-monotoni. În subparagraful 3.1.1 sunt prezentate definiţiile: pentru mixt-g-monotonia operatorului $F : X^3 \to X$, unde $g : X \to X$ este o funcţie oarecare; pentru comutativitatea operatorului F cu funcţia g; pentru punct coincident triplu al operatorului F şi a funcţiei g dată astfel $(x,y,z) \in X^3$ este punct coincident triplu dacă

$$F(x,y,z) = g(x), F(y,x,y) = g(y), F(z,y,x) = g(z).$$

În subparagrafele 3.1.2 respectiv 3.1.3 sunt prezentate teoreme de existenţă, respectiv teoreme de unicitate pentru punctele triple coincidente.

Paragraful 3.2 Puncte triple coincidente pentru operatori g-monotoni. Structura acestui paragraf este la fel ca la paragraful 3.1, numai că apare diferenţă de conţinut, prin faptul că operatorii sunt g-monotoni şi implicit definiţia punctului triplu coincident este cu totul alta. Dacă $F : X^3 \to X$ este un operator g-monoton atunci $(x,y,z) \in X^3$ este punct triplu coincident pentru F şi g dacă

$$F(x,y,z) = g(x), F(y,x,z) = g(y), F(z,y,x) = g(z).$$

Exemple de puncte triple coincidente pentru operatorul F şi funcţia g sunt prezentate în paragraful 3.3.

Capitolul IV Concluzii În acest capitol sunt prezentate concluziile acestei teze şi sunt indicate câteva direcţii de cercetare, pornind de la rezultatele prezentate în lucrarea de faţă.

CAPITOLUL 1

Elemente de bază din teoria punctului fix

Teoria punctului fix se poate aplica pentru operatori definiţi pe diferite spaţii, cum ar fi: spaţii metrice, spaţii Banach, spaţii topologice, spaţii metrice parţial ordonate sau alte spaţii. În această lucrare vom aborda teoria punctului fix, în mod special pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. De aceea, acest capitol abordează teoria într-o formă minimală, strict necesară pentru capitolele II şi III.

1. Noţiuni din teoria punctului fix

În acest paragraf sunt prezentate noţiunile fundamentale din teoria punctului fix, precum şi trei principii de existenţă, existenţă şi unicitate a punctului fix. Lucrările bibliografice utilizate pentru redactarea acestui paragraf sunt: [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**46**], [**47**], [**57**], [**61**], [**83**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**].

1.1. Concepte de bază

Fie X o mulţime nevidă şi $F : X \to X$ un operator. Vom nota cu:
$\mathcal{P}(X) = \{Y \,|Y \subset X\}$ -mulţimea submulţimilor lui X;
$P(X) = \{Y \,|Y \subset X\}$ -mulţimea submulţimilor nevide lui X;
$F^0 = 1_X, F^1 = F, F^2 = F \circ F, ..., F^n = F \circ F^{n-1}$ -iteratele operatorului F;
$I(F) = \{A \in P(X) \,|F(A) \subseteq A\}$ -mulţimea submulţimilor invariante în raport cu F;

Definiţia 1.1.1. *Un element $x \in X$ se numeşte punct fix pentru operatorul F dacă $F(x) = x$ şi vom nota cu $F_F = \{x \in X \,|F(x) = x\}$ -mulţimea punctelor fixe a lui F.*

Definiţia 1.1.2. *Fie X, Y două mulţimi nevide şi $F, G : X \to Y$ doi operatori. Un element $x \in X$ se numeşte punct de coincidenţă lui F şi G dacă $F(x) = G(x)$. Vom nota prin*

$$C(F, G) = \{x \in X \,|F(x) = G(x)\}$$

mulţimea punctelor de coincidenţă .

Definiţia 1.1.3. *Fie X o mulţime nevidă. Numim **metrică** pe X, funcţia $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ ce îndeplineşte condiţiile:*

i. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$;
ii. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$;
iii. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

Definiţia 1.1.4. *Cuplul* (X, d) *se numeşte* ***spaţiu metric****, dacă* d *este o metrică pe mulţimea nevidă* X*.*

Definiţia 1.1.5. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Un şir* $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \subset X$ *se numeşte:*

a. ***fundamental*** *sau* ***Cauchy*** *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \text{ şi pentru orice } p \in \mathbb{N}.$$

b. ***convergent*** *la* $\ell \in X$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$d(x_n, \ell) < \varepsilon \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$$

Observaţia 1.1.6. *Într-un spaţiu metric orice şir convergent este fundamental, dar reciproca nu este adevărată în general.*

Definiţia 1.1.7. *Un spaţiu metric* (X, d) *se numeşte* ***complet*** *dacă orice şir fundamental este convergent.*

Referitor la convergenţa unui şir de operatori, pe parcursul acestei lucrări vom folosi următoarele definiţii:

Definiţia 1.1.8. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric şi* $F_n, F : X \to X, n \in \mathbb{N}$*. Şirul* $\{F_n\}_{n\geqslant 0}$ *se numeşte:*

a. ***uniform convergent*** *la* F *şi notăm* $F_n \overset{u}{\to} F$ *când* $n \to \infty$*, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *şi orice* $x \in X$ *avem :*

$$d(F_n(x), F(x)) < \varepsilon.$$

b. ***converge punctual*** *la* F *şi notăm* $F_n \overset{p}{\to} F$ *când* $n \to \infty$*, dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$*, orice* $x \in X$ *există* $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geqslant N(\varepsilon, x)$ *avem*

$$d(F_n(x), F(x)) < \varepsilon.$$

Definiţia 1.1.9. *Fie* (X, D) *un spaţiu metric şi operatorul* $F : X \to X$*. Spunem că operatorul* F *este Lipschitz (sau L-Lipschitz) dacă există* $L > 0$ *astfel încât:*

$$d(F(x), F(y)) \leq Ld(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Definiţia 1.1.10. *Fie* (X, D) *un spaţiu metric şi operatorul* $F : X \to X$*. Spunem că operatorul* F *este contracţie (sau a-contracţie, sau Picard, sau Banach) dacă există* $a \in [0, 1)$ *astfel încât:*

$$d(F(x), F(y)) \leq ad(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Definiţia 1.1.11. *Funcţia* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *se numeşte de comparaţie dacă verifică:*

$$(i)\, \varphi \text{ este crescătoare, adică, pentru oricare } t_1 \leq t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2), t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+;$$

$$(ii)\, \varphi(t) < t, \text{ pentru orice } t > 0; (iii)\, \varphi(0) = 0; (iv)\, \varphi^n(t) \to 0, \text{ când } n \to \infty, t > 0.$$

Definiţia 1.1.12. *Fie (X, D) un spaţiu metric , un operator $F : X \to X$ se numeşte φ-contracţie (Matkowski) dacă există o funcţie de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât:*

$$d(F(x), F(y)) \leq \varphi\left(d(x, y)\right), \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Definiţia 1.1.13. *Fie X o mulţime nevidă şi $F : X \to X$ un operator. Pentru orice $x_0 \in X$, şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definit astfel:*

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0), n \geq 1,$$

se numeşte şirul aproximaţiilor succesive al lui F cu valoare iniţială x_0 sau iteraţia Picard a lui F începând cu x_0.

1.2. Mulţimi parţial ordonate. Spaţii metrice parţial ordonate

Definiţia 1.1.14. *Fie X o mulţime nevidă. Dacă R este o submulţime a produsului cartezian $X \times X$, atunci perechea (X, R) se numeşte relaţie binară pe X. Dacă $x, y \in X$ sunt în relaţia R, atunci vom nota xRy sau $(x, y) \in R$.*

Definiţia 1.1.15. *Fie R o relaţie binară pe X. Relaţia R se numeşte:*

*a. **reflexivă** dacă $xRx, \forall\, x \in X$;*
*b. **tranzitivă** dacă xRy şi yRz atunci xRz;*
*c. **simetrică** dacă xRy atunci yRx;*
*d. **antisimetrică** dacă xRy şi yRx atunci $x = y$.*

Definiţia 1.1.16. *O relaţie binară pe X reflexivă, tranzitivă şi simetrică se numeşte **relaţie de echivalenţă**.*

Definiţia 1.1.17. *Fie R o relaţie de echivalentă pe X.*

a. Mulţimea notată

$$[x]_R \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \,|yRx\}$$

*se numeşte **clasa de echivalenţă** a elementului $x \in X$.*

b. Mulţimea notată

$$X\Big|_R \stackrel{\text{def}}{=} \{[x]_R \,|x \in X\}$$

*se numeşte **mulţime factor** sau **mulţime cât** a lui X în raport cu relaţia R.*

Definiţia 1.1.18. *O relaţie binară pe X reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică se numeşte **relaţie de ordine** sau relaţie de ordine parţială şi, în acest caz, perechea (X, R) se numeşte mulţime ordonată sau mulţime parţial ordonată.*

Observaţia 1.1.19. *Dacă R este o relaţie de ordine pe mulţimea X vom folosi notaţiile $x \leqslant y$ care va însemna xRy, $x \geqslant y$ pentru yRx, respectiv $x < y$ pentru xRy şi $x \neq y$, unde $x, y \in X$.*

Definiţia 1.1.20. *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată. Două elemente $x, y \in X$ se numesc* ***comparabile*** *dacă $x \leqslant y$ sau $x \geqslant y$. În caz contrar, ele se numesc* ***incomparabile****. O mulţime ordonată în care orice două elemente sunt comparabile se numeşte mulţime* ***total ordonată****.*

Definiţia 1.1.21. *Fie $(X, \leqslant)$ o mulţime ordonată şi $A \subseteq X$. Atunci mulţimea A se numeşte:*

a. ***mărginită superior****, dacă există $M \in X$ astfel încât $x \leq M$, pentru orice $x \in A$;*
b. ***mărginită inferior****, dacă există $m \in X$ astfel încât $m \leq x$, pentru orice $x \in A$;*
c. ***mărginită*** *, dacă este mărginită superior şi inferior.*

Definiţia 1.1.22. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Dacă " $\leq$ " este o relaţie de ordine parţială pe X, atunci tripletul $(X, d, \leqslant)$ se numeşte spaţiu metric parţial ordonat.*

1.3. Teoreme de punct fix

În acest subparagraf vom prezenta trei teoreme de punct fix, fundamentale pentru această teză. Prima teoremă este de fapt Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard, apărut în lucrarea [**17**], principiu pe care s-a dezvoltat Teoria de punct fix în spaţii metrice. A doua teoremă este principiul de φ-contracţie [Matkowski], iar a treia este o teoremă de punct fix în spaţii parţial ordonate dată de Ran-Reurings în lucrarea [**108**].

Teorema 1.1.23 (Principiul Contracţiei Banach-Caccioppoli-Picard, [17]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $F : X \to X$ un operator şi constanta $a \in [0, 1)$, astfel încât:*

$$d(F(x), F(y)) \leq ad(x, y) \forall x, y \in X. \tag{1.8}$$

Atunci:

1.) *F are un unic punct fix $x^* \in X$;*
2.) *Iteraţia Picard dată de definiţia 1.1.13 converge la x^* pentru orice $x_0 \in X$;*
3.) *Au loc estimările:*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1), n \geq 0 \tag{1.9}$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_{n-1}, x_n), n \geq 1 \tag{1.10}$$

4.) *Ordinul de convergenţă este dat de:*

$$d(x_n, x^*) \leq a^n d(x_0, x^*), n \geq 0. \tag{1.11}$$

Demonstraţie: Pentru a dovedi existenţa punctului fix, vom arăta că, pentru orice $x_0 \in X$, iteraţia Picard este un şir Cauchy. Unicitatea o vom dovedi presupunând că există două puncte fixe $x^*, y^* \in F_F, x^* \neq y^*$, deoarece, $0 \leq a < 1$, obţinem contradicţia

$$d(x^*, y^*) = d(F(x^*), F(y^*)) \leq ad(x^*, y^*) < d(x^*, y^*).$$

Folosind relaţia (1.8), avem

$$d(x_1, x_2) = d(F(x_0), F(x_1)) \leq ad(x_0, x_1),$$

şi prin inducţie se demonstrează că

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a^n d(x_0, x_1), n = 0, 1, 2, ... \tag{1.12}$$

Atunci, pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$ cu $p > 0$, avem

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + ... + d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1). \tag{1.13}$$

Deoarece $0 \leq a < 1$, atunci trecând la limită în relaţia (1.13), avem $a^n \to 0$, când $n \to \infty$, ceea ce dovedeşte că şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy. (X,d) fiind un spaţiu metric complet, atunci şirul $\{x_n\}$ este convergent la $x^* \in X$. Pe de altă parte, orice operator Lipschitzian este continuu. Prin urmare, avem

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x^*).$$

Acest fapt arată că pentru orice $x_0 \in X$, iteraţia Picard $\{x_n\}$ converge în X la unicul punct fix x^* al lui F, ceea ce dovedeşte relaţiile 1.) şi 2.).

Relaţia (1.13) se poate scrie şi sub forma

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + ... + d(x_n, x_{n+1}) \leq a\frac{1-a^p}{1-a} d(x_0, x_1).$$

Trecând la limită când $p \to \infty$, obţinem 3.). Pentru a demonstra 4.), vom pleca de la relaţia (1.8), astfel:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq ad(x_n, x_{n-1}),$$

iar prin inducţie obţinem

$$d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq a^k d(x_n, x_{n-1}), k > 0,$$

deci

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (a + a^2 + ... + a^p d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{a}{1-a} d(x_n, x_{n-1}).$$

Dacă $p \to \infty$, atunci obţinem relaţia 4.). $\square$

Teorema 1.1.24 (**Principiul Matkowski de φ-Contracţie** , [**122**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, $F : X \to X$ un operator şi $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ o funcţie de comparaţie. Dacă*

$$d(F(x), F(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru orice } x, y \in X,$$

atunci F este un operator Picard.

Demonstraţie: Fie $x_0 \in X$ şi iteraţia $\{x_n\}$ definită astfel: $x_n = F^n(x_0), \forall n \geq 0$, atunci

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \varphi(d(x_n, x_{n-1})) \leq ... \leq \varphi^n(d(x_0, x_1))$$

şi folosind proprietatea (iv) din definiţia 1.1.11, obţinem că $d(x_{n+1}, x_n) \to 0$ când $n \to \infty$ şi implicit

$$d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) \to 0, \text{ când } n \to \infty,$$

ceea ce înseamnă că x_0 este asimtotic regular în raport cu F. De fapt, dacă orice $x_0 \in X$ este asimtotic regular în raport cu F, atunci F este asimtotic regular.

Fie $\epsilon > 0$ şi $\delta(\epsilon) = \epsilon - \varphi(\epsilon)$. Atunci arătăm că $B(x; \epsilon)$ este invariantă în raport cu F. Fie $y \in B(x; \epsilon)$, atunci

$$d(F(y), x) \leq d(F(x), F(y)) + d(x, F(x)) \leq \varphi(d(x, y)) + d(x, F(x)) \leq \varphi(\epsilon) + d(x, F(x)).$$

Deoarece, $d(x, F(x)) \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow d(F(y), x) \leq \varphi(\epsilon) + \epsilon - \varphi(\epsilon) = \epsilon$, fapt ce arată că $F(y) \in B(x; \epsilon)$, adică $B(x; \epsilon)$ este invariantă în raport cu F.

Din condiţia de φ-contracţie a lui F, rezultă că şirul $\{F^n(x_0)\}$ este un şir Cauchy pentru orice $x_0 \in X$. Pentru orice $\epsilon > 0$ dat, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) < \delta(\epsilon) \Rightarrow F^n(x_0) \in B(F^n(x_0), \epsilon) \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Deoarece (X, d) este spaţiu metric complet, atunci şirul $\{F^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ este convergent şi fie $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} F^n(x_0)$. Din condiţia (ii) din definiţia 1.1.11, se deduce imediat că φ este o funcţie continuă. Prin urmare

$$x^* = F(\lim_{n \to \infty} F(x_{n-1})) = F(x^*),$$

ceea ce arată că x^* este punct fix pentru operatorul F.

Presupunem că există $y^* \in X$ încă un punct fix pentru F cu $y^* \neq x^*$. Cu această presupunere şi folosind condiţia de φ-Contracţie, obţinem contradicţia

$$0 < d(x^*, y^*) = d(F(x^*), F(y^*)) \leq \varphi(d(x^*, y^*)) < d(x^*, y^*).$$

$\square$

Teorema 1.1.25 (**Ran-Reurings** [**108**]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet parţial ordonat, astfel încât orice $x, y \in X$ au o limită inferioară şi o limită superioară. Dacă $F : X \to X$ este un operator continuu şi monoton (crescător sau descrescător), astfel încât:*

$$\text{(1.14)} \qquad \textit{există } 0 < c < 1 \textit{ cu } d(F(x), F(y)) \leq c d(x, y), \forall x \geq y,$$

$$\text{(1.15)} \qquad \textit{există } x_0 \in X \textit{ cu } x_0 \leq F(x_0) \textit{ sau } x_0 \geq F(x_0),$$

atunci F are un singur punct fix x^*. În plus, pentru orice $x \in X$, avem

$$\lim_{n \to \infty} F^n(x) = x^*.$$

Demonstraţie: Fie $x_0 \in X$ astfel încât $x_0 \leq F(x_0)$ sau $x_0 \geq F(x_0)$. Din proprietatea de monotonie a operatorului F deducem că $F^n(x_0) \leq F^{n+1}(x_0)$ sau $F^n(x_0) \geq F^{n+1}(x_0)$, pentru orice $n = 0, 1, 2, ...$ Folosind condiţia de contracţie (1.14), avem

$$d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) \leq cd(F^n(x_0), F^{n-1}(x_0)).$$

Prin urmare, folosind inducţia obţinem

$$d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) \leq c^n d(F(x_0), x_0).$$

Acum, folosind demonstraţia de la Principiul Contracţiei lui Banach, vom dovedi că $\{F^n(x_0)_{n\geq 0}\}$ este şir Cauchy. Fie $n < m$. Atunci

$$d(F^n(x_0), F^m(x_0)) \leq d(F^n(x_0), F^{n+1}(x_0)) + ... + d(F^{m-1}(x_0), F^m(x_0))$$

$$\leq (c^n + c^{n+1} + ... + c^{m-n-1})d(F(x_0), x_0) = c^n \frac{1 - c^{m-n-1}}{1 - c} d(F(x_0), x_0).$$

Deci $\{F^n(x_0)_{n\geq 0}\}$ este şir Cauchy. Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci limita şirului $\{F^n(x_0)_{n\geq 0}\}$ este în X, deci

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x^*.$$

Deoarece F este continuu, x^* este punct fix pentru F.

Pentru a demonstra unicitatea punctului fix pentru operatorul F ne vom folosi de relaţiile:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x^* \text{ şi } d(F^n(x), F^n(x_0)) \leq c^n d(x, x_0).$$

Trecând la limită în ultima relaţie, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \lim_{n\to\infty} F^n(x_0) = x^*.$$

În final, fie $x \in X$ arbitrar, şi fie x_1, respectiv x_2, limita superioară, respectiv limita inferioară pentru x şi x_0. Atunci

$$x_1 \geq x \geq x_2 \text{ sau } x_1 \geq x_0 \geq x_2. \tag{1.16}$$

Folosind relaţia (1.16), obţinem

$$F^n(x_1) \geq F^n(x) \geq F^n(x_2) \text{ sau } F^n(x_1) \geq F^n(x_0) \geq F^n(x_2) \tag{1.17}$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_1) = \lim_{n\to\infty} F^n(x_2) = x^*. \tag{1.18}$$

Din relaţiile (1.17) şi (1.18) obţinem $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = x^*$. Deci Teorema este demonstrată.

□

2. Puncte cuplate fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

În acest paragraf vom prezenta teoria de bază a punctelor fixe cuplate, teorie introdusă de Bhaskar şi Lakshmintham în lucrarea [**62**] în anul 2006. Această lucrare este fundament atât pentru foarte multe lucrări ştiinţifice, cât şi pentru această teză. Acest paragraf conţine trei subparagrafe în care am prezentat atât definiţii pentru: spaţiul produs $X \times X$ parţial ordonat, operatorul mixt-monoton $F : X \times X \to X$, punctul cuplat fix pentru operatorul F, compunerea simetrică a operatorilor F, G şi proprietăţile acestuia [subparagraful 1.2.1], cât şi teoreme de existenţă a punctelor cuplate fixe pentru operatorul F [subparagraful 1.2.2] şi teoreme de unicitate pentru puncte cuplate fixe a operatorului F [subparagraful 1.2.3].

Referinţele bibliografice consultate pentru redactarea acestui subparagraf sunt: [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**62**],[**19**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**96**], [**64**], [**97**], [**123**], [**124**], [**93**].

2.1. Definiţii

Definiţia 1.2.26. [**62**] *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Spaţiul produs $X \times X$ este parţial ordonat dacă:*

$$\textit{pentru}\,(x, y)\,,(u, v) \in X \times X, (u, v) \leq (x, y) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v.$$

Definiţia 1.2.27. [**62**] *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi operatorul $F : X \times X \to X$. Spunem că F este mixt-monoton dacă $F(x, y)$ este monoton crescător în x şi este monoton descrescător în y, pentru orice $x, y \in X$, adică*

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$$

şi

$$\forall y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \geq F(x, y_2)\,.$$

Definiţia 1.2.28. [**62**] *Spunem că un element $(x, y) \in X \times X$ este punct fix cuplat pentru operatorul F dacă*

$$F(x, y) = x, F(y, x) = y.$$

Definiţia 1.2.29. [**123**] *Fie X, Y, Z mulţimi nevide şi $F : X \times X \to Y$, $G : Y \times Y \to Z$, doi operatori. Se numeşte compunere simetrică a lui F cu G (s-compunere), operatorul*

$$G * F : X \times X \to Z, (G * F)(x, y) = G(F(x, y), F(y, x))\,(x, y \in X).$$

Pentru mulţimea nevidă X, notăm cu P_x funcţia proiecţie definită astfel:

$$P_x : X \times X \to X, P(x, y) = x \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Compunerea simetrică are următoarele proprietăţi:

Propoziţia 1.2.30. [**123**] *(Asociativitatea). Dacă* $F : X \times X \to Y, G : Y \times Y \to Z$ *şi*

$$H : Z \times Z \to W, \text{ atunci } (H * G) * F = H * (G * F).$$

Propoziţia 1.2.31. [**123**] *(Element neutru). Dacă* $F : X \times X \to Y$, *atunci*

$$F * P_x = P_y * F = F.$$

Propoziţia 1.2.32. [**123**] *(Mixt Monotonă). Dacă* $(X, \leq), (Y, \leq), (Z, \leq)$ *sunt spaţii parţial ordonate şi funcţiile* $F : X \times X \to Y, G : Y \times Y \to Z$ *sunt mixt-monotone, atunci* $G * F$ *este mixt monotonă.*

Propoziţia 1.2.33. [**123**] *Dacă* $(X, \leq)$ *este spaţiu parţial ordonat şi* F *este mixt-monotonă, atunci* $F^n = F * F^{n-1} = F^{n-1} * F$ *este mixt-monotonă pentru orice* n.

2.2. Teoreme de existenţă

Teorema 1.2.34 (Bhaskar-Lakshmikantham, [62]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică* d *pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \to X$ *un operator continuu şi mixt-monoton. Presupunem că există un* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d\left(F(x, y), F(u, v)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(x, u) + d(y, v)\right] \text{ pentru } x \geq u, y \leq v. \tag{1.19}$$

Dacă există $x_0, y_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0),$$

atunci există $x, y \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y) \text{ şi } y = F(y, x).$$

Demonstraţie: Deoarece

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) = x_1 \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0) = y_1,$$

notăm cu

$$x_2 = F(x_1, y_1) = F\left(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)\right) = F^2(x_0, y_0)$$

şi

$$y_2 = F(y_1, x_1) = F\left(F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)\right) = F^2(y_0, x_0).$$

Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F avem

$$x_2 = F^2(x_0, y_0) = F(x_1, y_1) \geq F(x_0, y_0) = x_1$$

şi

$$y_2 = F^2(y_0, x_0) = F(y_1, x_1) \leq F(y_0, x_0) = y_1.$$

Mai mult, pentru $n = 1, 2, ...$, avem,

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) = F\left(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)\right) = F^{n+1}(x_0, y_0)$$

şi

$$y_{n+1} = F(y_n, x_n) = F\left(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)\right) = F^{n+1}(y_0, x_0).$$

Se poate arăta cu uşurinţă că inegalităţile următoare sunt adevărate

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ... \text{ şi } y_0 \geq y_1 \geq ... \geq y_n \geq .... \tag{1.20}$$

Acum, se poate afirma că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq \frac{k^n}{2}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right], \tag{1.21}$$

$$d\left(y_{n+1}, y_n\right) \leq \frac{k^n}{2}\left[d(y_1, y_0) + d(x_1, x_0)\right]. \tag{1.22}$$

Într-adevăr, pentru $n = 1$, avem

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0),$$

de unde obţinem

$$d\left(x_2, x_1\right) = d\left(F(x_1, y_1), F(x_0, y_0)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right],$$

şi

$$d\left(y_2, y_1\right) = d\left(F(y_1, x_1), F(y_0, x_0)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(y_1, y_0) + d(x_1, x_0)\right].$$

Acum, presupunem inegalităţile (1.21) şi (1.22) adevărate. Folosind monotonia şirurilor (1.20), adică $x_{n+1} \geq x_n$ şi $y_n \geq y_{n+1}$ şi condiţia de contracţie (1.19), obţinem

$$\begin{aligned} d\left(x_{n+2}, x_{n+1}\right) = d\left(F(x_{n+1}, y_{n+1}), F(x_n, y_n)\right) &\leq \frac{k}{2}\left[d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n)\right] \\ &\leq \frac{k^{n+1}}{2}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right] \end{aligned}$$

şi

$$d\left(y_{n+2}, y_{n+1}\right) \leq \frac{k^{n+1}}{2}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right].$$

Cu ajutorul acestor inegalităţi, arătăm că $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt şiruri Cauchy. Într-adevăr, fie $m \geq n$, atunci

$$\begin{aligned} d\left(x_m, x_n\right) \leq d\left(x_m, x_{m-1}\right) + ... + d\left(x_{n+1}, x_n\right) &\leq \frac{k^{m-1} + ... + k^n}{2}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right] \\ = \frac{k^n - k^m}{2(1-k)}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right] &< \frac{k^n}{2(1-k)}\left[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0)\right]. \end{aligned}$$

Similar, se arată că $\{y_n\}$ este şir Cauchy. Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x, y \in X$, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x, \lim_{x\to\infty} y_n = y.$$

În final arătăm că $x = F(x, y)$ şi $y = F(y, x)$. Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuă în (x, y), pentru $\frac{\epsilon}{2} > 0$ fixat, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) < \delta \Rightarrow d\left(F(x, y), F(u, v)\right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x, \lim_{x\to\infty} y_n = y,$$

pentru $\eta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\right\} > 0$, există n_0, m_0, astfel încât pentru $n \geq n_0, m \geq m_0$, avem

$$d(x_n, x) < \delta, d(y_n, y) < y.$$

Acum, pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq \max\{n_0, m_0\}$,

$$d(F(x,y), x) \leq d(F(x,y), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x)$$
$$= d(F(x,y), F(x_n, y_n)) + d(x_{n+1}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \eta \leq \epsilon.$$

Acest lucru implică faptul că $x = F(x,y)$. Similar, se arată că $y = F(y,x)$. □

Dacă eliminăm condiţia de continuitate a lui F şi introducem o condiţie suplimentară lui X, consecinţele teoremei rămân aceleaş.

Teorema 1.2.35 (Bhaskar-Lakshmikantham, [62]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \to X$ un operator mixt-monoton. Presupunem că există un $k \in [0,1)$, astfel încât*

$$d(F(x,y), F(u,v)) \leq \frac{k}{2}[d(x,u) + d(y,v)] \text{ pentru } x \geq u, y \leq v.$$

Presupunem că X are următoarele proprietăţi:

$$(i) \text{ dacă există şirul crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii) \text{ dacă există şirul descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0),$$

atunci există $x, y \in X$, astfel încât

$$x = F(x,y) \text{ şi } y = F(y,x).$$

Demonstraţie: Din teorema 1.2.34, rezultă că există $x, y \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

şi trebuie să demonstrăm că $x = F(x,y)$ şi $y = F(y,x)$.
Fie $\epsilon > 0$. Atunci există $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_1, m \geq n_2$, avem

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{3}, d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Folosind din ipoteză condiţiile $(i), (ii)$ cu $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, obţinem

$$d(F(x,y), x) \leq d(F(x,y), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) = d(F(x,y), F(x_n, y_n)) + d(x_{n+1}, x)$$
$$\leq \frac{k}{2}[d(x, x_n) + d(y, y_n)] + d(x_{n+1}, x) \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) + d(x_{n+1}, x)$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Acest fapt presupune consecinţa $F(x, y) = x$. Similar, se arată că $d(F(y, x), y) \leq \epsilon$ ceea ce implică faptul că $F(y, x) = y$. $\square$

Teorema 1.2.36 (Luong-Thuan, [**93**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât $(X, \leq)$ este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \to X$ un operator continuu şi mixt-monoton. Presupunem că există un $k, l > 0$ cu $k + l < 1$, astfel încât*

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq kd(x, u) + ld(y, v) \text{ pentru } x \geq u, y \leq v. \tag{1.23}$$

Dacă există $x_0, y_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0),$$

atunci există $x, y \in X$, astfel încât

$$x = F(x, y) \text{ şi } y = F(y, x).$$

Demonstraţie: Deoarece

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) = x_1 \text{ şi } y_0 \geq F(y_0, x_0) = y_1,$$

notăm cu

$$x_2 = F(x_1, y_1) = F(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)) = F^2(x_0, y_0)$$

şi

$$y_2 = F(y_1, x_1) = F(F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)) = F^2(y_0, x_0).$$

Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F avem

$$x_2 = F^2(x_0, y_0) = F(x_1, y_1) \geq F(x_0, y_0) = x_1$$

şi

$$y_2 = F^2(y_0, x_0) = F(y_1, x_1) \leq F(y_0, x_0) = y_1.$$

Atunci, pentru $n \geq 1$ avem

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \text{ şi } y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) \tag{1.24}$$

Se poate arăta cu uşurinţă că inegalităţile următoare sunt adevărate:

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ... \text{ şi } y_0 \geq y_1 \geq ... \geq y_n \geq .... \tag{1.25}$$

În relaţia (1.23), dacă luăm $x = x_1, y = y_1, v = v_1, u = u_1$, atunci obţinem

$$d(x_1, x_2) \leq (k^2 + l^2)d(x_0, x_1) + 2kld(y_0, y_1) \tag{1.26}$$

şi

$$d(y_1, y_2) \leq 2kld(x_0, x_1) + (k^2 + l^2)d(y_0, y_1). \tag{1.27}$$

Pentru a simplifica calculul, notăm

$$D_n^x = d(x_{n-1}, x_n), D_n^y = d(y_{n-1}, y_n), n \geq 1.$$

Atunci relaţiile (1.26) şi (1.27) se pot scrie astfel:

$$D_2^x \leq (k^2 + l^2)D_1^x + 2klD_1^y \text{ şi } D_2^y \leq 2klD_1^x + (k^2 + l^2)D_1^y,$$

iar în caz general avem

$$\begin{pmatrix} D_{n+1}^x \\ D_{n+1}^y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} k & l \\ l & k \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} D_1^x \\ D_1^y \end{pmatrix}, n \geq 1.$$

Se arată uşor că

$$\begin{pmatrix} k & l \\ l & k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix} \text{ unde}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(k+l)^n + (k-l)^n\right], b_n = \frac{1}{2}\left[(k+l)^n - (k-l)^n\right], n \geq 1$$

şi $a_n + b_n = (k+l)^n = \alpha^n < \alpha < 1$. Prin urmare, deducem că

$$D_{n+1}^x \leq a_n D_1^x + b_n D_1^y \text{ şi } D_{n+1}^y \leq b_n D_1^x + a_n D_1^y. \tag{1.28}$$

Deoarece $k + l < 1$ şi $|k - l| \leq k + l < 1$, deducem că

$$a_n < 1 \text{ şi } b_n < 1, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

Folosind relaţiile (1.28), arătăm că şirurile $\{x_n\}$ şi $\{y_n\}$ sunt Cauchy. Vom demonstra doar pentru şirul $\{x_n\}$ deoarece pentru şirul $\{y_n\}$ demonstraţia este similară.

Fie $m > n$ numere naturale. Atunci

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) = D_m^x + D_{m-1}^x + ... + D_{n+1}^x$$

$$\leq [a_n + ... + a_{m-1}]D_1^x + [b_n + ... + b_{m-1}]D_1^y$$

$$\leq (\alpha^n + ... + \alpha^{m-1})D_1^x + (\alpha^n + ... + \alpha^{m-1})D_1^y = (\alpha^n + ... + \alpha^{m-1})(D_1^x + D_1^y)$$

$$= \alpha^n(1 + \alpha + ... + \alpha^{m-n-1})(D_1^x + D_1^y) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha}(D_1^x + D_1^y).$$

Deoarece (X, d) este spaţiu metric complet, atunci există $x, y \in X$, astfel încât

$$\lim_{x \to \infty} x_n = x, \lim_{x \to \infty} y_n = y.$$

Demonstrăm că $F(x, y) = x$ şi $F(y, x) = y$. Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuu, pentru $\frac{\epsilon}{2}$, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) < \delta \Rightarrow d(F(x, y), F(u, v)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Deoarece $x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \to x$ şi $y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) \to y$, când $n \to \infty$, pentru $\eta = \min\left\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\right\} > 0$, atunci există n_0, m_0, astfel încât pentru $n \geq n_0, m \geq m_0$ avem

$$d(x, x_n) < \eta \text{ şi } d(y, y_n) < \eta.$$

Acum, luăm $k_0 = \max\{n_0, m_0\}$. Atunci, pentru orice n număr natural cu $n \geq k_0$, avem

$$d(F(x,y),x) \leq d(F(x,y),x_{n+1}) + d(x_{n+1},x)$$

$$= d(F(x,y),F(x_n,y_n)) + d(x_{n+1},x) < \frac{\epsilon}{2} + \eta \leq \epsilon.$$

Acest fapt implică faptul că $F(x,y) = x$. Similar se arată că $F(y,x) = y$. □

Teorema 1.2.37 (**Harjani-Lopez-Sadarangani,** [**64**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \to X$ un operator mixt-monoton pe X şi continu. Presupunem că există funcţiile $\varphi, \psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$, $\lim\limits_{r \to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$ şi ψ continuă şi crescătoare, $\psi(t) = 0$ dacă $t = 0$, astfel încât*

$$\varphi(d(F(x,y),F(u,v))) \leq \varphi(max(d(x,u),d(y,v))) - \phi(max(d(x,u),d(y,v))),$$

pentru orice $x, y, u, v \in X$ cu $x \geq u$ şi $y \leq v$.

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ cu

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } g(y_0) \geq F(y_0, x_0),$$

atunci F are punct cuplat fix.

Demonstraţie: Fie şirurile $\{x_n\}, \{y_n\}$ definite astfel:

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \text{ şi } y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}), \text{ pentru } n > 0.$$

Vom prezenta pe scurt această demonstraţie, astfel:

(1.) Se demonstrează prin inducţie matematică faptul că $x_n \leq x_{n+1}$ şi $y_n \geq y_{n+1}$;

(2.)Folosindu-se condiţia de contracţie şi monotonia celor două şiruri, se demonstrează că:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y_{n+1}) = 0;$$

(3.) Se arată că şirurile $\{x_n\}, \{y_n\}$ sunt şiruri Cauchy;

(4.) Deoarece X este un spaţiu metric complet, există $x, y \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ şi } \lim_{n\to\infty} y_n) = y$$

şi folosindu-se de faptul că operatorul F este continuu, se arată cu uşurinţă că

$$F(x,y) = x \text{ şi } F(y,x) = y.$$

□

2.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

Pentru a obţine unicitatea punctului cuplat fix, se va înzestra spaţiul produs cu o propietate în plus, proprietate legată de operaţia de ordine de pe acest spaţiu. Această proprietate poate fi de forma:

(1.29) Oricare ar fi două perechi $(x, y), (x_1, y_1) \in X \times X,$ există perechea

$(u, v) \in X \times X$ care este comparabilă cu fiecare dintre perechile $(x, y), (x_1, y_1)$;

(1.30) Pentru oricare cuplu $(x, y) \in X \times X,$ există o pereche formată cu

elemente din X care sunt limita superioară sau inferioară pentru x şi y.

(1.31) x_0, y_0 din ipotezele teoremelor de existenţă, sunt comparabile .

Teorema 1.2.38 (**Bhaskar-Lakshmikantham,** [**62**])**.** *Dacă adăugăm condiţia* (1.29) *la ipoteza teoremei 1.2.34, atunci operatorul F are un punct fix cuplat unic.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*) \in X \times X$ este încă un punct fix cuplat pentru operatorul F, atunci arătăm că

$$d\left((x, y), (x^*, y^*)\right) = 0, \text{ unde } x = \lim_{x \to \infty} x_n, y = \lim_{x \to \infty} y_n.$$

Considerăm două cazuri:
Cazul 1 : Dacă (x, y) este comparabilă cu (x^*, y^*) , respectând relaţia de ordine pe $X \times X$, atunci, pentru oricare $n = 1, 2, ...$

$$(F^n(x, y), F^n(y, x)) = (x, y) \text{ şi } (F^n(x^*, y^*), F^n(y^*, x^*)) = (x^*, y^*)$$

sunt comparabile. De asemenea,

$$\begin{gathered} d\left((x, y), (x^*, y^*)\right) = d(x, x^*) + d(y, y^*) \\ = d\left((F^n(x, y), F^n(x^*, y^*))\right) + d\left((F^n(y, x), F^n(y^*, x^*))\right) \\ \leq k^n \left[d(x, x^*) + d(y, y^*)\right] = k^n d\left((x, y), (x^*, y^*)\right). \end{gathered}$$

Acest fapt implică faptul că $d\left((x, y), (x^*, y^*)\right) = 0$.
Cazul 2 : Dacă (x, y) nu este comparabilă cu (x^*, y^*) , atunci există cuplu format din limita superioară şi limita inferioară $(u, v) \in X \times X$ pentru (x, y) şi (x^*, y^*) . Atunci pentru orice $n = 1, 2, ..., (F^n(u, v), F^n(v, u))$ este comparabil cu

$$(F^n(x, y), F^n(y, x)) = (x, y) \text{ şi } (F^n(x^*, y^*), F^n(y^*, x^*)) = (x^*, y^*).$$

De asemenea,

$$\begin{gathered} d\left((x, y), (x^*, y^*)\right) \leq d\left((F^n(x, y), F^n(y, x)), (F^n(x^*, y^*), F^n(y^*, x^*))\right) \\ \leq d\left((F^n(x, y), F^n(y, x)), (F^n(u, v), F^n(v, u))\right) \\ + d\left((F^n(u, v), F^n(v, u)), (F^n(x^*, y^*), F^n(y^*, x^*))\right) \end{gathered}$$

$$\leq k^n \left[d(x,u) + d(y,v) + d(u,x^*) + d(v,y^*)\right] \to 0, \text{ atunci când } n \to \infty.$$

Deci, în final obţinem $d\left((x,y),(x^*,y^*)\right) = 0$. □

Teorema 1.2.39 (**Bhaskar-Lakshmikantham,** [**62**]). *În condiţiile Teoremei 1.2.34 (respectiv ale Teoremei 1.2.35), presupunem că fiecare pereche formată din elemente din X, au o limită superioară sau o limită inferioară în X. Atunci $x = y$.*

Demonstraţie: Cazul 1 : Dacă x este comparabil cu y, atunci $x = F(x,y)$ este comparabil cu $y = F(y,x)$ şi obţinem

$$d(x,y) = D\left(F(x,y), F(y,x)\right) \leq d(x,y).$$

Deoarece $0 \leq k < 1$, atunci $d(x,y) = 0$.
Cazul 2 : Dacă x nu este comparabil cu y, atunci există cuplu format din limită superioară, limită inferioară pentru x, respectiv y, ceea ce implică faptul că există $z \in X$ comparabil cu x şi y. Presupunem că $x \leq z, y \leq z$. Atunci, avem

$$F(x,y) \leq F(z,y) \text{ şi } F(x,z) \leq F(x,y),$$

$$F(y,x) \leq F(z,x) \text{ şi } F(y,z) \leq F(y,x).$$

Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F, avem

$$F^2(x,y) = F\left(F(x,y), F(y,x)\right) \leq F\left(F(z,y), F(y,z)\right) = F^2(z,y),$$

$$F^2(y,x) = F\left(F(y,x), F(x,y)\right) \leq F\left(F(z,x), F(x,z)\right) = F^2(z,x),$$

$$F^2(x,y) = F\left(F(x,y), F(y,x)\right) \leq F\left(F(x,z), F(z,x)\right) = F^2(x,z),$$

$$F^2(y,x) = F\left(F(y,x), F(x,y)\right) \leq F\left(F(y,z), F(z,y)\right) = F^2(y,z).$$

Putem concluziona următoarele inegalităţi:

$$F^2(x,y) \leq F^2(z,y), F^2(y,x) \leq F^2(z,x), \tag{1.32}$$

$$F^2(x,y) \leq F^2(x,z), F^2(y,x) \leq F^2(y,z).$$

Pentru orice $n > 2$ se pot deduce relaţii similare cu relaţiile (1.32).
Acum, considerăm

$$d(x,y) = d\left(F^{n+1}(x,y), F^{n+1}(y,x)\right)$$
$$= d\left[F\left(F^n(x,y), F^n(y,x)\right), F\left(F^n(y,x), F^n(x,y)\right)\right]$$
$$\leq d\left[F\left(F^n(x,y), F^n(y,x)\right), F\left(F^n(x,z), F^n(z,x)\right)\right]$$
$$+ d\left[F\left(F^n(x,z), F^n(z,x)\right), F\left(F^n(y,x), F^n(x,y)\right)\right]$$
$$\leq d\left[F\left(F^n(x,y), F^n(y,x)\right), F\left(F^n(x,z), F^n(z,x)\right)\right]$$
$$+ d\left[F\left(F^n(x,z), F^n(z,x)\right), F\left(F^n(z,x), F^n(x,z)\right)\right]$$
$$+ d\left[F\left(F^n(z,x), F^n(x,z)\right), F\left(F^n(y,x), F^n(x,y)\right)\right].$$

Folosind proprietatea de contracţie a operatorului F, obţinem

$$\begin{aligned} d(x,y) \leq \frac{k}{2} &\left[d\left(F^n(x,y),F^n(y,x)\right)+d\left(F^n(y,x),F^n(z,x)\right)+d\left(F^n(x,z),F^n(z,x)\right)\right. \\ &\left.+d\left(F^n(z,x),F^n(x,z)\right)+d\left(F^n(z,x),F^n(y,x)\right)+d\left(F^n(x,z),F^n(x,y)\right)\right] \\ &= k\left[d\left(F^n(x,y),F^n(x,z)\right)+d\left(F^n(x,z),F^n(z,x)\right)+d\left(F^n(z,x),F^n(y,x)\right)\right]. \end{aligned}$$

Procedând astfel, obţinem

$$d(x,y) \leq k^{n+1}\left[d(x,z)+d(z,y)\right] \to 0, \text{ când } n \to \infty, \text{ deci } d(x,y)=0.$$

□

Teorema 1.2.40 (**Bhaskar-Lakshmikantham,** [**62**])**.** *În condiţiile Teoremei 1.2.34 (respectiv ale Teoremei 1.2.35), presupunem că $x_0, y_0 \in X$ sunt comparabile. Atunci $x = y$.*

Demonstraţie: Reamintim faptul că $x_0, y_0 \in X$ şi avem

$$x_0 \leq F(x_0,y_0), y_0 \geq F(y_0,x_0).$$

Presupunem că $x_0 \leq y_0$, şi demonstrăm că pentru orice n număr natural avem $x_n \leq y_n$. Într-adevăr, în baza proprietăţii de mixt-monotonie a operatorului F, avem

$$x_1 = F(x_0,y_0) \leq F(y_0,x_0) = y_1.$$

Presupunem că $x_n \leq y_n$, pentru orice n, şi demonstrăm că $x_{n+1} \leq y_{n+1}$.

$$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0,y_0) = F\left(F^n(x_0,y_0), F^n(y_0,x_0)\right) =$$

$$= F(x_n,y_n) \leq F(y_n,x_n) = y_{n+1}.$$

Pentru $\epsilon > 0$, există $n_o \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$d\left(x, F^n(x_0,y_0)\right) < \frac{\epsilon}{4} \text{ şi } d\left(y, F^n(y_0,x_0)\right) < \frac{\epsilon}{4} \text{ pentru orice } n \geq n_0.$$

Acum avem,

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d\left(x, F^{n+1}(x_0,y_0)\right) + d\left(y, F^{n+1}(x_0,y_0)\right) \\ &\leq d\left(x, F^{n+1}(x_0,y_0)\right) + d\left(F^{n+1}(x_0,y_0), F^{n+1}(y_0,x_0)\right) + d\left(y, F^n(y_0,x_0)\right) \\ &< \frac{\epsilon}{4} + d\left[F\left(F^n(x_0,y_0), F^n(y_0,x_0)\right), F\left(F^n(y_0,x_0), F^n(x_0,y_0)\right)\right] + \frac{\epsilon}{4} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + kd\left(F^n(y_0,x_0), F^n(x_0,y_0)\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + k\left[d\left(y, F^n(y_0,x_0)\right) + d(y,x) + d\left(x, F^{n+1}(x_0,y_0)\right)\right] \leq \epsilon + kd(x,y). \end{aligned}$$

Acest fapt implică $(1-k)d(x,y) < \epsilon$, care la rândul său conduce la $d(x,y) = 0$ şi în final avem $x = y$. Similar, se demonstrează şi în cazul când $x_0 \leq y_0$. □

Teorema 1.2.41 (**Luong-Thuan,** [**93**])**.** *Dacă adăugăm condiţia* (1.29) *la ipoteza Teoremei 1.2.36, atunci operatorul F are un punct fix cuplat unic.*

Demonstraţie: Din Teorema 1.2.36 deducem că operatorul F are cel puţin un punct fix cuplat. Vom presupune că există două astfel de puncte $(x, y), (z, t) \in X \times X$ pentru operatorul F şi vom demonstra că $x = z$ şi $y = t$. Din condiţia (1.29), rezultă că, există $(u, v) \in X \times X$ comparabil cu (x, y) şi cu (z, t). Acum vom construi şirurile $\{u_n\}, \{v_n\}$, astfel:

$$u_0 = u, v_0 = v, u_{n+1} = F(u_n, v_n) \text{ şi } v_{n+1} = F(v_n, u_n) \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Deoarece (u, v) este comparabil cu (x, y), putem presupune că $(x, y) \geq (u, v) = (u_0, v_0$. Folosind inducţia matematică, se arată cu uşurinţă că

$$(x, y) \geq (u_n, v_n) \text{ pentru orice } n. \tag{1.33}$$

Din condiţia de contracţie (1.23) şi inegalitatea (1.33), obţinem

$$d\left(F(x, y), F(u_n, v_n)\right) \leq kd(x, u_n) + ld(y, v_n),$$

sau

$$d(x, u_{n+1}) \leq kd(x, u_n) + ld(y, v_n). \tag{1.34}$$

Similar, se obţine

$$d(y, v_{n+1}) \leq kd(y, v_n)) + ld(x, u_n). \tag{1.35}$$

Adunând relaţiile (1.34) şi (1.35), obţinem

$$d(x, u_{n+1}) + d(y, v_{n+1}) \leq (k + l)\left[d(x, u_n) + d(y, v_n)\right] \leq (k + l)^{n+1}\left[d(x, u_0) + d(y, v_0)\right].$$

Trecând la limită când $n \to \infty$, obţinem $\lim_{n\to\infty}\left[d(x, u_{n+1}) + d(y, v_{n+1})\right] = 0$, şi implicit

$$\lim_{n\to\infty} d(x, u_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(y, v_{n+1}) = 0. \tag{1.36}$$

Similar, se obţine

$$\lim_{n\to\infty} d(x, u_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} d(y, v_{n+1}) = 0. \tag{1.37}$$

Din relaţiile (1.36) şi (1.37), se obţine $x = z$ şi $y = t$. □

3. Puncte cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

În acest paragraf este prezentată teoria punctelor cuplate coincidente într-o formă minimală, bazată pe lucrarea [**84**], lucrare apărută în anul 2009. Autorii acestei lucrări, Lakshmikantham şi Ćirić generalizează noţiunea de punct fix cuplat şi introduc conceptul de punct coincident cuplat. Lucrările bibliografice folosite pentru acest paragraf sunt: [**84**], [**2**], [**8**], [**11**], [**20**], [**21**], [**23**], [**122**], [**118**], [**120**], [**119**], [**121**], [**27**], [**29**], [**30**], [**16**], [**45**], [**18**], [**49**], [**50**], [**51**], [**64**], [**62**], [**69**], [**70**], [**71**].

3.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet . Spaţiul $X \times X$ este parţial ordonat dacă:

$$\text{pentru}\,(x, y)\,,(u, v) \in X \times X, (u, v) \leq (x, y) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v.$$

Definiţia 1.3.42. [**84**] *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat, operatorul $F : X \times X \to X$ şi funcţia $g : X \to X$. Spunem că F este mixt-g-monoton dacă $F(x, y)$ este g-monoton crescător în x şi este g-monoton descrescătoare în y, adică: pentru orice $x, y \in X$, avem*

$$x_1, x_2 \in X, g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$$

şi, respectiv,

$$y_1, y_2 \in X, g(y_1) \leq g(y_2) \Rightarrow F(x, y_1) \geq F(x, y_2)\,.$$

Dacă g este funcţia identică, atunci definiţia 1.3.42 se reduce la definiţia 1.2.27.

Definiţia 1.3.43. [**84**]*Un element $(x, y) \in X \times X$ se numeşte punct coincident cuplat pentru operatorul $F : X \times X \to X$ şi funcţia $g : X \to X$ dacă*

$$F(x,\, y) = g(x)\,,\; F(y,\, x) = g(y)\,.$$

Similar, dacă g este funcţia identică, atunci definiţia 1.3.43 se reduce la definiţia 1.2.28.

Definiţia 1.3.44. [**84**] *Fie X o mulţime nevidă , $F : X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie. Spunem că F şi g sunt comutative (F comută cu g) dacă:*

$$g(F(x,\, y)) = F(g(x)\,,\, g(y))\,, \forall x, y \in X.$$

3.2. Teoreme de existenţă

Acum vom prezenta rezultatele obţinute de Lakshmikantham şi Ćirić [**84**].

Teorema 1.3.45 (**Lakshmikantham-Ćirić,** [**84**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Presupunem că există funcţia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ şi $\lim\limits_{r \to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$. Fie operatorul $F : X \times X \to X$ şi funcţia $g : X \to X$ unde F este mixt-g-monoton şi*

$$d(F(x, y)\,, F(u, v)) \leq \varphi\left(\frac{d(g(x)\,, g(u)) + d(g(y)\,, g(v))}{2}\right), \tag{1.38}$$

pentru orice $x, y, u, v \in X$ cu $g(x) \leq g(u)\,, g(y) \geq g(v)$.

Presupunem că $F(X \times X) \subseteq g(X)\,,$ g este continuă şi comută cu F şi presupunem că:

(a) F este continuu,

(b) X are următoarele proprietăţi:

(i) dacă există şirul crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,

(ii) dacă există şirul descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } g(y_0) \geq F(y_0, x_0),$$

atunci există $x, y \in X$ astfel încât

$$g(x) = F(x, y) \text{ şi } g(y) = F(y, x).$$

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0 \in X$ astfel încât $g(x_0) \leq F(x_0, y_0)$ şi $g(y_0) \geq F(y_0, x_0)$. Deoarece $F(X \times X) \subseteq g(X)$, există $x_1, y_1 \in X$ astfel încât:

$$g(x_1) = F(x_0, y_0) \text{ şi } g(y_1) = F(y_0, x_0).$$

Repetând raţionamentul, putem găsi două elemente x_2, $y_2 \in X$ astfel încât:

$$g(x_2) = F(x_1, y_1) \text{ şi } g(y_2) = F(y_1, x_1)$$

şi astfel construim şirurile $\{x_n\}$ şi $\{y_n\} \in X$ astfel încât:

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n) \text{ şi } g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n) \text{ pentru orice } n \geq 0. \tag{1.39}$$

Vom arăta prin inducţie că

$$g(x_n) \leq g(x_{n+1}) \text{ şi } g(y_n) \geq g(y_{n+1}) \text{ pentru orice } n \geq 0. \tag{1.40}$$

Pentru $n = 0$ avem

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0) = g(x_1) \text{ şi } g(y_0) \geq F(y_0, x_0) = g(y_1).$$

Deci, relaţia (1.40) este verificată pentru $n = 0$.

Acum presupunem că inegalităţile (1.40) sunt adevărate pentru $n \geq 0$ fixat. Atunci din relaţiile (1.39), (1.40) şi proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F obţinem

$$\begin{aligned} g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n) \leq F(x_{n+1}, y_n) \text{ şi } g(y_{n+1}) \\ = F(y_n, x_n) \geq F(y_{n+1}, x_n), \text{ pentru orice } n \geq 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

şi

$$\begin{aligned} g(x_{n+2}) = F(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq F(x_{n+1}, y_n) \text{ şi } g(y_{n+2}) \\ = F(y_{n+1}, x_{n+1}) \leq F(y_{n+1}, x_n), \text{ pentru orice } n \geq 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

Acum din (1.41) şi (1.42) obţinem

$$g(x_{n+1}) \leq g(x_{n+2}) \text{ şi } g(y_{n+1}) \geq g(y_{n+2}).$$

Am demonstrat prin inducţie matematică că şirul $\{g(x_n)\}$ este monoton crescător, iar şirul $\{g(y_n)\}$ este monoton descrescător.

Notăm $\delta_n = [d(g(x_n), g(x_{n+1})) + d(g(y_n), g(y_{n+1}))]$ şi arătăm că

$$\delta_n \leq 2\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right). \tag{1.43}$$

Folosind relaţiile (1.38), (1.39), (1.40) avem

$$\begin{aligned} d(g(x_n), g(x_{n+1})) &= d(F(x_{n-1}, y_{n-1}), F(x_n, y_n)) \\ &\leq \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x_{n-1}\right), g\left(x_n\right)\right) + d\left(g\left(y_{n-1}\right), g\left(y_n\right)\right)}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.44}$$

şi

$$\begin{aligned} d(g(y_n), g(y_{n+1})) &= d(F(y_{n-1}, x_{n-1}), F(y_n, x_n)) \\ &\leq \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x_{n-1}\right), g\left(x_n\right)\right) + d\left(g\left(y_{n-1}\right), g\left(y_n\right)\right)}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Adunând relaţia (1.44) cu (1.45) obţinem (1.43).

Deoarece $\varphi(t) < t$ pentru $t > 0$, atunci relaţia (1.43) devine

$$\delta_n \leq 2\varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) < 2\frac{\delta_{n-1}}{2} = \delta_{n-1},$$

ceea ce dovedeşte că şirul $\{\delta_n\}$ este un şir monoton descrescător şi pozitiv. Atunci există un $\delta \geq 0$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_+$ şi vom demonstra că $\delta = 0$, presupunând că $\delta > 0$. Dacă în relaţia (1.43) trecem la limită, ţinând cont de proprietăţiile funcţiei de comparaţie φ, avem

$$\delta = \delta_n \leq 2\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) = 2\lim_{\delta_{n-1}\to\delta_+} \varphi\left(\frac{\delta_{n-1}}{2}\right) < 2\frac{\delta}{2} = \delta.$$

Deci, presupunerea noastră este falsă, ceea ce implică că $\delta = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} [d(g(x_n), g(x_{n+1})) + d(g(y_n), g(y_{n+1}))] = 0. \tag{1.46}$$

Acum vom demonstra că şirurile $\{x_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{y_n\}_{n\geq 0}$ sunt şiruri Cauchy. Presupunem că unul dintre cele două şiruri nu este şir Cauchy. Atunci există un $\epsilon > 0$ şi două şiruri de numere întregi $\{l(k)\}, \{m(k)\}, m(k) > l(k) \geq k$ cu

$$r_k = \left[d(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})) + d(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)}))\right] \geq \epsilon \text{ pentru } k \in \{1, 2, ...\}. \tag{1.47}$$

Putem presupune, de asemenea că

$$d(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})) + d(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})) < \epsilon \tag{1.48}$$

pri alegerea lui $m(k)$ ca cel mai mic număr întreg, mai mare decât $l(k)$ şi inegalitatea (1.47) să rămână adevărată. Aplicând inegalitatea triunghiului în relaţia (1.47) şi ţinând cont de inegalitatea (1.48), avem:

$$\begin{aligned} \epsilon \leq r_k &\leq d(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})) + d(g(x_{m(k)-1}), g(x_{m(k)})) \\ &+ d(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})) + d(g(y_{m(k)-1}), g(y_{m(k)})) \\ &= d(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})) + d(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})) + \delta_{m(k)-1} < \epsilon + \delta_{m(k)-1}. \end{aligned}$$

Deci, putem scrie $\epsilon \le r_k < \epsilon + \delta_{m(k)-1}$ şi trecând la limită când $k \to \infty$, obţinem

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \epsilon_+. \tag{1.49}$$

Acum, vom aplica din nou inegalitatea triunghiului la relaţia (1.47), astfel:

$$\begin{aligned}
r_k = &\Big[d(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})) + d(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)}))\Big] \\
\le\ & d(g(x_{l(k)}), g(x_{k(k)+1})) + d(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})) + d(g(x_{m(k)+1}), g(x_{m(k)})) \\
&+ d(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1})) + d(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})) + d(g(y_{m(k)+1}), g(y_{m(k)})) \\
=\ & \Big[d(g(x_{l(k)}), g(x_{k(k)+1})) + d(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1}))\Big] \\
&+ \Big[d(g(x_{m(k)+1}), g(x_{m(k)})) + d(g(y_{m(k)+1}), g(y_{m(k)}))\Big] \\
&+ \Big[d(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})) + d(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1}))\Big]
\end{aligned}$$

şi obţinem

$$r_k \le \delta_{l(k)} + \delta_{m(k)} + \Big[d(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})) + d(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1}))\Big]. \tag{1.50}$$

Întrucât şirul $\{g(x_n)\}$ este monoton crescător, iar şirul $\{g(y_n)\}$ este monoton descrescător, aplicând condiţia de contracţie (1.38) şi ţinând cont de relaţia (1.39), avem

$$d(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})) = d(F(x_{l(k)}, y_{l(k)}), F(x_{m(k)}, y_{m(k)}))$$

$$\le \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x_{l(k)}\right), g\left(x_{m(k)}\right)\right) + d\left(g\left(y_{l(k)}\right), g\left(y_{m(k)}\right)\right)}{2}\right) = \varphi\left(\frac{r(k)}{2}\right), \tag{1.51}$$

$$d(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})) = d(F(y_{l(k)}, x_{l(k)}), F(y_{m(k)}, x_{m(k)}))$$

$$\le \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x_{l(k)}\right), g\left(x_{m(k)}\right)\right) + d\left(g\left(y_{l(k)}\right), g\left(y_{m(k)}\right)\right)}{2}\right) = \varphi\left(\frac{r(k)}{2}\right). \tag{1.52}$$

Dacă introducem (1.51) şi (1.52) în (1.50) şi trecem la limită când $k \to \infty$, şi folosind (1.46) şi (1.49), obţinem contradicţia

$$\epsilon \le 2 \lim_{k\to\infty} \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) = 2 \lim_{r_k \to \epsilon_+} \varphi\left(\frac{r_k}{2}\right) < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Deci, presupunerea (1.47) este falsă, ceea ce implică faptul că şirurile $\{g(x_n)\}$ şi $\{g(y_n)\}$ sunt Cauchy.

Deoarece X este un spaţiu metric complet, atunci există $x, y \in X$ astfel încât:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x \text{ şi } \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y. \tag{1.53}$$

Ţinând cont de faptul că g este o funcţie continuă, atunci din (1.53) obţinem

$$\lim_{n\to\infty} g\left(g(x_n)\right) = g(x) \text{ şi } \lim_{n\to\infty} g\left(g(y_n)\right) = g(y). \tag{1.54}$$

Având în vedere că g comută cu F, atunci din relaţia (1.39) obţinem

$$g\left(g(x_{n+1})\right) = g\left(F(x_n, y_n)\right) = F\left(g(x_n), g(y_n)\right), \tag{1.55}$$

$$g\left(g(y_{n+1})\right) = g\left(F(y_n, x_n)\right) = F\left(g(y_n), g(x_n)\right). \tag{1.56}$$

Operatorul F fiind continuu şi având în vedere relaţiile (1.53), (1.54), în (1.55) şi (1.56) trecând la limită când $n \to \infty$, obţinem

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(g(x_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(g(x_n), g(y_n)\right) = F\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n)\right) = F(x,y),$$

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g\left(g(y_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(g(y_n), g(x_n)\right) = F\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = F(y,x).$$

Am demonstrat că $g(x) = F(x,y)$ şi $g(y) = F(y,x)$ atunci când ipoteza (a) este adevărată.

Mai departe, arătăm că $g(x) = F(x,y)$ şi $g(y) = F(y,x)$ atunci când ipoteza (b) este adevărată. Deoarece şirul $\{g(x_n)\}$ este crescător cu $g(x_n) \to x$ şi $\{g(y_n)\}$ este descrescător cu $g(y_n) \to y$ implică faptul că

$$g(x_n) \leq x \text{ şi } g(y_n) \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Folosind (1.38) şi (1.55), (1.56) avem

$$\begin{aligned} d(g(x), F(x,y)) &\leq d\left(g(x), g\left(g(x_{n+1})\right)\right) + d\left(g\left(g(x_{n+1})\right), F(x,y)\right) \\ &= d\left(g(x), g\left(g(x_{n+1})\right)\right) + d\left(F\left(g(x_n), g(y_n)\right), F(x,y)\right) \\ &\leq d\left(g(x), g\left(g(x_{n+1})\right)\right) + \varphi\left(\frac{d(g(g(x_n)), g(x)) + d(g(g(y_n)), g(y))}{2}\right). \end{aligned}$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ vom avea $d(g(x), F(x,y)) \leq 0$, deci $g(x) = F(x,y)$.

Similar se arată că $g(y) = F(y,x)$. $\square$

Teorema 1.3.46 (**Lakshmikantham-Ćirić,** [**84**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie operatorul $F : X \times X \to X$ şi fucţia $g : X \to X$ unde F este mixt-g-monoton, şi presupunem că există constanta $k \in [0,1)$ cu*

$$d\left(F\left(x,y\right), F\left(u,v\right)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(g(x), g(u)) + d(g(y), g(v))\right] \tag{1.57}$$

pentru orice $x, y, u, v \in X$ cu $g\left(x\right) \leq g\left(u\right), g\left(y\right) \geq g\left(v\right)$.

Presupunem că $F\left(X \times X\right) \subseteq g\left(X\right)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că:

(a) F este continuu,

(b) X are următoarele proprietăţi:

(i) dacă există şirul crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,

(ii) dacă există şirul descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ astfel încât

$$g\left(x_0\right) \leq F\left(x_0, y_0\right) \text{ şi } g\left(y_0\right) \geq F\left(y_0, x_0\right),$$

atunci există $x, y \in X$ *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y) \text{ şi } g(y) = F(y, x).$$

Demonstraţie: Dacă luăm funcţia de comparaţie $\varphi(t) = kt$ cu $k \in [0, 1)$, atunci condiţiile teoremei 1.3.45 sunt îndeplinite. □

3.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

După cum s-a văzut în paragraful precedent, cu privire la unicitatea punctelor fixe cuplate, tot aşa se va impune şi în cazul punctelor cuplate coincidente o condiţie de comparare ce trebuie să o îndeplinească spaţiul $X \times X$, pentru a avea unicitatea .

Teorema 1.3.47 (**Lakshmikantham şi Ćirić** [**84**]). *În condiţiile Theoremei 1.3.45, presupunem că pentru orice* $(x, y), (x^*, y^*) \in X \times X$ *există* $(u, v) \in X \times X$, *astfel încât* $(F(u, v), F(v, u))$ *este comparabil cu* $(F(x, y), F(y, x))$ *şi cu* $(F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))$. *Atunci* F *şi* g *au un unic punct cuplat coincident, adică, există un unic* $(x, y) \in X \times X$, *astfel încât*

$$x = g(x) = F(x, y) \text{ şi } y = g(y) = F(y, x).$$

Demonstraţie: În Teorema 1.3.45 s-a dovedit existenţa punctului coincident cuplat. Presupunem că există două astfel de puncte $(x, y), (x^*, y^*) \in X \times X$ astfel încât

$$g(x) = F(x, y), g(y) = F(y, x) \text{ şi } g(x^*) = F(x^*, y^*), g(y^*) = F(y^*, x^*)$$

şi demonstrăm că

$$g(x) = g(x^*) \text{ şi } g(y) = g(y^*). \tag{1.58}$$

Din condiţiile teoremei, rezultă că există $(u, v) \in X \times X$ astfel încât $(F(u, v), F(v, u))$ este comparabil cu $(F(x, y), F(y, x))$ şi cu $(F(x^*, y^*), F(y^*, x^*))$. Acum luăm $u_0 = u, v_0 = v$ şi putem alege $u_1, v_1 \in X$ astfel încât să avem $g(u_1) = F(u_0, v_0)$ şi $g(v_1) = F(v_0, u_0)$. Similar, ca şi în demonstraţia Teoremei 1.3.45, construim şirurile $\{g(u_n)\}$ şi $\{g(v_n)\}$, definite astfel:

$$g(u_n) = F(u_{n-1}, v_{n-1}) \text{ şi } g(v_n) = F(v_{n-1}, u_{n-1}).$$

În continuare, luăm $x_0 = x, y_0 = y, x_0^* = x^*, y_0^* = y^*$ şi, construim în acelaşi mod şirurile $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}$ şi $\{g(x_n^*)\}, \{g(y_n^*)\}$ şi este uşor să se verifice că:

$$g(x_n) = F(x, y), g(y_n) = F(y, x) \text{ şi } g(x_n^*) = F(x^*, y^*), g(y_n^*) = F(y^*, x^*), \forall n \geq 1.$$

Deoarece

$$(F(x, y), F(y, x)) = (g(x_1), g(y_1)) = (g(x), g(y)) \text{ şi } (F(u, v), F(v, u)) = (g(u_1), g(v_1))$$

sunt comparabile, atunci $g(x) \leq g(u_1)$ şi $g(y) \geq g(v_1)$. Se arată cu uşurinţă că, dacă $(g(x), g(y))$ şi $(g(u_n), g(v_n))$ sunt comparabile, atunci $g(x) \leq g(u_n)$ şi $g(y) \geq g(v_n)$ pentru orice $n \geq 1$. Din condiţia de contracţie (1.38), avem

$$d\left(g(x), g(u_{n+1})\right) = d\left(F(x,y), F(u_n, v_n)\right) \leq \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x\right), g\left(u_n\right)\right) + d\left(g\left(y\right), g\left(v_n\right)\right)}{2}\right),$$

$$d\left(g(y), g(v_{n+1})\right) = d\left(F(y,x), F(v_n, u_n)\right) \leq \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x\right), g\left(u_n\right)\right) + d\left(g\left(y\right), g\left(v_n\right)\right)}{2}\right).$$

Adunând cele două relaţii, obţinem

$$\frac{d\left(g(x), g(u_{n+1})\right) + d\left(g(y), g(v_{n+1})\right)}{2} \leq \varphi\left(\frac{d\left(g\left(x\right), g\left(u_n\right)\right) + d\left(g\left(y\right), g\left(v_n\right)\right)}{2}\right).$$

Prin urmare, rezultă

$$\frac{d\left(g(x), g(u_{n+1})\right) + d\left(g(y), g(v_{n+1})\right)}{2} \leq \varphi^n\left(\frac{d\left(g\left(x\right), g\left(u_1\right)\right) + d\left(g\left(y\right), g\left(v_1\right)\right)}{2}\right) \tag{1.59}$$

pentru orice $n \geq 1$. Folosind proprietăţiile funcţiei de comparaţie φ şi trecând la limită în relaţia (1.59), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d\left(g\left(x\right), g\left(u_{n+1}\right)\right) = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} d\left(g\left(y\right), g\left(v_{n+1}\right)\right) = 0. \tag{1.60}$$

Similar, se arată că

$$\lim_{n\to\infty} d\left(g\left(x^*\right), g\left(u_{n+1}\right)\right) = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} d\left(g\left(y^*\right), g\left(v_{n+1}\right)\right) = 0. \tag{1.61}$$

Acum vom aplica inegalitatea triunghiului în (1.60) şi (1.61) şi obţinem

$$d\left(g\left(x\right), g\left(x^*\right)\right) \leq d\left(g\left(x\right), g\left(u_{n+1}\right)\right) + d\left(g\left(x^*\right), g\left(u_{n+1}\right)\right) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

$$d\left(g\left(y\right), g\left(y^*\right)\right) \leq d\left(g\left(y\right), g\left(v_{n+1}\right)\right) + d\left(g\left(y^*\right), g\left(v_{n+1}\right)\right) \to 0 \text{ când } n \to \infty.$$

Prin urmare, $g(x) = g(x^*)$ şi $g(y) = g(y^*)$. Deoarece $g(x) = F(x,y)$ şi $g(y) = F(y,x)$ şi folosind faptul că F comută cu g, avem

$$g\left(g(x)\right) = F\left(g(x), g(y)\right) \text{ şi } g\left(g(y)\right) = F\left(g(y), g(x)\right). \tag{1.62}$$

Notăm $g(x) = z$ şi $g(y) = w$, atunci relaţiile (1.62) devin

$$g(z) = F(z,w) \text{ şi } g(w) = F(w,z). \tag{1.63}$$

Astfel am arătat că (z,w) este punct coincident cuplat. Dacă în relaţia (1.58) luăm $x^* = z$ şi $y^* = w$, atunci rezultă că $g(x) = g(z)$ şi $g(y) = g(w)$ şi

$$g(z) = z \text{ şi } g(w) = w. \tag{1.64}$$

Deci, din (1.63) şi (1.64) avem

$$z = g(z) = F(z,w) \text{ şi } w = g(w) = F(w,z).$$

□

Teorema 1.3.48 (**Lakshmikantham-Ćirić,** [**84**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Presupunem că există funcţia* $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *cu* $\varphi(t) < t$ *şi* $\lim_{r \to t} \varphi(r) < t$ *pentru orice* $t > 0$. *Fie operatorul* $F : X \times X \to X$ *şi funcţia* $g : X \to X$ *unde* F *este mixt-monotonă şi*

$$d(F(x, y), F(u, v)) \leq \varphi\left(\frac{d(x, u) + d(y, v)}{2}\right), \tag{1.65}$$

pentru orice $x, y, u, v \in X$ *cu* $x \leq u, y \geq v$.

Presupunem că :

(a) F *este continuu,*

(b) X *are următoarele proprietăţi:*

(i) *dacă există şirul crescător* $\{x_n\} \to x$, *atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n,

(ii) *dacă există şirul descrescător* $\{y_n\} \to y$, *atunci* $y_n \geq y$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0) \text{ şi } g(y_0) \geq F(y_0, x_0),$$

atunci există $x, y \in X$ *astfel încât*

$$x = F(x, y) \text{ şi } y = F(y, x).$$

În plus, dacă x_0, y_0 *sunt comparabile, atunci* $x = y$ *şi* $x = F(x, x)$.

Demonstraţie: Dacă în Teorema 1.3.45 luăm $g(x) = x$, atunci rămâne să demonstrăm că

$$x = y \text{ şi } x = F(x, x).$$

Presupunem că $x_0 \leq y_0$ şi demonstrăm că prin inducţie că

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}) \leq y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}) \text{ pentru orice } n \geq 1. \tag{1.66}$$

Dacă presupunem relaţia (1.66) adevărată şi folosim proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F, avem

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \leq F(y_n, x_n) = y_{n+1}.$$

Acum, din relaţia (1.66) şi condiţia de contracţie (1.65) obţinem

$$d(F(x_n, y_n), F(y_n, x_n)) \leq \varphi(d(x_n, y_n)).$$

Folosind inegalitatea triunghiului, avem

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y)$$

$$= d(F(x_n, y_n), F(y_n, x_n)) + d(x, y) \leq d(x, x_{n+1}) + d(y_{n+1}, y)$$

$$\leq \varphi(d(x_n, y_n)) + d(x, y) \leq d(x, x_{n+1}) + d(y_{n+1}, y).$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ şi deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, atunci avem

$$d(x, y) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Prin urmare $d(x, y) = 0$ şi implicit $x = y$ şi $x = F(x, x)$. □

Teorema 1.3.49 (**Lakshmikantham-Ćirić,** [**84**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie operatorul $F : X \times X \to X$ mixt-monoton, şi presupunem că există constanta $k \in [0, 1)$ cu*

$$d\left(F\left(x,y\right),F\left(u,v\right)\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(x,u)+d(y,v)\right] \tag{1.67}$$

pentru orice $x, y, u, v \in X$ cu $x \leq u, y \geq v$.

Presupunem că:

(a) F este continuu,

(b) X are următoarele proprietăţi:

(i) dacă există şirul crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,

(ii) dacă există şirul descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.

Dacă există $x_0, y_0 \in X$ astfel încât

$$x_0 \leq F\left(x_0, y_0\right) \text{ şi } y_0 \geq F\left(y_0, x_0\right),$$

atunci există $x, y \in X$ astfel încât

$$x = F\left(x, y\right) \text{ şi } y = F\left(y, x\right).$$

Dacă x_0, y_0 sunt comparabile, atunci $x = y$ şi $x = F(x, x)$.

Demonstraţie: Dacă în Teorema 1.3.48 luăm $\varphi(t) = kt$, unde $k \in [0, 1)$, atunci obţinem Teorema 1.3.49. □

Toate aceste rezultate privind punctele fixe cuplate au fost extinse de **Berinde** în lucrările [**23**], [**24**], [**25**] prin considerarea unor condiţii de contracţie mai slabe şi anume:

$$d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \leq k[d(x,u)+d(y,v)]; \tag{1.68}$$

$$\varphi\left(\frac{d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u))}{2}\right) \tag{1.69}$$

$$\leq \varphi\left(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}\right) - \psi\left(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}\right);$$

$$d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \leq 2\varphi\left(\frac{d(g(x),g(u))+d(g(y),g(v))}{2}\right). \tag{1.70}$$

4. Exemple. Aplicaţii

În acest paragraf vom exemplifica noţiunile definite în paragrafele anterioare şi va fi prezentată o aplicaţie a teoriei punctelor fixe cuplate, la rezolvarea problemei la limită cu valori periodice.

4.1. Exemple

4.1.1. Exemple. Puncte fixe

Exemplul 1.4.50. *Fie* $X = \mathbb{R}^n$ *şi*

$$d(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, ...x_n),\ y = (y_1, y_2, ...y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

atunci d este o metrică pe $\mathbb{R}^n$*, numită metrica euclidiană. Următoarele două funcţii:*

$$\delta(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

sunt de asemenea metrice pe $\mathbb{R}^n$.

Exemplul 1.4.51. *Fie* $X = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, | f \text{ continuă}\}$. *Atunci funcţia*

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \text{ pentru orice } f, g \in X$$

este o metrică pe X, numită metrica Cebîşev.

Exemplul 1.4.52. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $X = \mathbb{R}^n$. *Atunci* (X, d) *este un spaţiu metric complet unde d este metrica euclidiană.*

Exemplul 1.4.53. *Fie* $X = \mathbb{Q}$ *şi* $d(x,y) = |x - y|, \forall x, yin\mathbb{Q}$. *Atunci* (X, d) *este un spaţiu metric care nu e complet, deoarece şirul*

$$\{x_n\}_{n \geqslant 1},\ x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

este un şir fundamental, dar nu este convergent în $\mathbb{Q}$.

Exemplul 1.4.54. *Fie* " $\leqslant$ " *relaţia de ordine naturală pe* $\mathbb{R}$, *atunci* $(\mathbb{R}, \leqslant)$ *este o mulţime total ordonată.*

Exemplul 1.4.55. *Mulţimea* $(\mathbb{N}, |)$ *este o mulţime parţial ordonată, unde* " $|$ " *este relaţia de divizibilitate pe* $\mathbb{N}$.

Exemplul 1.4.56. *Fie* $X = \mathbb{R}$ *şi* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un operator. Dacă*

(1.) $F(x) = x$, *atunci* $F_F = \mathbb{R}$;

(2.) $F(x) = x^2 - 5x$, *atunci* $F_F = \{0, 5\}$;

(3.) $F(x) = x^2 + x + 1$, *atunci* $F_F = \{\varnothing\}$.

Exemplul 1.4.57. (1.) *Fie* $F : [1/2, 2] \to [1/2, 2]$ *cu* $F(x) = 1/x$. *Atunci* F *este* $4 -$ *Lipschitzian şi* $F_F = \mathbb{R}$;

(2.) *Fie* $F : [1, \infty) \to [1, \infty)$ *cu* $F(x) = x + 1/x$, *atunci* F *este contractiv şi* $F_F = \{\varnothing\}$;

(3.) *Fie* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu* $F(x) = x/2 + 3$, *atunci* F *este strict contractiv şi* $F_F = \{6\}$.

Exemplul 1.4.58. *Fie funcţia* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *cu* $\varphi(t) = kt$, *unde* $k \in [0, 1)$ *este funcţie de comparaţie.*

4.1.2. Exemple. Puncte fixe cuplate

Exemplul 1.4.59. *Fie* $X = \mathbb{R}$. *Atunci relaţia de ordine pe* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *o definim astfel:*

$$(x, y) \leq (u, v) \Leftrightarrow x \leq u \ \textit{şi}\ y \geq v, \ \textit{cu}\ (x, y), (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

$$\textit{Deci}\ (1, 2) \leq (2, 1) \ \textit{cu}\ (1, 2), (2, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Exemplul 1.4.60. *Fie* $X = \mathbb{R}, F(x, y) = \frac{3x-2y+1}{6}$ *un operator,* $d(x, y) = |x - y|$, $k \in [\frac{1}{2}; 1)$.

Acum arătăm că operatorul F verifică ipotezele Teoremei 1.2.38, iar punctul cuplat fix pentru operatorul F este $(1/5; 1/5)$, soluţie a sistemului

$$\begin{cases} F(x, y) = x \\ F(y, x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y+1}{6} = x \\ \frac{3y-2x+1}{6} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}.$$

Operatorul F este continuu şi mixt-monoton (deoarece derivata după x este pozitivă, iar derivata după y este negativă.)

Deoarece

$$\begin{aligned} d\left(F(x, y), F(u, v)\right) &= \left|\frac{3x - 2y + 1}{6} - \frac{3u - 2v + 1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2}(x - u) + \frac{1}{3}(v - y)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|x - u\right| + \frac{1}{3}\left|y - v\right| \leq \frac{1}{2}\left(|x - u| + |y - v|\right), \end{aligned}$$

condiţia de contracţie este îndeplinită pentru $k \in [\frac{1}{2}; 1)$.

Exemplul 1.4.61. *Fie* $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$ *şi operatorul* $F(x, y) = \frac{2x-3y+1}{6}$.

Pentru

$$\begin{cases} F(x, y) = x \\ F(y, x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-3y+1}{6} = x \\ \frac{2y-3x+1}{6} = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 1 \end{cases}.$$

Acest sistem are soluţie unică pe $(1/7; 1/7)$.

Acum vom verifica ipotezele teoremei 1.2.36 pentru operatorul F. Continuitatea operatorului este evidentă, iar mixt-monotonia rezultă din faptul că derivata după x este pozitivă şi derivata după y este negativă. Pentru $k = 1/3, l = 1/2$ verificăm condiţia de contracţie.

$$d\left(F(x, y), F(u, v)\right) = \left|\frac{2x - 3y + 1}{6} - \frac{2u - 3v + 1}{6}\right| = \left|\frac{1}{3}(x - u) + \frac{1}{2}(v - y)\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}|x-u| + \frac{1}{2}|y-v| = \frac{1}{3}(x,u) + \frac{1}{2}(y,v).$$

Punctul $(x_0, y_0) = (1/14, 4/14) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îndeplineşte condiţiile $x_0 \leq F(x_0, y_0), y_0 \geq F(y_0, x_0)$. Deci, putem concluziona: condiţiile teoremei 1.2.36 sunt îndeplinite, ceea ce implică faptul că avem un punct fix. Deoarece $X = \mathbb{R}$, este îndeplinită şi condiţia (1.29) ce ne conduce la unicitatea punctului cuplat fix.

4.1.3. Exemple. Puncte cuplate coincidente

Exemplul 1.4.62. *Fie operatorul* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu* $F(x,y) = \frac{x-2y+1}{12}$, *funcţia* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu* $g(x) = -12x+1$ *şi funcţia de comparaţie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *cu* $\varphi(t) = kt$, *unde* $k \in [\frac{1}{6}, 1) \subset [0,)$. *În aceste condiţii,* F *şi* g *au un punct coincident cuplat.*

A arăta acest fapt, înseamnă a verifica ipotezele Teoremei 1.3.45. Funcţiile F, g sunt continue, iar F este mixt-g-monoton.

$$g\left(F(x,y)\right) = -12\frac{x-2y+1}{12} + 1 = -x + 2y,$$

$$F(g(x), g(y)) = \frac{-12x+1-2(-12y+1)+1}{12} = -x + 2y.$$

Deci, avem $g\left(F(x,y)\right) = F(g(x), g(y))$, adică F comută cu g.

Acum verificăm condiţia de contracţie:

$$d\left(F(x,y), F(u,v)\right) = \left|\frac{x-2y+1}{12} - \frac{u-2v+1}{12}\right| = \left|\frac{1}{12}(x-u) + \frac{1}{6}(v-y)\right|$$

$$\leq \frac{1}{12}|x-u| + \frac{1}{6}|y-v| \leq \frac{1}{6}\left(|x-u| + |y-v|\right),$$

Soluţia sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} F(x,y) = g(x) \\ F(y,x) = g(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2y+1}{12} = -12x+1 \\ \frac{y-2x+1}{12} = -12y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y = 1 \\ 3x+4y = 1 \end{cases}$$

este $\left(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}\right)$. Această soluţie este punctul coincident cuplat pentru F şi g.

4.2. Aplicaţii

1). Problema la limită cu valori periodice.

În această secţiune, dorim un studiu pentru existenţa şi unicitatea soluţiei a problemei la limită cu valori periodice, ca o aplicaţie la Teorema 1.2.34

Considerăm problema la limită cu valori periodice

$$\begin{cases} u' = h(t,u), t \in I = (0,T) \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{1.71}$$

Presupunem că există funcţiile continue f, g astfel încât

$$h(t,u) = f(t,u) + g(t,u), t \in [0,T]$$

unde f, g satisfac condiţiile ce urmează: Există $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ şi $\mu_1, \mu_2 > 0$, astfel încât $\forall u, v \in \mathbb{R}, v \leq u$ avem

$$0 \leq (f(t,u) + \lambda_1 u) - (f(t,v) + \lambda_1 v) \leq \mu_1(u - v), \tag{1.72}$$

$$-\mu_2(u - v) \leq (g(t,u) - \lambda_2 u) - (g(t,v) - \lambda_2 v) \leq 0, \tag{1.73}$$

unde $\frac{\max[\mu_1,\mu_2]}{\lambda_1+\lambda_2} < 1$.
Vom obţine unicitatea soluţiei pentru problema (1.71) în mai multe etape. Primul pas este studiul existenţei soluţiei pentru următorul sistem periodic:

$$\begin{cases} u' + \lambda_1 u - \lambda_2 v = f(t,u) + g(t,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v \\ v' + \lambda_1 v - \lambda_2 u = f(t,v) + g(t,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u \end{cases} \tag{1.74}$$

împreună cu condiţiile de periodicitate

$$u(0) = u(T), v(0) = v(T). \tag{1.75}$$

Această problemă este echivalentă cu sistemul de ecuaţii integrale

$$u(t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v\right] + G_2(t,s)\left[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u\right] ds$$

$$v(t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u\right] + G_2(t,s)\left[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v\right] ds$$

unde

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_1(t-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}} + \frac{e^{\sigma_2(t-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}}\right], 0 \leq s < t \leq T \\ \\ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_1(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}} + \frac{e^{\sigma_2(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}}\right], 0 \leq t < s \leq T \end{cases},$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_2(t-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}} - \frac{e^{\sigma_1(t-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}}\right], 0 \leq s < t \leq T \\ \\ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_2(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}} - \frac{e^{\sigma_1(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}}\right], 0 \leq t < s \leq T \end{cases},$$

unde, $\sigma_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ şi $\sigma_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)$.
Pentru a garanta că $G_1(t,s) \geq 0$, cu $0 \leq t, s \leq T$ şi $G_2(t,s) \leq 0$, cu $0 \leq t, s \leq T$ vom alege corespunzător λ_1, λ_2. Următoarea lemă se referă la această garantare.

Lema 1.4.63. *Dacă*

$$ln\frac{2e-1}{e} \leq (\lambda_2 - \lambda_1)T \tag{1.76}$$

$$(\lambda_2 + \lambda_1)T \leq 0, \tag{1.77}$$

atunci $G_1(t,s) \geq 0$, *cu* $0 \leq t, s \leq T$ *şi* $G_2(t,s) \leq 0$, *cu* $0 \leq t, s \leq T$.

Demonstraţie: Faptul că $\sigma_1 < 0$ şi împreună cu (1.76) avem $\sigma_2 > 0$. De aici rezultă că $G_2(t,s) \leq 0$, cu $0 \leq t,s \leq T$. Pe de altă parte, utilizând (1.76), (1.77) se poate demonstra cu uşurinţă că, pentru $0 \leq t,s \leq T$ avem

$$\frac{-e^{\sigma_1(t-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}} \leq \frac{e}{1-e} \leq \frac{e^{\sigma_2(t-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}},$$

ceea ce implică că $G_1(t,s) \geq 0$, cu $0 \leq t,s \leq T$. □

Fie $X = C(I,\mathbb{R})$ spaţiu metric complet al funcţiilor continue $u : I \to \mathbb{R}$, înzestrat cu metrica

$$d(u,v) = \sup_{t\in I} |u(t) - v(t)|, \forall u,v \in X.$$

Observaţia 1.4.64. *Presupunem că avem un şir monoton crescător $u_n \subset X$ convergent la $u \in X$. Atunci, pentru fiecare $t \in I$, şirul de numere reale $u_n(t)$ este crescător şi convergent la $u(t)$. Prin urmare $u_n(t) \leq u(t), \forall t \in I$, şi $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Similar, se arată că $v(t)$ este limita unui şir descrescător $v_n(t) \subset X$.

Limita superioară şi inferioară pentru orice $f,g \in X$ sunt funcţiile

$$M(t) = \max\{f(t),g(t)\}, m(t) = \min\{f(t),g(t)\}, \forall t \in I, \text{ din } X.$$

Pe spaţiul $X \times X$ definim metrica D dată de relaţia

$$D((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \sup_{t\in I} |u_1(t) - u_2(t)| + \inf_{t\in I} |v_1(t) - v_2(t)|, t \in I,$$

şi relaţia de ordine

$$(u_1,v_1) \leq (u_2,v_2) \Leftrightarrow u_1(t) \leq u_2(t) \text{ şi } v_1(t) \geq v_2(t), t \in I.$$

Deci spaţiul $(X \times X, D, \leq)$ este metric complet şi parţial ordonat.

Definim pentru orice $t \in I$, operatorul

$$A[u,v](t) = \int_0^T G_1(t,s)[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v] +$$
$$+G_2(t,s)[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u]\, ds.$$

De reţinut faptul că, dacă $(u,v) \in X \times X$ este punct cuplat fix pentru A, atunci $u(t) = A[u,v](t)$ şi $v(t) = A[v,u](t)$, pentru orice $t \in I$, este soluţie pentru problema dată de relaţiile $[(1.74),(1.75)]$.

Acum definim soluţia pentru problema $[(1.71),(1.72)]$ dată de cuplul format din limia inferioară, respectiv limita superioară.

Definiţia 1.4.65. *Un element $(\alpha,\beta) \in X \times X$ este soluţie cuplu format din limita inferioară, respectiv limita superioară pentru problema* $[(1.71),(1.72)]$ *şi implicit pentru problema* $[(1.74),(1.75)]$, *dacă verifică următoarele relaţii:*

$$\alpha'(t) \leq f(t,\alpha(t)) + g(t,\beta(t)) \text{ şi } \beta'(t) \geq f(t,\beta(t)) + g(t,\alpha(t))$$

împreună cu condiţiile de periodicitate $\alpha(0) \leq \alpha(T), \beta(0) \geq \beta(T)$.

Următoarea lemă arată legătura dintre soluţia definită mai sus şi operatorul A.

Lema 1.4.66. *Dacă*

$$\lambda_1 \left(\alpha(T) - \alpha(0)\right) + \lambda_2 \left(\beta(0) - \beta(T)\right) \leq \frac{\alpha(T) - \alpha(0)}{T}, \tag{1.78}$$

$$\lambda_1 \left(\beta(0) - \beta(T)\right) + \lambda_2 \left(\alpha(T) - \alpha(0)\right) \leq \frac{\beta(0) - \beta(T)}{T}, \tag{1.79}$$

atunci $\alpha(t) \leq A\left[u(t), v(t)\right]$ *şi* $\beta(t) \geq A\left[v(t), u(t)\right], t \in (0, T)$.

Demonstraţie: Fie $\delta_0 = \left(\alpha(T) - \alpha(0)\right), \eta_0 = \left(\beta(0) - \beta(T)\right)$. Se verifică uşor că

$$\alpha(t) \leq \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s, \alpha(s)) + \lambda_1\alpha(s) + g(s, \beta(s)) - \lambda_2\beta(s) + \gamma(s)\right]$$

$$+G_2(t,s)\left[f(s, \beta(s)) + \lambda_1\beta(s) + g(s, \alpha(s)) - \lambda_2\alpha(s) + \mu(s)\right] ds,$$

$$\beta(t) \geq \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s, \beta(s)) + \lambda_1\beta(s) + g(s, \alpha(s)) - \lambda_2\beta(s) + \mu(s)\right] +$$

$$+G_2(t,s)\left[f(s, \alpha(s)) + \lambda_1\alpha(s) + g(s, \beta(s)) - \lambda_2\beta(s) + \gamma(s)\right] ds,$$

unde

$$\gamma(s) = \frac{T-s}{T}\left(\lambda_1\delta_0 + \lambda_2\mu_0\right) - \frac{\delta_0}{T}, \mu(s) = \frac{\eta_0}{T} - \left(\lambda_1\eta_0 + \lambda_2\delta_0\right)\frac{T-s}{T}.$$

Din ipotezele $(1.78), (1.79)$ rezultă că $\gamma(s) \leq 0, \mu(s) \geq 0$, pentru orice $0 \leq s \leq T$, iar din concluziile lemei 1.4.63 rezultă ceea ce trebuia să demonstrăm, adică

$$\alpha(t) \leq A\left[u(t), v(t)\right] \text{ şi } \beta(t) \geq A\left[v(t), u(t)\right], t \in (0, T).$$

□

Observaţia 1.4.67. *Ipotezele lemei 1.4.66 sunt îndeplinite, dacă:*

$$T(\lambda_1 + \lambda_2) < \frac{\beta(0) - \beta(T)}{\alpha(T) - \alpha(0)} < 1.$$

De asemenea, condiţiile $(1.76) - (1.79)$ *împreună cu condiţiile* $(1.72), (1.73)$ *pot fi verificate simultan prin alegerea potrivită a lui* λ_1, λ_2, T.

Acum vom prezenta noul rezultat ce garantează existenţa şi unicitatea soluţiei pentru problema $(1.74) - (1.75)$.

Teorema 1.4.68. *Considerăm problema* $(1.74) - (1.75)$, *cu* $f, g \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *şi condiţiile* $(1.72), (1.73)$ *sunt îndeplinite. Presupunem că există soluţia dată de definiţia 1.4.65 pentru problema* $(1.74) - (1.75)$, *cu condiţiile* $(1.78), (1.79)$ *îndeplinite. Dacă ipotezele lemei 1.4.63 sunt verificate, atunci există o soluţie unică pentru problema* $(1.74) - (1.75)$.

Demonstraţie: Prima dată vom dovedi existenţa soluţiei pentru problema (1.74)–(1.75), arătând că operatorul $A : X \times X \to X$, are un punct fix cuplat în $X \times X$, prin verificarea ipotezelor teoremelor 1.2.34, 1.2.38. Din condiţiile (1.72), (1.73), cu $(u_1, v) \geq (u_2, v)$ avem

$$A\left[u_1, v\right](t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,u_1) + g(s,v) + \lambda_1 u_1 - \lambda_2 v\right]$$
$$+G_2(t,s)\left[f(s,v) + g(s,u_1) + \lambda_1 v - \lambda_2 u_1\right] ds$$
$$\geq A\left[u_2, v\right](t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,u_2) + g(s,v) + \lambda_1 u_2 - \lambda_2 v\right]$$
$$+G_2(t,s)\left[f(s,v) + g(s,u_2) + \lambda_1 v - \lambda_2 u_2\right] ds = A\left[u_2, v\right](t).$$

De asemenea, dacă $(u, v_1) \leq (u, v_2)$ atunci

$$A\left[u, v_1\right](t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,u) + g(s,v_1) + \lambda_1 u - \lambda_2 v_1\right]$$
$$+G_2(t,s)\left[f(s,v_1) + g(s,u) + \lambda_1 v_1 - \lambda_2 u\right] ds$$
$$\geq A\left[u, v_2\right](t) = \int_0^T G_1(t,s)\left[f(s,u) + g(s,v_2) + \lambda_1 u - \lambda_2 v_2\right]$$
$$+G_2(t,s)\left[f(s,v_2) + g(s,u) + \lambda_1 v_2 - \lambda_2 u\right] ds = A\left[u, v_2\right](t).$$

Deci $A[u, v]$ este monoton crescător în u şi monoton descrescător în v.

De asemenea, pentru $(x, y) \leq (u, v)$ cu $u \geq x$ şi $v \leq y$, avem

$$d\left(A[u,v], A[x,y]\right) = \sup\left|A[u,v](t) - A[x,y](t)\right| =$$
$$= \sup\left|\int_0^T G_1(t,s)\left\{\left[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v\right] - \left[f(s,x) + g(s,y) + \lambda_1 x - \lambda_2 y\right]\right\}\right.$$
$$\left. +G_2(t,s)\left\{\left[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u\right] - \left[f(s,y) + g(s,x) + \lambda_1 y - \lambda_2 x\right]\right\} ds\right|$$
$$= \sup\left|\int_0^T G_1(t,s)\left\{\left[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v\right] - \left[f(s,x) + g(s,y) + \lambda_1 x - \lambda_2 y\right]\right\}\right.$$
$$\left. -G_2(t,s)\left\{\left[f(s,y) + g(s,x) + \lambda_1 y - \lambda_2 x\right] - \left[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u\right]\right\} ds\right|$$
$$\leq \sup\left|\int_0^T G_1(t,s)\left[\mu_1(u-x) + \mu_2(y-v)\right] - G_2(t,s)\left[\mu_1(y-v) + \mu_2(u-x)\right] ds\right|$$
$$\leq \max\left\{\mu_1, \mu_2\right\} D\left((u,v),(x,y)\right) \sup\left|\int_0^T \left[G_1(t,s) - G_2(t,s)\right] ds\right|$$
$$= \frac{\max\left\{\mu_1, \mu_2\right\}}{\lambda_1 + \lambda_2} D\left((u,v),(x,y)\right).$$

Acest fapt dovedeşte că A verifică ipotezele teoremei 1.2.34 pentru

$$k = \frac{2\max\left\{\mu_1, \mu_2\right\}}{\lambda_1 + \lambda_2} < 1. \tag{1.80}$$

În final, $(\alpha, \beta) \in X$ este soluţie pentru problema (1.71).

Din lema 1.4.66, avem

$$\alpha(t) \leq A[u(t), v(t)], \beta(t) \geq A[v(t), u(t)], t \in (0, T).$$

În consecinţă, A are un punct fix cuplat în $X \times X$. Unicitatea reiese din teorema 1.2.38. □

Observaţia 1.4.69. *Berinde în lucrarea* [**23**] *a arătat că Teorema 1.4.68 are loc în condiţii mai puţin restrictive, şi anume atunci când constantele* $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ *satisfac condiţia*

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2} < 1. \tag{1.81}$$

Evident, dacă $\mu_1 \neq \mu_2$

$$\mu_1 + \mu_2 < 2 \max(\mu_1, \mu_2)$$

astfel că (1.80) *este mai tare decât* (1.81). *Exemplul din Berinde* [**23**].

CAPITOLUL 2

Puncte triple fixe pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

Organizarea acestui capitol este următoarea: introducem noile concepte, dăm rezultate de bază privind existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple fixe atât pentru operatori mixt-monotoni, cât şi pentru operatori monotoni, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate şi ilustrăm rezultatele teoretice cu exemple şi aplicaţii.

Capitolul în integralitate conţine contribuţii ale autorului, contribuţii ce constau în **7 definiţii**, **19 teoreme**, **4 propoziţii**, **6 exemple**, **1 aplicaţie**.

Rezultatele acestui capitol sunt cuprinse în lucrările:

[**31**] **Berinde, V.,Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Nonlinear Anal., 74, (2011) 4889-4897**;

[**39**] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*** **Carpathian J. Math. (Acceptat)**.

[**36**] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Aplied Mathematics and Computation, (Submitted)**;

[**37**] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Mathematics and Computers in Simulation, (Submitted)**;

[**38**] **Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (Submited)**;

Referinţele bibliografice ce stau la baza acestui capitol sunt: [**31**], [**38**], [**39**], [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**62**],[**19**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**96**], [**64**], [**97**], [**123**], [**124**], [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**46**], [**47**], [**57**], [**61**], [**83**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**137**], [**8**], [**10**], [**11**], [**64**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**70**], [**71**], [**78**], [**81**], [**87**], [**89**], [**94**], [**102**], [**104**], [**93**].

1. Puncte triple fixe pentru operatori mixt-monotoni

Acest paragraf este dedicat teoriei punctelor triple fixe pentru operatori mixt-monotoni, unde se prezintă în primul subparagraf, definiţiile pentru: spaţiul produs $X \times X \times X$ parţial ordonat, mixt-monotonia operatorului F, punct triplu fix, metrica spaţiului produs $X \times X \times X$, compunerea simetrică a doi operatori şi proprietăţiile acesteia. În subparagrafele 2.1.2 şi respectiv 2.1.3 sunt prezentate teoremele de existenţă şi respectiv teoremele de unicitate a punctelor fixe triple.

1.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Spaţiul produs $X \times X \times X$ este parţial ordonat dacă:

$$\text{pentru } (x,y,z), (u,v,w) \in X \times X \times X, (u,v,w) \leq (x,y,z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 2.1.1 (Borcut, [**38**])**.** *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi $F : X \times X \times X \to X$. Spunem că F este mixt-monoton dacă $F(x,y,z)$ este monoton crescător în x, şi z şi monoton descrescător în y, adică pentru orice $x, y, z \in X$,*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1, z) \geq F(x, y_2, z)$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, z_2 \leq z_1 \Rightarrow F(x, y, z_2) \geq F(x, y, z_1)$$

Definiţia 2.1.2 (Berinde-Borcut, [**31**])**.** *Un element $(x,y,z) \in X \times X \times X$ este punct triplu fix pentru operatorul F, dacă*

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,y) = y, F(z,y,x) = z.$$

Definiţia 2.1.3 (Berinde-Borcut, [**31**])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Pe spaţiul $X \times X \times X$, considerăm metrică funcţia $d : X \times X \times X \to X$ cu*

$$d[(x,y,z), (u,v,w)] = d(x,u) + d(y,v) + d(z,w).$$

Pentru a simplifica unele demonstraţii, definim compunerea simetrică a operatorilor cu trei variabile.

Definiţia 2.1.4 (Borcut, [**38**])**.** *Fie X, Y, Z mulţimi nevide şi $F : X \times X \times X \to Y$, $G : Y \times Y \times Y \to Z$. Definim compunerea simetrică (sau, s-compunerea) pentru F şi G, operatorul $G * F : X \times X \times X \to Z$, cu*

$$(G * F)(x,y,z) = G(F(x,y,z), F(y,x,y), F(z,y,x))\,(x,y,z \in X).$$

Pentru mulţimea nevidă X, notăm cu P_x funcţia proiecţie pe primul factor al produsului cartezian

$$P_X : X \times X \times X \to X, P(x,y,z) = x \text{ pentru } x, y, z \in X.$$

Compunerea simetrică are următoarele proprietăţi:

Propoziţia 2.1.5 (Borcut, [**38**]). *(Asociativitatea). Dacă* $F : X \times X \times X \to Y$, $G : Y \times Y \times Y \to Z$ *şi*

$$H : Z \times Z \times Z \to W, \text{ atunci } (H * G) * F = H * (G * F).$$

Propoziţia 2.1.6 (Borcut, [**38**]). *(Elementul neutru). Fie* $F : X \times X \times X \to Y$, *atunci*

$$F * P_X = P_Y * F = F.$$

Propoziţia 2.1.7 (Borcut, [**38**]). *(Mixt-monotonia). Dacă* $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$, $(Z, \leq)$ *sunt spaţii parţial ordonate şi operatorii* $F : X \times X \times X \to Y, G : Y \times Y \times Y \to Z$ *sunt mixt-monotoni, atunci* $G * F$ *este mixt-monoton.*

Propoziţia 2.1.8 (Borcut, [**38**]). *Dacă* $(X, \leq)$ *este parţial ordonat şi* F *este mixt-monoton, atunci* $F^n = F * F^{n-1} = F^{n-1} * F$ *este mixt-monoton pentru orice* n.

1.2. Teoreme de existenţă

În baza noilor definiţii introduse în subparagraful 2.1.1, în continuare vom prezenta 4 rezultate obţinute legate de existenţa punctelor fixe triple.

Teorema 2.1.9 (Borcut, [**38**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica* d *pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator continuu şi mixt-monoton . Presupunem că există* $k \in [0, 1)$, *astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \frac{k}{3}[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)] \tag{2.82}$$

$$\textit{pentru oricare } x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) \textit{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0), \tag{2.83}$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \textit{ şi } z = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Fie şirurile $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \subset X$ definite astfel

$$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0, y_0, z_0) = F(x_n, y_n, z_n), y_{n+1} = F^{n+1}(y_0, x_0, y_0) = F(y_n, x_n, y_n),$$

$$z_{n+1} = F^{n+1}(z_0, y_0, x_0) = F(z_n, y_n, x_n)(n = 0, 1, ...).$$

Deoarece F^n este mixt-monoton pentru orice n conform propoziţiei 2.1.8, şi folosind (2.83), deducem că $\{x_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt crescătoare, iar $\{y_n\}$ este descrescător . Acum, arătăm că pentru $n \in N$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k^n}{3}[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) + d(z_1, z_0)], \tag{2.84}$$

$$d\left(y_{n+1},y_n\right)\leq\frac{k^n}{3}\left[d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right], \tag{2.85}$$

$$d\left(z_{n+1},z_n\right)\leq\frac{k^n}{3}\left[d\left(z_1,z_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)\right]. \tag{2.86}$$

Într-adevar, pentru $n=1$, folosind (2.83), obţinem

$$\begin{aligned}d\left(x_2,x_1\right)&=d\left(F^2\left(x_0,y_0,z_0\right),F\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)\\&=d\left(F\left(F\left(x_0,y_0,z_0\right),F\left(y_0,x_0,y_0\right),F\left(z_0,y_0,x_0\right)\right),F\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)\\&\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right].\end{aligned}$$

Similar,

$$d\left(y_2,y_1\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right]$$

şi

$$d\left(z_2,z_1\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(z_1,z_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)\right].$$

Acum, presupunem că (2.84), (2.85) şi (2.86) sunt adevărate. Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F^n şi monotonia şirurilor $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}\subset X$ obţinem

$$\begin{aligned}d\left(x_{n+2},x_{n+1}\right)&=d\left(F^{n+2}\left(x_0,y_0,z_0\right),F^{n+1}\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)\\&=d\left[F\left(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1}\right),F\left(x_n,y_n,z_n\right)\right]\\&\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x_{n+1},x_n\right)+d\left(y_{n+1},y_n\right)+d\left(z_{n+1},z_n\right)\right]\\&\leq\frac{k^{n+1}}{3}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right].\end{aligned}$$

Similar, arătăm că

$$d\left(y_{n+2},y_{n+1}\right)\leq\frac{k^{n+1}}{3}\left[d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right]$$

şi

$$d\left(z_{n+2},z_{n+1}\right)\leq\frac{k^{n+1}}{3}\left[d\left(z_1,z_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)\right].$$

Cu ajutorul acestor inegalităţi, arătăm că $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy în X. Într-adevăr, fie $m\geq n$, atunci

$$\begin{aligned}d\left(x_m,x_n\right)&\leq d\left(x_m,x_{m-1}\right)+...+d\left(x_{n+1},x_n\right)\\&\leq\frac{k^{m-1}+...+k^n}{3}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right]\\&=\frac{k^n-k^m}{2\left(1-k\right)}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right]\\&<\frac{k^n}{2\left(1-k\right)}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right].\end{aligned}$$

Similar, se verifică faptul că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy . Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x,y,z\in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\lim_{n\to\infty}y_n=y,\lim_{n\to\infty}z_n=z.$$

În final, arătăm că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuă în (x, y, z), pentru $\frac{\epsilon}{3} > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) + d(z, w) < \delta \Rightarrow d(F(x, y, z), F(u, v, w)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deoarece

$$\lim_{x \to \infty} x_n = x, \lim_{x \to \infty} y_n = y, \lim_{x \to \infty} z_n = z,$$

pentru $\eta = min\left(\frac{\epsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$, există n_0, m_0, p_0, astfel încât pentru $n \geq n_0, m \geq m_0, p \geq p_0$,

$$d(x_n, x) < \eta, d(y_n, y) < \eta, d(z_n, z) < \eta.$$

Acum, pentru $n \in N, n \geq max\{n_0, m_0, p_0\}$,

$$d(F(x, y, z), x) \leq d(F(x, y, z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x)$$

$$= d(F(x, y, z), F(x_n, y_n, z_n)) + d(x_{n+1}, x) < \frac{\epsilon}{3} + \eta \leq \epsilon.$$

Acest fapt implică că $x = F(x, y, z)$. Similar, se arată că

$$y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

□

Acum ne punem problema dacă rezultatul anterior rămâne valabil prin eliminarea proprietăţii de continuitate a operatorului F. Concluzia teoremei va rămâne aceeaşi dacă spaţiului metric X i se va atribui o proprietate în plus, proprietate privind existenţa în X a două şiruri monotone, unul crescător şi unul descrescător, condiţie introdusă de Nieto şi R. Rodríguez-López în lucrarea [**96**], folosită şi de Bhaskar şi Lakshmikantham, în lucrarea [**62**]. Vom prezenta acest fapt în teorema următoare.

Teorema 2.1.10 (Borcut, [**38**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica d pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator mixt-monoton . Presupunem că există $k \in [0, 1)$ cu*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \frac{k}{3}[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)]$$

$$\text{pentru orice } x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Presupunem că pe X avem următoarele proprietăţi:

(*i*) *dacă există un şir crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,*

(*ii*) *dacă există un şir descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.*

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia Teoremei 2.1.9, rămâne să arătăm că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y, \lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

atunci există $n_1, n_2, n_3 \in N$, astfel încât pentru orice $n \geq n_1, m \geq n_2, p \geq n_3$, avem

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{4}, d(y_n, y) < \frac{\epsilon}{4}, d(z_n, z) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Dacă luăm $n \in \mathbb{N}, n \geq \{n_1, n_2, n_3\}$ şi ţinând cont că

$$x_n \leq x, y_n \geq y, z_n \leq z,$$

obţinem

$$\begin{aligned} d(F(x, y, z), x) &\leq d(F(x, y, z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) \\ &= d(F(x, y, z), F(x_n, y_n, z_n)) + d(x_{n+1}, x) \\ &\leq \frac{k}{3}[d(x, x_n) + d(y, y_n) + d(z, z_n)] + d(x, x_{n+1}) \\ \leq d(x, x_n) + d(y, y_n) + d(z, z_n) + d(x, x_{n+1}) &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon, \end{aligned}$$

ceea ce implică că $F(x, y, z) = x$.
Similar, arătăm că $d(y, F(y, x, y)) < \epsilon$ şi $d(z, F(z, y, x)) < \epsilon$, ceea ce implică faptul că

$$F(y, x, y) = y, \text{ şi } F(z, y, x) = z.$$

□

Acum vom prezenta anumite rezultate în ceea ce priveşte existenţa punctului fix triplu pentru un operator $F : X \times X \times X \to X$, unde $X \times X \times X$ este spaţiu produs parţial ordonat, generalizând contracţia de tip Picard astfel:

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq jd(x, u) + kd(y, v) + ld(z, w),$$

unde $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$.

Teorema 2.1.11 (Berinde-Borcut, [**31**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica* d *pe* X, *astfel încât* (X, d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *un operator continuu şi mixt-monoton . Presupunem că există* $j, k, l \in [0, 1)$ *cu* $j + k + l < 1$, *astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq jd(x, u) + kd(y, v) + ld(z, w), \tag{2.87}$$

pentru orice $x \geq u, y \leq v, z \geq w$. *Dacă există* $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Fie

$$x_1 = F(x_0, y_0, z_0) \geq x_0,$$

$$y_1 = F(y_0, x_0, y_0) \leq y_0$$

şi

$$z_1 = F(z_0, y_0, x_0) \geq z_0.$$

Atunci pentru $n \geq 1$, notăm

$$x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}),$$

$$y_n = F(y_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}), z_n = F(z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}). \tag{2.88}$$

Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F, se arată cu uşurinţă că

$$x_2 = F(x_1, y_1, z_1) \geq F(x_0, y_0, z_0) = x_1,$$

$$y_2 = F(y_1, x_1, y_1) \leq F(y_0, x_0, y_0) = y_1,$$

$$z_2 = F(z_1, y_1, x_1) \geq F(z_0, y_0, x_0) = z_1$$

şi astfel obţinem trei şiruri care îndeplinesc următoarele condiţii

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ...,$$

$$y_0 \geq y_1 \geq ... \geq y_n \geq ...,$$

$$z_0 \leq z_1 \leq ... \leq z_n \leq ....$$

Pentru a simplifica scrierea, notăm

$$D_n^x = d(x_{n-1}, x_n), D_n^y = d(y_{n-1}, y_n), D_n^z = d(z_{n-1}, z_n).$$

Folosind (2.87), obţinem

$$D_2^x = d(x_1, x_2) = d(F(x_0, y_0, z_0), F(x_1, y_1, z_1))$$

$$\leq jd(x_0, x_1) + kd(y_0, y_1) + ld(z_0, z_1) = jD_1^x + kD_1^y + lD_1^z.$$

Similar, se obţine

$$D_2^y \leq (j+l)D_1^y + kD_1^x + 0 \cdot D_1^z$$

$$D_2^z \leq jD_1^z + kD_1^y + lD_1^x$$

şi

$$D_3^x \leq \left(j^2 + k^2 + l^2\right) D_1^x + (2jk + 2kl) D_1^y + 2jlD_1^z,$$

$$D_3^y \leq (kl + 2jk) D_1^x + \left((j+l)^2 + k^2\right) D_1^y + klD_1^z,$$

$$D_3^z \leq \left(2jl + k^2\right) D_1^x + (2kj + 2kl) D_1^y + (j^2 + l^2)D_1^z.$$

Tot pentru o simplificare, considerăm matricea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix} \text{ notată cu } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & b_1 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\mathbf{A^2}=\begin{pmatrix} j^2+k^2+l^2 & 2jk+2kl & 2jl \\ kl+2jk & (j+l)^2+k^2 & kl \\ 2jl+k^2 & 2jk+2kl & j^2+l^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & b_2 & h_2 \end{pmatrix},$$

unde

$$a_2+b_2+c_2=d_2+e_2+f_2=g_2+b_2+h_2=(j+k+l)^2<j+k+l<1.$$

Acum vom demonstra prin inducţie că

$$\mathbf{A^n}=\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix},$$

unde

$$a_n+b_n+c_n=d_n+e_n+f_n=g_n+b_n+h_n=(j+k+l)^n<j+k+l<1. \tag{2.89}$$

Într-adevăr, dacă presupunem că (2.101) este adevărată pentru orice n, atunci avem

$$\mathbf{A^{n+1}}=\mathbf{A^nA}=\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ja_n+kb_n+lc_n & ka_n+(j+l)b_n+kc_n & la_n+jc_n \\ jd_n+ke_n+lf_n & kd_n+(j+l)e_n+kf_n & ld_n+jf_n \\ jg_n+kb_n+lh_n & kg_n+(j+l)b_n+kh_n & lg_n+jh_n \end{pmatrix},$$

cu

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1} &= a_nj+b_nk+c_nl+a_nk+b_nj+c_nk+a_nl+b_nl+c_nj \\ &= a_n(j+k+l)+b_n(k+j+l)+c_n(l+k+j) \\ &= (a_n+b_n+c_n)(j+k+l)=(j+k+l)^n(j+k+l) \\ &= (j+k+l)^{n+1}<j+k+l<1. \end{aligned}$$

Similar se obţine

$$d_{n+1}+e_{n+1}+f_{n+1}=g_{n+1}+b_{n+1}+h_{n+1}=(j+k+l)^{n+1}<j+k+l<1.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{pmatrix} D^x_{n+1} \\ D^y_{n+1} \\ D^z_{n+1} \end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} D^x_1 \\ D^y_1 \\ D^z_1 \end{pmatrix}.$$

Această inegalitate este echivalentă cu următoarele inegalităţi

$$D^x_{n+1} \leq a_n D^x_1 + b_n D^y_1 + c_n D^z_1, \tag{2.90}$$

$$D^y_{n+1} \leq d_n D^x_1 + e_n D^y_1 + f_n D^z_1, \tag{2.91}$$

$$D^z_{n+1} \leq g_n D^x_1 + b_n D^y_1 + h_n D^z_1. \tag{2.92}$$

Folosind (2.90), (2.91), şi (2.92), se arată cu mare uşurinţă că $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy . Într-adevăr, pentru $m > n$, obţinem

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) = D^x_m + D^x_{m-1} + ... + D^x_{n+1} \\ &\leq a_{m-1} D^x_1 + b_{m-1} D^y_1 + c_{m-1} D^z_1 + a_{m-2} D^x_1 + b_{m-2} D^y_1 + c_{m-2} D^z_1 \\ &+ \cdots + a_n D^x_1 + b_n D^y_1 + c_n D^z_1 = (a_n + a_{n+1} + ... + a_{m-1}) D^x_1 \\ &+ (b_n + b_{n+1} + ... + b_{m-1}) D^y_1 + (c_n + c_{n+1} + ... + c_{m-1}) D^z_1 \\ &+ \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{m-1}\right) D^x_1 + \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) D^y_1 \\ &+ \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) D^z_1 = \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) \\ &\cdot \left(D^x_1 + D^y_1 + D^z_1\right) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \left(D^x_1 + D^y_1 + D^z_1\right), \end{aligned}$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$, ceea ce arată că $\{x_n\}$ este şir Cauchy .

Asemănător se arată că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy . Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y, \lim_{n\to\infty} z_n = z. \tag{2.93}$$

În final, arătăm că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuu în (x, y, z), atunci pentru $\frac{\epsilon}{3} > 0$ fixat, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) + d(z, w) < \delta \Rightarrow d(F(x, y, z), F(u, v, w)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Folosind (2.105) şi luând $\eta = min\left(\frac{\epsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$, atunci există n_0, m_0, p_0 astfel încât, pentru $n \geq n_0, m \geq m_0, p \geq p_0$, avem

$$d(x_n, x) < \eta, d(y_n, y) < \eta, d(z_n, z) < \eta.$$

Fie $k_0 = max\{n_0, m_0, p_0\}$. Atunci, pentru orice număr întreg $n \geq k_0$, avem

$$\begin{aligned} d(F(x, y, z), x) &\leq d(F(x, y, z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) \\ &= d(F(x, y, z), F(x_n, y_n, z_n)) + d(x_{n+1}, x) < \frac{\epsilon}{3} + \eta \leq \epsilon, \end{aligned}$$

ceea ce implică faptul că $x = F(x, y, z)$.

Similar, se obţine $y = F(y, x, y)$ şi $z = F(z, y, x)$. □

În teorema următoare vom studia existenţa punctelor fixe triple pentru un operator care nu este continuu, dar spaţiul metric X are o proprietate în plus, legată de existenţa a două şiruri monotone.

Teorema 2.1.12 (Berinde-Borcut, [**31**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există metrica d pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator mixt-monoton . Presupunem că există $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$, astfel încât (2.87) este îndeplinită pentru orice $x \geq u, y \leq v, z \geq w$.*

Presupunem că X are următoarele proprietăţi:

$$(i)\ \text{dacă există un şir crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii)\ \text{dacă există un şir descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia teoremei 2.1.11, vom arăta fără continuitatea operatorului F că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0, z_0) = x, \lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0, y_0) = y, \lim_{n\to\infty} F^n(z_0, y_0, x_0) = z,$$

atunci există $n_1, n_2, n_3 \in N$, astfel încât, pentru orice $n \geq n_1, m \geq n_2, p \geq n_3$, avem

$$d(F^n(x_0, y_0, z_0), x) < \frac{\epsilon}{4}, d(F^m(y_0, x_0, y_0), y) < \frac{\epsilon}{4},$$
$$d(F^p(z_0, y_0, x_0), z) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Dacă luăm $n \in N, n \geq \{n_1, n_2, n_3\}$ şi folosind

$$F^n(x_0, y_0, z_0) \leq x, F^n(y_0, x_0, y_0) \geq y, F^n(z_0, y_0, x_0) \leq z,$$

obţinem

$$d(F(x, y, z), x) \leq d\left(F(x, y, z), F^{n+1}(x_0, y_0, z_0)\right) + d\left(F^{n+1}(x_0, y_0, z_0), x\right)$$
$$= d(F(x, y, z), F(F^n(x_0, y_0, z_0), F^n(y_0, x_0, y_0), F^n(z_0, y_0, x_0)))$$
$$+d\left(F^{n+1}(x_0, y_0, z_0), x\right) \leq jd(x, F^n(x_0, y_0, z_0)) + kd(y, F^n(y_0, x_0, y_0))$$
$$+ld(z, F^n(z_0, y_0, x_0)) + d\left(x, F^{n+1}(x_0, y_0, z_0)\right) \leq d(x, F^n(x_0, y_0, z_0))$$
$$+d(y, F^n(y_0, x_0, y_0)) + d(z, F^n(z_0, y_0, x_0)) + d\left(x, F^{n+1}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

$$< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Aceste inegalităţi dovedesc că $F(x, y, z) = x$. Pe aceeaşi procedură se arată că

$$d(y, F(y, x, y)) < \epsilon \text{ şi } d(z, F(z, y, x)) < \epsilon,$$

ceea ce implică faptul că $F(y, x, y) = y$, şi $F(z, y, x) = z$.

□

1.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

În lucrarea [**62**], autorii au prezentat, pe lângă rezultatele ce dovedesc existenţa punctului cuplat fix, şi rezultate care asigură unicitatea punctului cuplat fix. Pentru a obţine aceste rezultate, autorii au înzestrat spaţiul produs $X \times X$ cu o proprietate suplimentară legată de relaţia de ordine pe acest spaţiu.

Similar se va proceda pentru a obţine unicitatea punctului fix triplu, înzestrând spaţiul produs X^3, cu o proprietate suplimentară legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat acest spaţiu.

Teorema 2.1.13 (Borcut, [**38**]). *Dacă se adaugă la ipotezele teoremei 2.1.9 condiţia: pentru orice $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$ comparabil cu (x, y, z) şi cu (x_1, y_1, z_1), atunci există un unic punct fix triplu pentru operatorul F.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este încă un punct fix triplu pentru F, atunci arătăm că

$$d((x, y, z), (x^*, y^*, z^*)) = 0,$$

unde

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x, \lim_{x\to\infty} y_n = y, \lim_{x\to\infty} z_n = z.$$

Considerăm două cazuri:

Cazul 1. Dacă (x, y, z) este comparabil cu (x^*, y^*, z^*) cu respectarea relaţiei de ordine pe $X \times X \times X$, atunci, pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$(F^n(x, y, z), F^n(y, x, y), F^n(z, y, x)) = (x, y, z) \text{ este comparabil cu}$$

$$(F^n(x^*, y^*, z^*), F^n(y^*, x^*, y^*), F^n(z^*, y^*, x^*)) = (x^*, y^*, z^*).$$

De asemenea,

$$d((x, y, z), (x^*, y^*, z^*)) = d(x, x^*) + d(y, y^*) + d(z, z^*)$$

$$= d(F^n(x, y, z), F^n(x^*, y^*, z^*)) + d(F^n(y, x, y), F^n(y^*, x^*, y^*))$$

$$+d(F^n(z, y, x), F^n(z^*, y^*, x^*))$$

$$\leq k^n [d(x, x^*) + d(y, y^*) + d(z, z^*)] = k^n d((x, y, z), (y^*, x^*, z^*)).$$

Acest fapt implică $d((x, y, z), (y^*, x^*, z^*)) = 0$.

Cazul 2 : Dacă (x, y, z) nu este comparabil cu (x^*, y^*, z^*), atunci există $(u, v, w) \in$

$X \times X \times X$ limită inferioară sau limită superioară pentru (x, y, z) şi (x^*, y^*, z^*) . Atunci, pentru orice $n = 1, 2, ...,$

$$(F^n (u, v, w), F^n (v, u, v), F^n (w, v, u)) \text{ este comparabil cu}$$

$$(F^n (x, y, z), F^n (y, x, y), F^n (z, y, x)) = (x, y, z) \text{ şi cu}$$

$$(F^n (x^*, y^*, z^*), F^n (y^*, x^*, y^*), F^n (z^*, y^*, x^*)) = (x^*, y^*, z^*).$$

Acum, avem

$$d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}\right) \leq d\left(\begin{pmatrix} F^n (x, y, z) \\ F^n (y, x, y) \\ F^n (z, y, x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n (x^*, y^*, z^*) \\ F^n (y^*, x^*, y^*) \\ F^n (z^*, y^*, x^*) \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq d\left(\begin{pmatrix} F^n (x, y, z) \\ F^n (y, x, y) \\ F^n (z, y, x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n (u, v, w) \\ F^n (v, u.v) \\ F^n (w, v, u) \end{pmatrix}\right)$$

$$+d\left(\begin{pmatrix} F^n (u, v, w) \\ F^n (v, u, v) \\ F^n (w, v, u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n (x^*, y^*, z^*) \\ F^n (y^*, x^*, y^*) \\ F^n (z^*, y^*, x^*) \end{pmatrix}\right)$$

$$\leq k^n \{[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)] + [d(u, x^*) + d(v, y^*) + d(w, z^*)]\} \to 0$$

$$\text{când } n \to \infty, \text{ şi } d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

În următoarea teoremă vom presupune că orice triplet format cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X, atunci punctul triplu fix va fi unic cu componentele egale.

Teorema 2.1.14 (Borcut, [**38**]). *La ipotezele Teoremei 2.1.9 (respectiv ale Teoremei 2.1.10), adăugăm condiţia: presupunem că fiecare triplet format cu elemente din X au o limită inferioară sau o limită superioară în X. Atunci operatorul F are un unic punct triplu fix (x, y, z) şi $x = y = z$.*

Demonstraţie: Cazul 1. Dacă x, y, z sunt comparabile, atunci

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y), z = F(z, y, x) \text{ sunt comparabile şi avem:}$$

$$d(x, z) = d(F(x, y, z), F(z, y, x)) \leq \frac{k}{3} [d(x, z) + d(y, y) + d(z, x)] = \frac{2k}{3} d(x, z),$$

unde $k \in [0, 1)$, ceea ce implică că $d(x, z) = 0$, implicit $x = z$.

$$d(x, y) = d(F(x, y, z), F(y, x, y)) = d(F(x, y, x), F(y, x, y)) \leq kd(x, y),$$

deci avem $d(x, y) = 0$, şi implicit $x = y$. În final, am obţinut, $x = y = z$.

Cazul 2. Dacă x, y, z nu sunt comparabile, atunci există o limită inferioară sau o limită superioară pentru x, y şi z. Fie aceasta $u \in X$ comparabilă cu x, y şi z. Presupunem că relaţiile $x \leq u, y \leq u, z \leq u$ sunt adevărate. Atunci, avem

$$F(x,y,z) \leq F(u,y,z), F(y,x,y) \geq F(y,u,y) \text{ şi } F(z,y,x) \leq F(z,y,u),$$

$$F(u,y,z) \leq F(u,y,u), F(x,y,x) \geq F(u,y,u) \text{ şi } F(z,y,u) \leq F(u,y,u),$$

$$F(y,u,y) \leq F(u,y,u).$$

Folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F şi propoziţia 2.1.8, avem

$$F^n(x,y,z) \leq F^n(u,y,z), F^n(y,x,y) \geq F^n(y,u,y) \text{ şi } F^n(z,y,x) \leq F^n(z,y,u),$$

$$F^n(u,y,z) \leq F^n(u,y,u), F^n(x,y,x) \geq F^n(u,y,u) \text{ şi } F^n(z,y,u) \leq F^n(u,y,u),$$

$$F^n(y,u,y) \leq F^n(u,y,u).$$

Acum , având în vedere că

$$d(x,y) = d(F^{n+1}(x,y,z), F^{n+1}(y,x,y))$$

$$= d[F(F^n(x,y,z), F^n(y,x,y), F^n(z,y,x)), F(F^n(y,x,y), F^n(x,y,x), F^n(y,x,y))]$$

$$\leq d[F(F^n(x,y,z), F^n(y,x,y), F^n(z,y,x)), F(F^n(u,y,z), F^n(y,u,y), F^n(z,y,u))]$$

$$+ d[F(F^n(u,y,z), F^n(y,u,y), F^n(z,y,u)), F(F^n(u,y,u), F^n(y,u,y), F^n(u,y,u))]$$

$$+ d[F(F^n(y,x,y), F^n(x,y,x), F^n(y,x,y)), F(F^n(y,u,y), F^n(u,y,u), F^n(y,u,y))]$$

$$+ d[F(F^n(y,u,y), F^n(u,y,u), F^n(y,u,y)), F(F^n(u,y,u), F^n(y,u,y), F^n(u,y,u))],$$

şi folosind condiţia de contracţie pentru F, obţinem

$$d(x,y) \leq \frac{k}{3}\left[d(F^n(x,y,z), F^n(u,y,z)) + d(F^n(y,x,y), F^n(y,u,y)) \right.$$
$$\left. + \, d(F^n(z,y,x), F^n(z,y,u)) + ... + d(F^n(y,u,y), F^n(u,y,u))\right].$$

Folosind acest procedeu, în final obţinem

$$d(x,y) \leq k^{n+1}[d(x,u) + d(y,u) + d(z,u)] \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ şi } d(x,y) = 0.$$

Similar, obţinem că $d(x,z) = 0$, $d(y,z) = 0$. □

Dacă la ipotezele din Teoremele 2.1.9, 2.1.10 se adaugă faptul că x_0, y_0, z_0 sunt comparabile, atunci vom obţine iarăşi un rezultat de unicitate a punctului triplu fix, după cum vom vedea în teorema următoare.

Teorema 2.1.15 (Borcut, [**38**]). *La ipotezele Teoremei 2.1.9 (respectiv ale Teoremei 2.1.10, presupunem că $x_0, y_0, z_0 \in X$ sunt comparabile. Atunci $x = y = z$.*

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0, z_0, \in X$ cu

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \geq F(y_0, x_0, y_0), z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0).$$

Dacă $x_0 \leq y_0$, şi $z_0 \leq y_0$, atunci arătăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. şi $z_n \leq y_n$. Deoarece, F este mixt- monoton, avem

$$x_1 = F(x_0, y_0, z_0) \leq F(y_0, x_0, y_0) = y_1$$

şi

$$z_1 = F(z_0, y_0, x_0) \leq F(y_0, x_0, y_0) = y_1.$$

Presupunem că $x_n \leq y_n$ şi $z_n \leq y_n$ sunt adevărate. Acum, considerăm

$$\begin{aligned} x_{n+1} = F^{n+1}(x_0, y_0, z_0) &= F(F^n(x_0, y_0, z_0), F^n(y_0, x_0, y_0), F^n(z_0, y_0, x_0)) \\ &= F(x_n, y_n, z_n) \leq F(y_n, x_n, y_n) = y_{n+1}, \end{aligned}$$

şi similar pentru z_n. Folosind aceste inegalităti, avem

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_{n+1}) + d(y, x_{n+1}) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, y_{n+1}) + d(y, y_{n+1}) \\ &= d(x, F^{n+1}(x_0, y_0, z_0)) + d\left[F(F^n(x_0, y_0, z_0), F^n(y_0, x_0, y_0), F^n(z_0, y_0, x_0))\right. \\ &\left., F(F^n(y_0, x_0, y_0), F^n(x_0, y_0, x_0), F^n(y_0, x_0, y_0))\right] + d(y, y_{n+1}) \to 0 \text{ când } n \to \infty. \end{aligned}$$

Acest fapt implică faptul că $d(x, y) = 0$ şi $x = y$. Similar, obţinem $d(x, z) = 0$ şi $d(y, z) = 0$.

Se demonstrează la fel şi în celelalte cazuri de ordine pentru x_0, y_0, z_0. □

În continuare, vom demonstra că punctul triplu fix dat de Teoremele 2.1.11 şi 2.1.12 este unic, dacă spaţiului $X \times X \times X$ i se atribuie şi proprietatea suplimentară: pentru orice două triplete, există al treilea triplet comparabil cu amândouă.

Teorema 2.1.16 (Berinde-Borcut, [**31**]). *La ipotezele teoremei 2.1.11, dacă adăugăm condiţia: pentru orice $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$ care este comparabil cu (x, y, z) şi cu (x_1, y_1, z_1), atunci F are un unic punct fix triplu.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este încă un punct fix triplu pentru operatorul F, atunci vom arăta că

$$d((x, y, z), (x^*, y^*, z^*)) = 0,$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0, z_0) = x, \lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0, y_0) = y, \lim_{n\to\infty} F^n(z_0, y_0, x_0) = z.$$

Vom considera două cazuri:

Cazul 1. Dacă (x, y, z) este comparabil cu (x^*, y^*, z^*) cu relaţia de ordine din $X \times X \times X$, atunci, pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$(F^n(x, y, z), F^n(y, x, y), F^n(z, y, x)) = (x, y, z) \text{ este comparabil cu}$$

$$\left(F^n\left(x^*,y^*,z^*\right),F^n\left(y^*,x^*,y^*\right),F^n\left(z^*,y^*,x^*\right)\right)=\left(x^*,y^*,z^*\right).$$

De asemenea,

$$d\left(\left(x,y,z\right),\left(x^*,y^*,z^*\right)\right)=d\left(x,x^*\right)+d\left(y,y^*\right)+d\left(z,z^*\right)=d\left(F^n\left(x,y,z\right),F^n\left(x^*,y^*,z^*\right)\right)$$

$$+d\left(F^n\left(y,x,y\right),F^n\left(y^*,x^*,y^*\right)\right)+d\left(F^n\left(z,y,x\right),F^n\left(z^*,y^*,x^*\right)\right)$$

$$\leq\alpha^n\left[d\left(x,x^*\right)+d\left(y,y^*\right)+d\left(z,z^*\right)\right]=\alpha^n d\left(\left(x,y,z\right),\left(y^*,x^*,z^*\right)\right),$$

unde $\alpha=j+k+l<1$. Acest fapt implică faptul că $d\left(\left(x,y,z\right),\left(y^*,x^*,z^*\right)\right)=0$.

Cazul 2 : Dacă (x,y,z) nu este comparabil cu $\left(x^*,y^*,z^*\right)$, atunci există o limită inferioară sau o limită superioară $(u,v,w)\in X\times X\times X$ pentru (x,y,z) şi $\left(x^*,y^*,z^*\right)$. Atunci, pentru orice $n=1,2,...,$

$$\left(F^n\left(u,v,w\right),F^n\left(v,u,v\right),F^n\left(w,v,u\right)\right)\text{ este comparabil cu}$$

$$\left(F^n\left(x,y,z\right),F^n\left(y,x,y\right),F^n\left(z,y,x\right)\right)=\left(x,y,z\right)\text{ şi cu}$$

$$\left(F^n\left(x^*,y^*,z^*\right),F^n\left(y^*,x^*,y^*\right),F^n\left(z^*,y^*,x^*\right)\right)=\left(x^*,y^*,z^*\right).$$

Deci, vom avea,

$$d\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}\right)\leq d\left(\begin{pmatrix}F^n\left(x,y,z\right)\\F^n\left(y,x,y\right)\\F^n\left(z,y,x\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^n\left(x^*,y^*,z^*\right)\\F^n\left(y^*,x^*,y^*\right)\\F^n\left(z^*,y^*,x^*\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$\leq d\left(\begin{pmatrix}F^n\left(x,y,z\right)\\F^n\left(y,x,y\right)\\F^n\left(z,y,x\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^n\left(u,v,w\right)\\F^n\left(v,u,v\right)\\F^n\left(w,v,u\right)\end{pmatrix}\right)+d\left(\begin{pmatrix}F^n\left(u,v,w\right)\\F^n\left(v,u,v\right)\\F^n\left(w,v,u\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^n\left(x^*,y^*,z^*\right)\\F^n\left(y^*,x^*,y^*\right)\\F^n\left(z^*,y^*,x^*\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$\leq\alpha^n\left\{\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right]+\left[d\left(u,x^*\right)+d\left(v,y^*\right)+d\left(w,z^*\right)\right]\right\}\to 0$$

$$\text{când } n\to\infty,\text{ şi } d\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^*\\y^*\\z^*\end{pmatrix}\right)=0.$$

□

Dacă fiecare triplet format cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X, vom demonstra faptul că, componentele unicului punct fix triplu, sunt egale.

În următoarea teoremă vom stabili acest fapt.

Teorema 2.1.17 (Berinde-Borcut,[**31**]). *Dacă la ipotezele Teoremei 2.1.11 (respectiv ale Teoremei 2.1.12, presupunem că avem îndeplinită şi următoarea condiţie: orice triplet cu elemente din X au o limită superioară sau o limită inferioară în X. Atunci $x=y=z$.*

Demonstraţie: Cazul 1. Dacă x, y, z sunt comparabile, atunci

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, y), z = F(z, y, x) \text{ sunt comparabile şi avem}$$

$$d(x, z) = d(F(x, y, z), F(z, y, x)) \leq jd(x, z)+k\cdot 0+ld(z, x) \leq (j+k+l)d(x, z) < d(x, z),$$

implicând $d(x, z) = 0$, şi , $x = z$.

$$d(x, y) = d(F(x, y, z), F(y, x, y)) = d(F(x, y, x), F(y, x, y))$$

$$\leq jd(x, y) + kd(y, x) + ld(x, y) = (j + k + l)d(x, y) < d(x, y),$$

ceea ce dovedeşte că $d(x, y) = 0$, şi implicit, $x = y$. Deci, $x = y = z$.

Cazul 2. Dacă x, y, z nu sunt comparabile, atunci există o limită superioară sau o limită inferioară pentru x, y şi z. Fie această limită $u \in X$ comparabilă cu x, y şi z. Presupunem că $x \leq u, y \leq u, z \leq u$ sunt adevărate. Atunci, avem

$$F(x, y, z) \leq F(u, y, z), F(y, x, y) \geq F(y, u, y) \text{ şi } F(z, y, x) \leq F(z, y, u),$$

$$F(u, y, z) \leq F(u, y, u), F(x, y, x) \leq F(u, y, u)$$

$$\text{şi } F(z, y, u) \leq F(u, y, u), F(u, y, u) \geq F(y, u, y).$$

Folosind inegalităţile de mai sus şi proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F, vom avea:

$$F^2(x, y, z) = F(F(x, y, z), F(y, x, y), F(z, y, x)) \leq F(F(u, y, z), F(y, u, y), F(z, y, u))$$
$$= F^2(u, y, z), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(x, y, z) \leq F^2(u, y, z);$$
$$F^2(y, x, y) = F(F(y, x, y), F(x, y, x), F(y, x, y)) \geq F(F(y, u, y), F(u, y, u), F(y, u, y))$$
$$= F^2(y, u, y), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(y, x, y) \geq F^2(y, u, y);$$
$$F^2(z, y, x) = F(F(z, y, x), F(y, z, y), F(x, y, z)) \leq F(F(z, y, u), F(y, z, y), F(u, y, z))$$
$$= F^2(z, y, u), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(z, y, x) \leq F^2(z, y, u);$$
$$F^2(u, y, z) = F(F(u, y, z), F(y, u, y), F(z, y, u)) \leq F(F(u, y, u), F(y, u, y), F(u, y, u))$$
$$= F^2(u, y, u), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(u, y, z) \leq F^2(u, y, u);$$
$$F^2(z, y, u) = F(F(z, y, u), F(y, z, y), F(u, y, z)) \leq F(F(u, y, u), F(y, u, y), F(u, y, u))$$
$$= F^2(u, y, u), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(z, y, u) \leq F^2(u, y, u);$$
$$F^2(x, y, x) = F(F(x, y, x), F(y, x, y), F(x, y, x)) \leq F(F(u, y, u), F(y, u, y), F(u, y, u))$$
$$= F^2(u, y, u), \text{ ceea ce implică faptul că } F^2(x, y, x) \leq F^2(u, y, u).$$

Prin inducţie matematică se obţin relaţii similare, pentru orice $n > 2$. Acum, având în vedere că

$$d(x, y) = d(F^{n+1}(x, y, z), F^{n+1}(y, x, y))$$
$$= d[F(F^n(x, y, z), F^n(y, x, y), F^n(z, y, x)), F(F^n(y, x, y), F^n(x, y, x), F^n(y, x, y))]$$
$$\leq d[F(F^n(x, y, z), F^n(y, x, y), F^n(z, y, x)), F(F^n(u, y, z), F^n(y, u, y), F^n(z, y, u))]$$
$$+d[F(F^n(u, y, z), F^n(y, u, y), F^n(z, y, u)), F(F^n(u, y, u), F^n(y, u, y), F^n(u, y, u))]$$

$$+d[F(F^n(y,x,y),F^n(x,y,x),F^n(y,x,y)),F(F^n(y,u,y),F^n(u,y,u),F^n(y,u,y))]$$

$$+d[F(F^n(y,u,y),F^n(u,y,u),F^n(y,u,y)),F(F^n(u,y,u),F^n(y,u,y),F^n(u,y,u))],$$

şi folosind condiţia de contracţie pentru F obţinem

$$d(x,y) \leq jd(F^n(x,y,z),F^n(u,y,z)) + kd(F^n(y,x,y),F^n(y,u,y))$$

$$+ld(F^n(z,y,x),F^n(z,y,u)) + \cdots + ld(F^n(y,u,y),F^n(u,y,u))].$$

Procedând în acest mod, în final obţinem

$$d(x,y) \leq \alpha^{n+1}[d(x,u)+d(y,u)+d(z,u)] \to 0 \text{ as } n \to \infty, \text{ şi } d(x,y)=0.$$

Similar, se arată că $d(x,z)=0, d(y,z)=0$. □

Teorema 2.1.18 (Berinde-Borcut, [**31**]). *În condiţiile Teoremei 2.1.11 (respectiv ale Teoremei 2.1.12), presupunem că $x_0, y_0, z_0 \in X$ sunt comparabile. Atunci, $x=y=z$.*

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0, z_0, \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0,y_0,z_0), y_0 \geq F(y_0,x_0,z_0), z_0 \leq F(z_0,y_0,x_0).$$

Dacă $x_0 \leq y_0$, şi $z_0 \leq y_0$, demonstrăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$ şi $z_n \leq y_n$. Într-adevăr, folosind proprietatea de mixt-monotonie a operatorului F, avem

$$x_1 = F(x_0,y_0,z_0) \leq F(y_0,x_0,y_0) = y_1$$

şi

$$z_1 = F(z_0,y_0,x_0) \leq F(y_0,x_0,y_0) = y_1.$$

Presupunem că $x_n \leq y_n$ şi $z_n \leq y_n$ sunt adevărate. Atunci,

$$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0,y_0,z_0) = F(F^n(x_0,y_0,z_0),F^n(y_0,x_0,y_0),F^n(z_0,y_0,x_0))$$

$$= F(x_n,y_n,z_n) \leq F(y_n,x_n,y_n) = y_{n+1},$$

şi similar pentru z_n. Acum, avem

$$d(x,y) \leq d(x,F^{n+1}(x_0,y_0,z_0)) + d(y,F^{n+1}(x_0,y_0,z_0))$$

$$\leq d(x,F^{n+1}(x_0,y_0,z_0)) + d(F^{n+1}(x_0,y_0,z_0),F^{n+1}(y_0,x_0,y_0)) + d(y,F^{n+1}(y_0,x_0,y_0))$$

$$= d(x,F^{n+1}(x_0,y_0,z_0)) + d[F(F^n(x_0,y_0,z_0),F^n(y_0,x_0,y_0),F^n(z_0,y_0,x_0)),$$

$$,F(F^n(y_0,x_0,y_0),F^n(x_0,y_0,x_0),F^n(y_0,y_0,x_0))] + d(y,F^{n+1}(y_0,x_0,y_0))$$

$$\leq d(x,F^{n+1}(x_0,y_0,z_0)) + \alpha^{n+1}\left[d(x_0,y_0)+d(y_0,z_0)\right] + d(y,F^{n+1}(y_0,x_0,y_0)) \to 0$$

cînd $n \to \infty$. Acest fapt implică că $d(x,y)=0$ şi prin urmare $x=y$. Similar, obţinem că $d(x,z)=0$ şi $d(y,z)=0$.

În celelalte cazuri de ordine între x_0, y_0, z_0 se demonstrează similar. □

Exemplul 2.1.19. *Fie $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ şi $F(x,y,z)=\frac{2x-3y+4z+1}{12}$.*

Acest operator este mixt-monoton, are un unic punct triplu fix $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ şi verifică ipotezele teoremei 2.1.11, demonstraţie prezentată în paragraful 2.3.1.

Exemplul 2.1.20. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ *şi* $F(x,y,z) = \frac{2x+2y+2z+1}{12}$.

Pentru operatorul din acest exemplu nu se pot aplica teoremele obţinute, deoarece F nu este mixt-monoton, dar este monoton. Totuşi F are punct triplu fix unic pe $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. De aceea se impune o teorie a punctelor triple fixe şi pentru această clasă de operatori. Aceasta se face în paragraful următor.

2. Puncte triple fixe pentru operatori monotoni

În acest paragraf vom prezenta rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe triple pentru operatori monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Spaţiul produs $X \times X \times X$ pe care este definit operatorul F, îl vom defini ca parţial ordonat ca şi în paragraful anterior, metrica cu care vom opera este aceeaşi, dar în schimb, operatorul nu este mixt-monoton, ci monoton, iar punctul triplu fix are o altă formă.

2.1. Definiţii

Fie$(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Spaţiul produs $X \times X \times X$ este parţial ordonat dacă: pentru $(x,y,z), (u,v,w) \in X \times X \times X$,

$$(u,v,w) \leq (x,y,z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 2.2.21 (Borcut, [**39**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi operatorul* $F : X \times X \times X \ \to X$. *Spunem că* F *este monoton, dacă* $F(x,y,z)$ *este monoton crescătoare în* x, y *şi* z*, adică: pentru orice* $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ *avem*

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_1, z) \leq F(x, y_2, z),$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, z_1 \leq z_2 \Rightarrow F(x, y, z_1) \leq F(x, y, z_2).$$

Definiţia 2.2.22 (Borcut, [**39**]). *Un element* $(x,y,z) \in X \times X \times X$ *este punct fix triplu pentru* $F : X \times X \times X \ \to X$*, dacă*

$$F(x,y,z) = x, F(y,x,z) = y, \text{ şi } F(z,y,x) = z.$$

Observaţia 2.2.23. *Noţiunea de punct fix triplu din acest context este diferită de cea din secţiunea anterioară.*

2.2. Teoreme de existenţă

Teorema 2.2.24 (Borcut, [**39**]). *Fie $(X,\leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F:X\times X\times X\to X$ un operator continu şi monoton pe X. Presupunem că există $k\in[0,1)$, astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right] \tag{2.94}$$

pentru orice $x\geq u, y\leq v, z\geq w$.

Dacă există $x_0,y_0,z_0\in X$, astfel încât

$$x_0\leq F\left(x_0,y_0,z_0\right),y_0\leq F\left(y_0,x_0,z_0\right)\ \text{şi}\ z_0\leq F\left(z_0,y_0,x_0\right), \tag{2.95}$$

atunci există $x,y,z\in X$, astfel încât

$$x=F\left(x,y,z\right),y=F\left(y,x,z\right)\ \text{şi}\ z=F\left(z,y,x\right).$$

Demonstraţie: Fie şirurile $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}\subset X$ definite astfel

$$x_{n+1}=F^{n+1}(x_0,y_0,z_0)=F(x_n,y_n,z_n),y_{n+1}=F^{n+1}(y_0,x_0,z_0)=F(y_n,x_n,z_n),$$

$$z_{n+1}=F^{n+1}(z_0,y_0,x_0)=F(z_n,y_n,x_n),(n=0,1,...).$$

Deoarece F^n este monoton pentru orice n [propoziţia 2.1.8], şi folosind relaţia (2.95) se arată cu uşurinţă că $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt crescătoare. Acum, arătăm că pentru $n\in\mathbb{N}$,

$$d\left(x_{n+1},x_n\right)\leq\frac{k^n}{3}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right] \tag{2.96}$$

$$d\left(y_{n+1},y_n\right)\leq\frac{k^n}{3}\left[d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right] \tag{2.97}$$

$$d\left(z_{n+1},z_n\right)=d\Big(F^{n+1}\left(z_0,y_0,x_0\right),F^n\left(z_0,y_0,x_0\right)\Big)\leq$$

$$d\left(z_{n+1},z_n\right)\leq\frac{k^n}{3}\left[d\left(z_1,z_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)\right] \tag{2.98}$$

Într-adevăr, pentru $n=1$, folosind (2.95), obţinem

$$d\left(x_2,x_1\right)=d\Big(F^2\left(x_0,y_0,z_0\right),F\left(x_0,y_0,z_0\right)\Big)=$$

$$=d\left(F\left(F\left(x_0,y_0,z_0\right),F\left(y_0,x_0,z_0\right),F\left(z_0,y_0,x_0\right)\right),F\left(x_0,y_0,z_0\right)\right)\leq$$

$$\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x_1,x_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right].$$

Similar,

$$d\left(y_2,y_1\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)+d\left(z_1,z_0\right)\right]$$

şi

$$d\left(z_2,z_1\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(z_1,z_0\right)+d\left(y_1,y_0\right)+d\left(x_1,x_0\right)\right].$$

Presupunem că (2.96), (2.97) şi (2.98) sunt adevărate. Folosind proprietatea de monotonie a operatorului F^n şi monotonia şirurilor $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\} \subset X$, obţinem

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d\left(F^{n+2}(x_0, y_0, z_0), F^{n+1}(x_0, y_0, z_0)\right) =$$
$$= d[F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}), F(x_n, y_n, z_n)] \leq$$
$$\leq \frac{k}{3}[d(x_{n+1}, x_n) + d(y_{n+1}, y_n) + d(z_{n+1}, z_n)] \leq$$
$$\leq \frac{k^{n+1}}{3}[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) + d(z_1, z_0)].$$

Similar, arătăm că

$$d(y_{n+2}, y_{n+1}) \leq \frac{k^{n+1}}{3}[d(y_1, y_0) + d(x_1, x_0) + d(z_1, z_0)]$$

şi

$$d(z_{n+2}, z_{n+1}) \leq \frac{k^{n+1}}{3}[d(z_1, z_0) + d(y_1, y_0) + d(x_1, x_0)].$$

Cu ajutorul acestor inegalităţi, vom arăta că $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy în X. Într-adevăr, fie $m \geq n$, atunci

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq \frac{k^{m-1} + ... + k^n}{3}[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) + d(z_1, z_0)] =$$
$$= \frac{k^n - k^m}{2(1-k)}[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) + d(z_1, z_0)] <$$
$$< \frac{k^n}{2(1-k)}[d(x_1, x_0) + d(y_1, y_0) + d(z_1, z_0)].$$

Similar, arătăm că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy. Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x, \lim_{x\to\infty} y_n = y, \lim_{x\to\infty} z_n = z.$$

În final, arătăm că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuă în (x, y, z), atunci pentru $\frac{\epsilon}{3} > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) + d(z, w) < \delta \Rightarrow d(F(x, y, z), F(u, v, w)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x, \lim_{x\to\infty} y_n = y, \lim_{x\to\infty} z_n = z,$$

pentru $\eta = min\left(\frac{\epsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$, există n_0, m_0, p_0, astfel încât pentru $n \geq n_0, m \geq m_0, p \geq p_0$,

$$d(x_n, x) < \eta, d(y_n, y) < \eta, d(z_n, z) < \eta.$$

Acum, pentru $n \in \mathbb{N}, n \geq max\{n_0, m_0, p_0\}$,

$$d(F(x, y, z), x) \leq d(F(x, y, z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) =$$

$$= d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(x_n,y_n,z_n\right)\right)+d\left(x_{n+1},x\right)<\frac{\epsilon}{3}+\eta\leq\epsilon.$$

Această relaţie implică faptul că $x = F\left(x,y,z\right)$. Similar, se arată că

$$y = F\left(y,x,z\right) \text{ şi } z = F\left(z,y,x\right).$$

□

Ne punem problema acum, dacă rezultatul anterior rămâne valabil atunci când F nu este continuă. Răspunsul este afirmativ dacă spaţiul produs $X\times X\times X\to X$ este înzestrat cu o condiţie suplimentară, condiţie ce impune existenţa unui şir monoton convergent. Următoarea teoremă redă cele menţionate.

Teorema 2.2.25 (Borcut, [**39**])**.** *Fie*$(X,\leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X,d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F: X\times X\times X\to X$ *un operator monoton pe* X. *Presupunem că există* $k\in[0,1)$, *astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right]$$

$$\textit{pentru orice } x\geq u, y\leq v, z\geq w.$$

Presupunem că avem următoarea proprietate pe X*:*

(i) *dacă există şirul crescător* $\{x_n\}\to x$, *atunci* $x_n\leq x$ *pentru orice* n.

Dacă există $x_0,y_0,z_0\in X$, *astfel încât*

$$x_0\leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), y_0\leq F\left(y_0,x_0,z_0\right) \textit{ şi } z_0\leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x,y,z\in X$, *astfel încât*

$$x=F\left(x,y,z\right), y=F\left(y,x,z\right) \textit{ şi } z=F\left(z,y,x\right).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia teoremei 2.2.24, noi trebuie doar să arătăm că

$$x=F\left(x,y,z\right), y=F\left(y,x,z\right) \text{ şi } z=F\left(z,y,x\right).$$

Fie $\epsilon>0$. Deoarece

$$\lim_{x\to\infty}x_n=x, \lim_{x\to\infty}y_n=y, \lim_{x\to\infty}z_n=z,$$

există $n_1,n_2,n_3\in N$ astfel încât , pentru orice $n\geq n_1, m\geq n_2, p\geq n_3$, avem

$$d\left(x_n,x\right)<\frac{\epsilon}{4}, d\left(y_n,y\right)<\frac{\epsilon}{4}, d\left(z_n,z\right)<\frac{\epsilon}{4}.$$

Luând $n\in\mathbb{N}, n\geq\{n_1,n_2,n_3\}$ şi folosind inegalităţile

$$x_n\leq x, y_n\leq y, z_n\leq z,$$

obţinem

$$d\left(F\left(x,y,z\right),x\right)\leq d\left(F\left(x,y,z\right),x_{n+1}\right)+d\left(x_{n+1},x\right)=$$

$$=d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(x_n,y_n,z_n\right)\right)+d\left(x_{n+1},x\right)\leq$$

$$\leq \frac{k}{3}\left[d\left(x,x_n\right)+d\left(y,y_n\right)+d\left(z,z_n\right)\right]+d\left(x,x_{n+1}\right)\leq$$

$$\leq d\left(x,x_n\right)+d\left(y,y_n\right)+d\left(z,z_n\right)+d\left(x,x_{n+1}\right)<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon,$$

Ceea ce implică faptul că $F\left(x,y,z\right)=x$.
Similar, se arată că $d\left(y,F\left(y,x,z\right)\right)<\epsilon$ şi $d\left(z,F\left(z,y,x\right)\right)<\epsilon$. În final avem

$$F\left(y,x,z\right)=y,\ \text{şi}\ F\left(z,y,x\right)=z.$$

Dacă în teoremele 2.2.24 şi 2.2.25, condiţia de contracţie (2.94) este înlocuită cu o condiţie ce o generalizează şi este de forma:

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right),$$

$\forall x\geq u, y\leq v, z\geq w$, atunci vom vedea în următoarele două teoreme că, rămâne aceeaşi concluzie. □

Teorema 2.2.26 (Borcut, [**39**]). *Fie*$(X,\leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi* d *o metrică pe* X, *astfel încât* (X,d) *este spaţiu metric complet. Fie* $F:X\times X\times X\to X$ *un operator continuu şi monoton pe* X. *Presupunem că există constantele* $j,k,l\in[0,1)$ *cu* $j+k+l<1$, *astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right), \tag{2.99}$$

$\forall x\geq u, y\leq v, z\geq w$. *Dacă există* $x_0,y_0,z_0\in X$ *astfel încât*

$$x_0\leq F\left(x_0,y_0,z_0\right),y_0\leq F\left(y_0,x_0,z_0\right)\ \text{şi}\ z_0\leq F\left(z_0,y_0,x_0\right),$$

atunci există $x,y,z\in X$ *astfel încât*

$$x=F\left(x,y,z\right),y=F\left(y,x,z\right)\ \text{şi}\ z=F\left(z,y,x\right).$$

Demonstraţie: Notăm

$$x_1=F\left(x_0,y_0,z_0\right)\geq x_0,$$

$$y_1=F\left(y_0,x_0,z_0\right)\geq y_0$$

şi

$$z_1=F\left(z_0,y_0,x_0\right)\geq z_0.$$

Pentru $n\geq 1$, notăm

$$x_n=F\left(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}\right),$$

$$y_n=F\left(y_{n-1},x_{n-1},z_{n-1}\right),z_n=F\left(z_{n-1},y_{n-1},x_{n-1}\right). \tag{2.100}$$

Datorată proprietăţii de monotonie a operatorului F, se arată cu uşurinţă că

$$x_2=F\left(x_1,y_1,z_1\right)\geq F\left(x_0,y_0,z_0\right)=x_1$$

$$y_2=F\left(y_1,x_1,z_1\right)\geq F\left(y_0,x_0,z_0\right)=y_1$$

$$z_2=F\left(z_1,y_1,x_1\right)\geq F\left(z_0,y_0,x_0\right)=z_1$$

si astfel vom obţine trei şiruri care îndeplinesc următoarele condiţii

$$x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq ...,$$

$$y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_n \leq ...,$$

$$z_0 \leq z_1 \leq ... \leq z_n \leq ....$$

Pentru o simplificare de scriere, notăm

$$D_n^x = d(x_{n-1}, x_n), D_n^y = d(y_{n-1}, y_n), D_n^z = d(z_{n-1}, z_n).$$

Folosind relaţia (2.99), obţinem

$$D_2^x = d(x_1, x_2) = d\left(F\left(x_0, y_0, z_0\right), F\left(x_1, y_1, z_1\right)\right)$$

$$\leq jd\left(x_0, x_1\right) + kd\left(y_0, y_1\right) + ld\left(z_0, z_1\right) = jD_1^x + kD_1^y + lD_1^z.$$

Similar, se obţine

$$D_2^y \leq jD_1^y + kD_1^x + lD_1^z$$

$$D_2^z \leq jD_1^z + kD_1^y + lD_1^x$$

şi

$$D_3^x \leq \left(j^2 + k^2 + l^2\right) D_1^x + \left(2jk + kl\right) D_1^y + (2jl + kl)D_1^z,$$

$$D_3^y \leq \left(2jk + l^2\right) D_1^x + \left(j^2 + k^2 + kl\right) D_1^y + (2jl + kl)D_1^z,$$

$$D_3^z \leq \left(2jl + k^2\right) D_1^x + \left(2kj + kl\right) D_1^y + (j^2 + l^2 + kl)D_1^z.$$

Fie matricea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix} \text{ notată cu } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & c_1 \\ f_1 & b_1 & g_1 \end{pmatrix}$$

atunci

$$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} j^2 + k^2 + l^2 & 2jk + kl & 2jl + kl \\ l^2 + 2jk & j^2 + k^2 + kl & kl + 2jl \\ 2jl + k^2 & 2jk + kl & j^2 + l^2 + kl \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & c_2 \\ f_2 & b_2 & g_2 \end{pmatrix},$$

unde

$$a_2 + b_2 + c_2 = d_2 + e_2 + c_2 = f_2 + b_2 + g_2 = (j + k + l)^2 < j + k + l < 1.$$

Vom demonstra prin inducţie că

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & c_n \\ f_n & b_n & g_n \end{pmatrix},$$

unde

$$a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + c_n = f_n + b_n + g_n = (j + k + l)^n < 1. \tag{2.101}$$

Într-adevăr, dacă presupunem că (2.101) este adevărată pentru n, atunci

$$\mathbf{A^{n+1}} = \mathbf{A^n A} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & c_n \\ f_n & b_n & g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ja_n + kb_n + lc_n & ka_n + jb_n + kc_n & la_n + lb_n + jc_n \\ jd_n + ke_n + lc_n & kd_n + je_n + kc_n & ld_n + le_n + jc_n \\ jf_n + kb_n + lg_n & kf_n + jb_n + kg_n & lf_n + lb_n + jg_n \end{pmatrix},$$

şi

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} &= ja_n + kb_n + lc_n + ka_n + jb_n + kc_n + la_n + lb_n + jc_n \\ &= a_n (j + k + l) + b_n (k + j + l) + c_n (l + k + j) \\ &= (a_n + b_n + c_n) (j + k + l) = (j + k + l)^n (j + k + l) \\ &= (j + k + l)^{n+1} < j + k + l < 1. \end{aligned}$$

Similar se arată că

$$d_{n+1} + e_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1} + b_{n+1} + g_{n+1} = (j + k + l)^{n+1} < j + k + l < 1.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{pmatrix} D^x_{n+1} \\ D^y_{n+1} \\ D^z_{n+1} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} D^x_1 \\ D^y_1 \\ D^z_1 \end{pmatrix}.$$

Această inegalitate este echivalentă cu următoarele inegalităţi

$$D^x_{n+1} \leq a_n D^x_1 + b_n D^y_1 + c_n D^z_1, \tag{2.102}$$

$$D^y_{n+1} \leq d_n Dx_1 + e_n D^y_1 + c_n D^z_1, \tag{2.103}$$

$$D^z_{n+1} \leq f_n D^x_1 + b_n D^y_1 + g_n D^z_1. \tag{2.104}$$

Folosind (2.102), (2.103), şi (2.104), vom arăta cu uşurinţă că $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy . Într-adevăr, pentru $m > n$, avem

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) = D^x_m + D^x_{m-1} + ... + D^x_{n+1} \\ &\leq a_{m-1} D^x_1 + b_{m-1} D^y_1 + c_{m-1} D^z_1 + a_{m-2} D^x_1 + b_{m-2} D^y_1 + c_{m-2} D^z_1 \\ &+ \cdots + a_n D^x_1 + b_n D^y_1 + c_n D^z_1 = (a_n + a_{n+1} + ... + a_{m-1}) D^x_1 \\ &+ (b_n + b_{n+1} + ... + b_{m-1}) D^y_1 + (c_n + c_{n+1} + ... + c_{m-1}) D^z_1 \end{aligned}$$

$$\leq \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{m-1}\right) D^x_1 + \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) D^y_1 + \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) D^z_1$$

$$= \left(\alpha^n + \alpha^{n+1} + ... + \alpha^{m-1}\right) \cdot (D^x_1 + D^y_1 + D^z_1) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} (D^x_1 + D^y_1 + D^z_1),$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$, ceea ce arată că $\{x_n\}$ este şir Cauchy . Similar, se arată că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy . Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y, \lim_{n\to\infty} z_n = z. \tag{2.105}$$

În final, arătăm că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece F este continuă în (x, y, z), iar pentru $\frac{\epsilon}{3} > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât

$$d(x, u) + d(y, v) + d(z, w) < \delta \Rightarrow d(F(x, y, z), F(u, v, w)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Folosind (2.105), iar pentru $\eta = min\left(\frac{\epsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$, există n_0, m_0, p_0, astfel încât pentru $n \geq n_0, m \geq m_0, p \geq p_0$, avem

$$d(x_n, x) < \eta, d(y_n, y) < \eta, d(z_n, z) < \eta.$$

Acum, luăm $k_0 = max\{n_0, m_0, p_0\}$. Atunci, pentru orice număr natural $n \geq k_0$, avem

$$d(F(x, y, z), x) \leq d(F(x, y, z), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x) =$$
$$= d(F(x, y, z), F(x_n, y_n, z_n)) + d(x_{n+1}, x) < \frac{\epsilon}{3} + \eta \leq \epsilon.$$

Acest fapt implică faptul că $x = F(x, y, z)$.

Similar, se arată că $y = F(y, x, z)$ şi $z = F(z, y, x)$. □

Teorema 2.2.27 (Borcut, [**39**]). *Fie$(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator monoton pe X. Presupunem că există constantele $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$, astfel încât condiţia de contracţie (2.99) este verificată pentru orice $x \geq u, y \leq v, z \geq w$. Presupunem că X are următoarea proprietate:*

(*i*) *dacă există un şir crescător cu $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n.*

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$x_0 \leq F(x_0, y_0, z_0), y_0 \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } z_0 \leq F(z_0, y_0, x_0),$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia teoremei 2.2.26, rămâne de demonstrat că

$$x = F(x, y, z), y = F(y, x, z) \text{ şi } z = F(z, y, x).$$

Fie $\epsilon > 0$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0, z_0) = x, \lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0, z_0) = y, \lim_{n\to\infty} F^n(z_0, y_0, x_0) = z,$$

atunci există $n_1, n_2, n_3 \in N$, astfel încât pentru orice $n \geq n_1, m \geq n_2, p \geq n_3$, avem

$$d\left(F^n\left(x_0, y_0, z_0\right), x\right) < \frac{\epsilon}{4}, d\left(F^m\left(y_0, x_0, z_0\right), y\right) < \frac{\epsilon}{4}, d\left(F^p\left(z_0, y_0, x_0\right), z\right) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Luând $n \in \mathbb{N}, n \geq \{n_1, n_2, n_3\}$ şi folosind

$$F^n\left(x_0, y_0, z_0\right) \leq x, F^n\left(y_0, x_0, y_0\right) \leq y, F^n\left(z_0, y_0, x_0\right) \leq z,$$

vom avea

$$\begin{aligned}
d\left(F\left(x, y, z\right), x\right) &\leq d\left(F\left(x, y, z\right), F^{n+1}\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) + d\left(F^{n+1}\left(x_0, y_0, z_0\right), x\right) \\
&= d\left(F\left(x, y, z\right), F\left(F^n\left(x_0, y_0, z_0\right), F^n\left(y_0, x_0, z_0\right), F^n\left(z_0, y_0, x_0\right)\right)\right) \\
&+ d\left(F^{n+1}\left(x_0, y_0, z_0\right), x\right) \leq jd\left(x, F^n\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) + kd\left(y, F^n\left(y_0, x_0, z_0\right)\right) \\
&+ ld\left(z, F^n\left(z_0, y_0, x_0\right)\right) + d\left(x, F^{n+1}\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) \\
&\leq d\left(x, F^n\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) + d\left(y, F^n\left(y_0, x_0, z_0\right)\right) + d\left(z, F^n\left(z_0, y_0, x_0\right)\right) \\
&+ d\left(x, F^{n+1}\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Acest fapt implică faptul că $F\left(x, y, z\right) = x$.
Similar, se demonstrează că $d\left(y, F\left(y, x, z\right)\right) < \epsilon$ şi $d\left(z, F\left(z, y, x\right)\right) < \epsilon$, implicând că

$$F\left(y, x, z\right) = y, \text{ şi } F\left(z, y, x\right) = z.$$

□

2.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

În acest subparagraf vom prezenta patru teoreme de unicitate a punctelor triple fixe pentru operatori monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Dacă la ipotezele teoremelor de existenţă se adaugă o condiţie de comparare a elementelor din spaţiul produs $X \times X \times X$, atunci punctul fix triplu va fi unic.

Teorema 2.2.28 (Borcut, [**39**]). *Dacă la ipotezele teoremei 2.2.24 adăugăm condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X \times X \times X$ *comparabil cu* (x, y, z) *şi* (x_1, y_1, z_1), *atunci* F *are un punct fix triplu unic.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este încă un punct triplu fix al lui F, atunci arătăm că $d\left(\left(x, y, z\right), \left(x^*, y^*, z^*\right)\right) = 0$, unde

$$\lim_{x \to \infty} x_n = x, \lim_{x \to \infty} y_n = y, \lim_{x \to \infty} z_n = z.$$

Considerăm două cazuri: Cazul 1. Dacă (x, y, z) este comparabil cu (x^*, y^*, z^*) cu relaţia de ordine pe $X \times X \times X$, atunci, pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\left(F^n\left(x, y, z\right), F^n\left(y, x, z\right), F^n\left(z, y, x\right)\right) = \left(x, y, z\right) \text{ este comparabil cu}$$

$$\left(F^n\left(x^*, y^*, z^*\right), F^n\left(y^*, x^*, z^*\right), F^n\left(z^*, y^*, x^*\right)\right) = \left(x^*, y^*, z^*\right).$$

De asemenea,

$$d\left(\left(x,y,z\right),\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)\right)=d\left(x,x^{*}\right)+d\left(y,y^{*}\right)+d\left(z,z^{*}\right)$$

$$d\left(F^{n}\left(x,y,z\right),F^{n}\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)\right)+d\left(F^{n}\left(y,x,z\right),F^{n}\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right)\right)$$

$$+d\left(F^{n}\left(z,y,x\right),F^{n}\left(z^{*},y^{*},x^{*}\right)\right)$$

$$\leq k^{n}\left[d\left(x,x^{*}\right)+d\left(y,y^{*}\right)+d\left(z,z^{*}\right)\right]=k^{n}d\left(\left(x,y,z\right),\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right)\right),$$

ceea ce implică că $d\left(\left(x,y,z\right),\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right)\right)=0.$
Cazul 2 : Dacă (x,y,z) nu este comparabil cu $\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)$, atunci există o limită inferioară sau o limită superioară $(u,v,w)\in X\times X\times X$ pentru (x,y,z) şi $\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)$. Atunci, pentru orice $n=1,2,...$, $\left(F^{n}\left(u,v,w\right),F^{n}\left(v,u,w\right),F^{n}\left(w,v,u\right)\right)$ este comparabil cu $\left(F^{n}\left(x,y,z\right),F^{n}\left(y,x,z\right),F^{n}\left(z,y,x\right)\right)=(x,y,z)$ şi cu
$\left(F^{n}\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right),F^{n}\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right),F^{n}\left(z^{*},y^{*},x^{*}\right)\right)=\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)$.
În baza celor afirmate mai sus, avem

$$d\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{*}\\y^{*}\\z^{*}\end{pmatrix}\right)\leq d\left(\begin{pmatrix}F^{n}\left(x,y,z\right)\\F^{n}\left(y,x,z\right)\\F^{n}\left(z,y,x\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^{n}\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)\\F^{n}\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right)\\F^{n}\left(z^{*},y^{*},x^{*}\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$\leq d\left(\begin{pmatrix}F^{n}\left(x,y,z\right)\\F^{n}\left(y,x,z\right)\\F^{n}\left(z,y,x\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^{n}\left(u,v,w\right)\\F^{n}\left(v,u.w\right)\\F^{n}\left(w,v,u\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$+d\left(\begin{pmatrix}F^{n}\left(u,v,w\right)\\F^{n}\left(v,u,w\right)\\F^{n}\left(w,v,u\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}F^{n}\left(x^{*},y^{*},z^{*}\right)\\F^{n}\left(y^{*},x^{*},z^{*}\right)\\F^{n}\left(z^{*},y^{*},x^{*}\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$\leq k^{n}\left\{\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right]+\left[d\left(u,x^{*}\right)+d\left(v,y^{*}\right)+d\left(w,z^{*}\right)\right]\right\}\to 0$$

$$\text{când } n\to\infty,\ \text{şi } d\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x^{*}\\y^{*}\\z^{*}\end{pmatrix}\right)=0.$$

□

În următoarea Teoremă, sunt prezentate condiţiile în care punctul fix triplu este unic şi componentele lui sunt egale.

Teorema 2.2.29 (Borcut, [**39**]). *În condiţiile Teoremei 2.2.24 (respectiv ale Theoremei 2.2.25), presupunem că orice triplet cu elemente din X are o limită inferioară sau o limită superioară în X. Atunci $x=y=z$.*

Demonstraţie: Cazul 1. Dacă x, y, z sunt comparabile, atunci $x = F(x, y, z)$, $y = F(y, x, z)$, $z = F(z, y, x)$ sunt comparabile şi vom obţine:

$$d(x, z) = d(F(x, y, z), F(z, y, x)) \leq \frac{k}{3}\left[d(x, z) + d(y, y) + d(z, x)\right] = \frac{2k}{3}d(x, z),$$

unde $k \in [0, 1)$, implicând $d(x, z) = 0$, şi $x = z$,

$$d\left(x, y\right) = d\left(F(x, y, z), F(y, x, z)\right) \leq \frac{k}{3}\left[d(x, y) + d(y, x) + d(z, z)\right] = \frac{2k}{3}d(x, y),$$

de unde rezultă că $d(x, y) = 0$, şi $x = y$. Deci, $x = y = z$.

Cazul 2. Dacă x, y, z nu sunt comparabile, atunci există o limită inferioară sau o limită superioară pentru x, y şi z. Fie această limită $u \in X$, care este comparabilă cu x, y şi z. Presupunem că $x \leq u, y \leq u, z \leq u$. Atunci, avem

$$F(x, y, z) \leq F(u, u, u), F(y, x, z) \leq F(u, u, u) \text{ şi } F(z, y, x) \leq F(u, u, u).$$

Folosind proprietatea de monotonie a operatorului F şi propoziţia 2.1.8, avem

$$F^n(x, y, z) \leq F^n(u, u, u), F^n(y, x, z) \leq F^n(u, u, u) \text{ şi } F^n(z, y, x) \leq F^n(u, u, u).$$

Acum, având în vedere că

$$d(x, y) = d(F^{n+1}(x, y, z), F^{n+1}(y, x, z)) =$$

$$= d[F(F^n(x, y, z), F^n(y, x, z), F^n(z, y, x)), F(F^n(y, x, z), F^n(x, y, z), F^n(z, y, x))] \leq$$

$$\leq d[F(F^n(x, y, z), F^n(y, x, z), F^n(z, y, x)), F(F^n(u, u, u), F^n(u, u, u), F^n(u, u, u))] +$$

$$+ d[F(F^n(u, u, u), F^n(u, u, u), F^n(u, u, u)), F(F^n(y, x, z), F^n(x, y, z), F^n(z, y, x))].$$

Folosind condiţia de contracţie pentru F, obţinem

$$\begin{aligned} d(x, y) \leq \frac{k}{3}\,[d(F^n(x, y, z), F^n(u, u, u)) + d(F^n(y, x, z), F^n(u, u, u)) \\ + d(F^n(z, y, x), F^n(u, u, u)) + d(F^n(y, x, z), F^n(u, u, u)) \\ + d(F^n(x, y, z), F^n(u, u, u)) + d(F^n(z, y, x), F^n(u, u, u))]\,. \end{aligned}$$

Procedând la fel, în final obţinem

$$d(x, y) \leq k^{n+1}[d(x, u) + d(y, u) + d(z, u)] \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ şi } d(x, y) = 0.$$

Asemănător, demonstrăm că $d(x, z) = 0$, $d(y, z) = 0$. $\square$

Similar, ca şi în teoremele 2.2.28 şi 2.2.29, se poate demonstra unicitatea punctului fix triplu din Teoremele 2.2.26 şi 2.2.27, cu condiţia ca spaţiul produs $X \times X \times X$ înzestrat cu relaţia de ordine menţionată mai sus să aibă o proprietate suplimentară. Vom prezenta două teoreme de unicitate.

Teorema 2.2.30 (Borcut, [**39**]). *În condiţiile teoremei 2.2.26 presupunem că: pentru orice* $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in X \times X \times X$*, există* $(u, v, w) \in X \times X \times X$ *comparabil cu* (x, y, z) *şi cu* (x_1, y_1, z_1)*. Atunci* F *are un unic punct fix triplu.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este tot un punct fix triplu pentru F, atunci arătăm că

$$d((x,y,z),(x^*,y^*,z^*)) = 0,$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0,y_0,z_0) = x, \lim_{n\to\infty} F^n(y_0,x_0,z_0) = y, \lim_{n\to\infty} F^n(z_0,y_0,x_0) = z.$$

În această situaţie avem două cazuri:

Cazul 1. Presupunem că (x,y,z) este comparabil cu (x^*,y^*,z^*) cu relaţia de ordine pe $X \times X \times X$ atunci, pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$(F^n(x,y,z), F^n(y,x,z), F^n(z,y,x)) = (x,y,z) \text{ este comparabil cu}$$

$$(F^n(x^*,y^*,z^*), F^n(y^*,x^*,z^*), F^n(z^*,y^*,x^*)) = (x^*,y^*,z^*).$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} d((x,y,z),(x^*,y^*,z^*)) &= d(x,x^*) + d(y,y^*) + d(z,z^*) \\ = d(F^n(x,y,z), F^n(x^*,y^*,z^*)) &+ d(F^n(y,x,z), F^n(y^*,x^*,z^*)) \\ &+ d(F^n(z,y,x), F^n(z^*,y^*,x^*)) \\ \leq \alpha^n [d(x,x^*) + d(y,y^*) + d(z,z^*)] &= \alpha^n d((x,y,z),(y^*,x^*,z^*)), \end{aligned}$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$. Prin urmare $d((x,y,z),(x^*,y^*,z^*)) = 0$.

Cazul 2 : Dacă (x,y,z) nu este comparabil cu (x^*,y^*,z^*), atunci există o limită inferioară sau o limită superioară $(u,v,w) \in X \times X \times X$ a lui (x,y,z) şi (x^*,y^*,z^*). Deci, pentru orice $n = 1, 2, \ldots,$

$$(F^n(u,v,w), F^n(v,u,w), F^n(w,v,u)) \text{ este comparabil cu}$$

$$(F^n(x,y,z), F^n(y,x,z), F^n(z,y,x)) = (x,y,z) \text{ şi cu}$$

$$(F^n(x^*,y^*,z^*), F^n(y^*,x^*,z^*), F^n(z^*,y^*,x^*)) = (x^*,y^*,z^*).$$

Mai departe, avem

$$\begin{aligned} d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}\right) &\leq d\left(\begin{pmatrix} F^n(x,y,z) \\ F^n(y,x,z) \\ F^n(z,y,x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n(x^*,y^*,z^*) \\ F^n(y^*,x^*,z^*) \\ F^n(z^*,y^*,x^*) \end{pmatrix}\right) \\ &\leq d\left(\begin{pmatrix} F^n(x,y,z) \\ F^n(y,x,z) \\ F^n(z,y,x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n(u,v,w) \\ F^n(v,u,w) \\ F^n(w,v,u) \end{pmatrix}\right) \\ &+ d\left(\begin{pmatrix} F^n(u,v,w) \\ F^n(v,u,w) \\ F^n(w,v,u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F^n(x^*,y^*,z^*) \\ F^n(y^*,x^*,z^*) \\ F^n(z^*,y^*,x^*) \end{pmatrix}\right) \\ &\leq \alpha^n \{[d(x,u) + d(y,v) + d(z,w)] + [d(u,x^*) + d(v,y^*) + d(w,z^*)]\} \to 0 \end{aligned}$$

$$\text{când } n \to \infty, \text{ şi } d\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}\right) = 0.$$

□

Teorema 2.2.31 (Borcut, [**39**]). *În condiţiile Teoremei 2.2.26 (respectiv ale Theorem 2.2.27), presupunem că orice triplet cu elemente din X are o limită inferioară sau o limită superioară în X. Atunci $x = y = z$.*

Demonstraţie: Cazul 1. Dacă x, y, z sunt comparabile, atunci $x = F(x,y,z)$, $y = F(y,x,z)$, $z = F(z,y,x)$ sunt comparabile şi vom obţine:

$$d(x,z) = d(F(x,y,z), F(z,y,x)) \leq jd(x,z) + kd(y,y) + ld(z,x) = (j+l)d(x,z),$$

unde $j + k + l < 1$, implicând $d(x,z) = 0$, şi $x = z$,

$$d(x,y) = d(F(x,y,z), F(y,x,z)) \leq jd(x,y) + kd(y,x) + ld(z,z) = (j+k)d(x,y),$$

de unde rezultă că $d(x,y) = 0$, şi $x = y$. Deci, $x = y = z$.

Cazul 2. Dacă x, y, z nu sunt comparabile, atunci există o limită inferioară sau o limită superioară pentru x, y şi z. Fie această limită $u \in X$, care este comparabilă cu x, y şi z. Presupunem că $x \leq u, y \leq u, z \leq u$. Atunci, avem

$$F(x,y,z) \leq F(u,u,u), F(y,x,z) \leq F(u,u,u) \text{ şi } F(z,y,x) \leq F(u,u,u).$$

Folosind proprietatea de monotonie a operatorului F şi propoziţia 2.1.8, avem

$$F^n(x,y,z) \leq F^n(u,u,u), F^n(y,x,z) \leq F^n(u,u,u) \text{ şi } F^n(z,y,x) \leq F^n(u,u,u).$$

Acum, având în vedere că

$$d(x,y) = d(F^{n+1}(x,y,z), F^{n+1}(y,x,z))$$

$$= d[F(F^n(x,y,z), F^n(y,x,z), F^n(z,y,x)), F(F^n(y,x,z), F^n(x,y,z), F^n(z,y,x))]$$

$$\leq d[F(F^n(x,y,z), F^n(y,x,z), F^n(z,y,x)), F(F^n(u,u,u), F^n(u,u,u), F^n(u,u,u))]$$

$$+ d[F(F^n(u,u,u), F^n(u,u,u), F^n(u,u,u)), F(F^n(y,x,z), F^n(x,y,z), F^n(z,y,x))].$$

Folosind condiţia de contracţie pentru F, obţinem

$$d(x,y) \leq \frac{k}{3}\left[d(F^n(x,y,z), F^n(u,u,u)) + d(F^n(y,x,z), F^n(u,u,u))\right.$$

$$+ d(F^n(z,y,x), F^n(u,u,u)) + d(F^n(y,x,z), F^n(u,u,u)) + d(F^n(x,y,z), F^n(u,u,u)) + d(F^n(z,y,x), F$$

Procedând la fel, în final obţinem

$$d(x,y) \leq k^{n+1}[d(x,u) + d(y,u) + d(z,u)] \to 0 \text{ când } n \to \infty, \text{ şi } d(x,y) = 0.$$

Asemănător, demonstrăm că $d(x,z) = 0$, $d(y,z) = 0$. □

3. Exemple şi aplicaţii

În acest paragraf vom prezenta atât exemple de operatori ce îndeplinesc condiţiile unor teoreme de existenţă, existenţă şi unicitate prezentate în acest capitol, cât şi o aplicaţie la rezolvarea unei ecuaţii integrale.

3.1. Exemple

Exemplele date mai jos sunt atât pentru operatori mixt-monotoni, cât şi pentru operatori monotoni, ce au un unic punct triplu fix .

Exemplul 2.3.32. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ *şi* $F(x, y, z) = \frac{2x-2y+2z+1}{12}$.

Vom verifica condiţiile teoremei 2.1.9 şi se va deduce unicitatea punctului triplu fix. Pentru

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x \\ F(y, x, y) = y \\ F(z, y, x) = z \end{cases},$$

avem

$$\begin{cases} \frac{2x-2y+2z+1}{12} = x \\ \frac{2y-2x+2y+1}{12} = y \\ \frac{2z-2y+2x+1}{12} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + 8y = 1 \\ -2x + 2y + 10z = 1 \end{cases}.$$

Deci, avem un unic punct triplu fix $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$.

Pentru $k = \frac{1}{2}$ verificăm condiţia de contracţie:

$$\begin{aligned} d(F(x, y, z), F(u, v, w)) &= \left|\frac{2x - 2y + 2z + 1}{12} - \frac{2u - 2v + 2w + 1}{12}\right| \\ &= \left|\frac{1}{6}(x - u) + \frac{1}{6}(v - y) + \frac{1}{6}(z - w)\right| \\ &\le \frac{1}{6}|x - u| + \frac{1}{6}|y - v| + \frac{1}{6}|z - w| \\ &= \frac{k}{3}\left[d(x, u) + d(y, v) + d(z, w)\right]. \end{aligned}$$

Fie $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \frac{1}{20})$. Acest triplet verifică condiţia din teoremă.

Operatorul F este continuu şi mixt-monoton, deci condiţiile teoremei 2.1.9 sunt îndeplinite.

Exemplul 2.3.33. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ *şi* $F(x, y, z) = \frac{2x-3y+4z+1}{12}$.

Pentru

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x \\ F(y, x, y) = y \\ F(z, y, x) = z \end{cases},$$

avem

$$\begin{cases} \frac{2x-3y+4z+1}{12} = x \\ \frac{2y-3x+4y+1}{12} = y \\ \frac{2z-3y+4x+1}{12} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+3y-4z=1 \\ 3x+6y=1 \\ -4x+3y+10z=1 \end{cases}.$$

Deci, acest operator are un unic punct triplu fix $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$, şi verifică ipotezele teoremei 2.1.11.

Pentru $j = \frac{1}{6}, k = \frac{1}{4}, l = \frac{1}{3}$, verificăm condiţia de contracţie:

$$d\left(F\left(x,y,z\right), F\left(u,v,w\right)\right) = \left|\frac{2x-3y+4z+1}{12} - \frac{2u-3v+4w+1}{12}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{6}\left(x-u\right) + \frac{1}{4}\left(v-y\right) + \frac{1}{3}\left(z-w\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{6}\left|x-u\right| + \frac{1}{4}\left|y-v\right| + \frac{1}{3}\left|z-w\right|.$$

Fie $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18})$. Acest triplet verifică condiţia din teoremă.

Operatorul F este continuu şi mixt-monoton, deci condiţiile teoremei 2.1.11 sunt îndeplinite.

În următoarele două exemple operatorul va fi monoton.

Exemplul 2.3.34. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d\left(x,y\right) = \left|x-y\right|$ *şi* $F\left(x,y,z\right) = \frac{x+y+z}{12}$.

Pentru

$$\begin{cases} F\left(x,y,z\right) = x \\ F\left(y,x,z\right) = y \\ F\left(z,y,x\right) = z \end{cases},$$

avem

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{12} = x \\ \frac{y+x+z}{12} = y \\ \frac{z+y+x}{12} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11x+y+z=0 \\ x-11y+z=0 \\ x+y-11z=o \end{cases}.$$

Deci, unicul punct triplu fix este $\left(0,0,0\right)$.

Pentru $k \in [\frac{1}{4}, 1)$ verificăm condiţia de contracţie:

$$d\left(F\left(x,y,z\right), F\left(u,v,w\right)\right) = \left|\frac{x+y+z}{12} - \frac{u+v+w}{12}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{12}\left(x-u\right) + \frac{1}{12}\left(y-v\right) + \frac{1}{12}\left(z-w\right)\right|$$

$$y-v \leq \frac{1}{12}\left|x-u\right| + \frac{1}{12}\left|y-v\right| + \frac{1}{12}\left|z-w\right|$$

$$\leq \frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right) + d\left(y,v\right) + d\left(z,w\right)\right].$$

Putem alege $x_0 = y_0 = z_0$ din intervalul $(-1, 0)$. Operatorul F este continuu şi monoton, deci condiţiile teoremei 2.2.24 sunt îndeplinite.

Exemplul 2.3.35. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d\left(x,y\right) = \left|x-y\right|$ *şi* $F\left(x,y,z\right) = \frac{2x+3y+4z+1}{12}$.

Pentru

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x \\ F(y,x,z) = y \\ F(z,y,x) = z \end{cases},$$

avem

$$\begin{cases} \frac{2x+3y+4z+1}{12} = x \\ \frac{2y+3x+4z+1}{12} = y \\ \frac{2z+3y+4x+1}{12} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 3y - 4z = 1 \\ -3x + 10y - 4z = 1 \\ -4x - 3y + 10z = 1 \end{cases}.$$

Deci, avem un unic punct triplu fix $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Pentru $j = \frac{1}{6}, k = \frac{1}{4}, l = \frac{1}{3}$, verificăm condiţia de contracţie:

$$\begin{aligned} d\left(F(x,y,z), F(u,v,w)\right) &= \left|\frac{2x+3y+4z+1}{12} - \frac{2u+3v+4w+1}{12}\right| \\ &= \left|\frac{1}{6}(x-u) + \frac{1}{4}(y-v) + \frac{1}{3}(z-w)\right| \\ &\le \frac{1}{6}|x-u| + \frac{1}{4}|y-v| + \frac{1}{3}|z-w|. \end{aligned}$$

Operatorul F este continuu şi monoton, deci condiţiile teoremei 2.2.26 sunt îndeplinite.

Vom prezenta în continuare, două exemple în care operatorul nu îndeplineşte toate condiţiile unei teoreme de existenţă şi unicitate, iar concluziile se vor vedea mai jos.

Exemplul 2.3.36. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ *şi* $F(x,y,z) = x + y^2 - z$.

Vom verifica condiţiile teoremei 2.1.9:

F este continuu, dar nu este monoton sau mixt-monoton conform definiţiilor date.

Pentru orice $k \in [0,1)$, condiţia de contracţie nu va fi îndeplinită. Există (x,y,z), $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, astfel încât

$$\frac{k}{3} d\left((x,y,z),(u,v,w)\right) = \frac{k}{3}\left(d(x,u) + d(y,v) + d(z,w)\right)$$

$$\le \frac{1}{3}\left(d(x,u) + d(y,v) + d(z,w)\right) < d\left(F(x,y,z), F(u,v,w)\right).$$

Pentru

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x \\ F(y,x,y) = y \\ F(z,y,x) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}.$$

Deci, avem două puncte fixe triple $(0,0,0), (1,1,1)$.

Exemplul 2.3.37. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ *şi* $F(x,y,z) = 2x + y + z + 1$.

Fie

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x \\ F(y,x,y) = y \\ F(z,y,x) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}.$$

Soluţia acestui sistem este $(m, n, -1-m-n)$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Deci, operatorul F are o infinitate de puncte fixe triple. Vom vedea că orice condiţie de contracţie din teoremele prezentate în acest capitol nu este îndeplinită.

Pentru $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ şi $(u, v, w) = (1, 1, 1)$ avem:

$$d\left(F\left(x,y,z\right), F\left(u,v,w\right)\right) = |2(x-u)+(y-v)+(z-w)| = 8 > 6 = [d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)]$$

$$= [d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)] > \frac{k}{3}[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)], \text{ pentru orice } k \in [0,1).$$

Operatorul F este continuu şi monoton, dar nu îndeplineşte condiţia de contracţie.

3.2. Aplicaţii

În această secţiune vom prezenta o aplicaţie a teoriei punctelor fixe triple pentru a studia existenţa şi unicitatea soluţiei următoarei ecuaţii integrale:

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s,x(s))+g(s,x(s))+h(s,x(s))]ds+a(t), t \in [0,T], T > 0. \tag{2.106}$$

Considerăm spaţiul $X = C([0,T], \mathbb{R})$ al operatorilor continui definiţi pe $[0,T]$ cu valori reale, înzestrat cu metrica

$$d(u,v) = \max_{0 \le t \le T} |u(t)-v(t)|, \text{ pentru } u, v \in X.$$

Definim relaţia de ordine parţială " $\le$ " pe X astfel:

$$\text{fie } x, y \in X, \text{ atunci } x \le y \Leftrightarrow x(t) \le y(t), \text{ pentru orice } t \in [0,T].$$

Atunci $(X, d, \le)$ este un spaţiu metric complet parţial ordonat.

Analiza ecuaţiei (2.106) o vom face pornind de la următoarele ipoteze:

(i) $f, g, h : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt continue,

(ii) $a : [0,T] \times \to \mathbb{R}$ este continuă,

(iii) $G : [0,T] \times [0,T] \to [0,\infty)$ este continuă,

(iv) Există constantele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, astfel încât pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, x \le y$ avem

$$0 \le f(s,y) - f(s,x) \le \lambda_1(y-x), 0 \le g(s,x) - g(s,y) \le \lambda_2(y-x),$$

$$0 \le h(s,y) - h(s,x) \le \lambda_3(y-x).$$

(v) Presupunem că $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\sup_{0 \le t \le T} \int_0^T G(t,s)ds < 1$

(vi) Există funcţiile continue $\alpha, \beta, \gamma : [0,T] \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\alpha \le \int_0^T G(t,s)[f(s,\alpha(s))+g(s,\beta(s))+h(s,\gamma(s))]ds + a(t)$$

$$\beta \ge \int_0^T G(t,s)[f(s,\beta(s))+g(s,\alpha(s))+h(s,\beta(s))]ds + a(t)$$

$$\gamma \le \int_0^T G(t,s)[f(s,\gamma(s))+g(s,\beta(s))+h(s,\alpha(s))]ds + a(t).$$

Teorema 2.3.38. *În ipotezele* $(i)-(vi)$, *Ecuaţia* (2.106) *are o soluţie unică în* $C([0,1], \mathbb{R})$.

Demonstraţie: Considerăm operatorul $F : X^3 \to X$ definit astfel:

$$F(x_1, x_2, x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s, x_1(s)) + g(s, x_2(s)) + h(s, x_3(s))]ds + a(t), t \in [0,T],$$

pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Vom demonstra că operatorul F îndeplineşte condiţiile Teoremei 2.1.15. Vom arăta mai întâi că operatorul este mixt-monoton.
Fie $x_1, y_1 \in X$, cu $x_1 \leq y_1$ şi $t \in [0,T]$, atunci avem

$$F(y_1, x_2, x_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s, y_1(s)) - f(s, x_1(s))]ds. \tag{2.107}$$

Ţinând cont de faptul că $x_1(t) \leq y_1(t)$ pentru orice $t \in [0,T]$, ipoteza (iv), adică

$$f(s,y) - f(s,x) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ şi relaţia (2.107), atunci obţinem}$$

$$F(y_1, x_2, x_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) \geq 0, \text{ pentru orice } t \in [0,T],$$

ceea ce implică că $F(x_1, x_2, x_3)(t) \leq F(y_1, x_2, x_3)(t)$.
Fie $x_2, y_2 \in X$, cu $x_2 \leq y_2$ şi $t \in [0,T]$, atunci avem

$$F(x_1, x_2, x_3)(t) - F(x_1, y_2, x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[g(s, x_2(s)) - g(s, y_2(s))]ds. \tag{2.108}$$

Ţinând cont de faptul că $x_2(t) \leq y_2(t)$ pentru orice $t \in [0,T]$, ipoteza (iv), adică

$$g(s,x) - g(s,y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ şi relaţia (2.108), atunci obţinem}$$

$$F(x_1, x_2, x_3)(t) - F(x_1, y_2, x_3)(t) \geq 0, \text{ pentru orice } t \in [0,T],$$

ceea ce implică că $F(x_1, x_2, x_3)(t) \geq F(x_1, y_2, x_3)(t)$.
Similar, se arată şi pentru a treia componentă ca şi pentru prima componentă.
Fie $x_3, y_3 \in X$, cu $x_3 \leq y_3$ şi $t \in [0,T]$, atunci avem

$$F(x_1, x_2, y_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[h(s, y_3(s)) - h(s, x_3(s))]ds. \tag{2.109}$$

Ţinând cont de faptul că $x_3(t) \leq y_3(t)$ pentru orice $t \in [0,T]$, ipoteza (iv), adică

$$h(s,y) - h(s,x) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ şi relaţia (2.107), atunci obţinem}$$

$$F(x_1, x_2, y_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) \geq 0, \text{ pentru orice } t \in [0,T],$$

ceea ce implică că $F(x_1, x_2, x_3)(t) \leq F(x_1, x_2, y_3)(t)$. Deci, F este un operator mixt-monoton. Pe de altă parte, este dovedit în lucrarea [**97**] că $(C([0,T], \mathbb{R}), \leq, d)$ este regulat.

În cele ce urmează, vom estima $d(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3))$ pentru $x_1 \leq y_1, x_2 \geq y_2, x_3 \leq y_3$. Într-adevăr, operatorul F este mixt-monoton, adică $F(x_1, x_2, x_3) \leq F(y_1, y_2, y_3)$ şi vom obţine

$$\begin{aligned} d(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3)) &= \max_{0 \leq t \leq T} |F(x_1, x_2, x_3)(t) - F(y_1, y_2, y_3)(t)| \\ &= \max_{0 \leq t \leq T} \left(F(y_1, y_2, y_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) \right). \end{aligned}$$

Acum, pentru orice $t \in [0, t]$ şi folosind ipoteza (iv), avem

$$F(y_1, y_2, y_3)(t) - F(x_1, x_2, x_3)(t) = \int_0^T G(t,s)[f(s, y_1(s)) - g(s, x_1(s))]ds$$
$$+ \int_0^T G(t,s)[g(s, y_2(s)) - g(s, x_2(s))]ds + \int_0^T G(t,s)[h(s, y_3(s)) - h(s, x_3(s))]ds$$
$$\leq \left(\int_0^T G(t,s)ds \right) (\lambda_1 d(x_1, y_1) + \lambda_2 d(x_2, y_2) + \lambda_3 d(x_3, y_3))$$
$$\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T G(t,s)ds \right) (\lambda_1 d(x_1, y_1) + \lambda_2 d(x_2, y_2) + \lambda_3 d(x_3, y_3)).$$

Ceea ce implică faptul că

$$d(F(x_1, x_2, x_3), F(y_1, y_2, y_3)) \leq \delta_1 d(x_1, y_1) + \delta_2 d(x_2, y_2) + \delta_3 d(x_3, y_3),$$

unde

$$\delta_i = \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T G(t,s)ds \right) \lambda_i, i = 1, 2, 3.$$

Folosind ipoteza (v), avem $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 1$. Putem concluziona că operatorul F verifică condiţia de contracţie din Teorema 2.1.11.

Fie α, β, γ funcţiile date de ipoteza (vi), atunci avem

$$\alpha \leq F(\alpha, \beta, \gamma), \beta \geq F(\beta, \alpha, \beta), \gamma \leq F(\gamma, \beta, \alpha).$$

Dacă luăm $x_0 = \alpha, y_0 = \beta, z_0 = \lambda$, atunci toate ipotezele Teoremei 2.1.15. sunt îndeplinite. Deci există un punct fix triplu (x_1, x_2, x_3) pentru operatorul F, cu

$$x_1 = F(x_1, x_2, x_3), x_2 = F(x_2, x_1, x_2), x_3 = F(x_3, x_2, x_1).$$

Acum, pentru orice $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in X^3$, luăm

$$z_1 = \max\{x_1, y_1\}, z_2 = \min\{x_2, y_2\}, z_3 = \max\{x_3, y_3\}.$$

Atunci avem $x_1 \leq z_1, x_2 \geq z_2, x_3 \leq z_3$ şi $y_1 \leq z_1, y_2 \geq z_2, y_3 \leq z_3$. Acest fapt implică efectiv că (z_1, z_2, z_3) este comparabil cu (x_1, x_2, x_3) şi cu (y_1, y_2, y_3), adică

$$(x_1, x_2, x_3) \leq (z_1, z_2, z_3) \text{ şi } (y_1, y_2, y_3) \leq (z_1, z_2, z_3).$$

În final am dovedit că F are un unic punct fix triplu care este soluţia Ecuaţiei (2.106).

$\square$

CAPITOLUL 3

Puncte triple coincidente pentru operatori definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate

Scopul vizat în acest capitol este de a prezenta teoria punctelor triple coincidente atât pentru operatori mixt-monotoni, cât şi pentru operatori monotoni, definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate. Conţinutul constă din: definiţiile noilor concepte, din rezultatele cu privire la existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple coincidente, precum şi din exemple.

Acest capitol **conţine în totalitate contribuţiile autorului**, contribuţii ce cuprind **5 definiţii**, **8 teoreme**, **3 corolare**, **6 exemple**.

Rezultatele acestui capitol sunt în articolele:

[**32**] **Borcut, M., Berinde, V.,** ***Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*** **, Aplied Mathematics and Computation, 218 (10) (2012) pp. 5929-5936**;

[**38**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces***, **Aplied Mathematics and Computation, 218 (2012) pp. 7339-7346** ;

[**40**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces***, **Creative Mathematics and Informatics, (acceptat)**;

[**41**] **Borcut, M.,** ***Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****Filomat J. (submitted)**.

Lucrările bibliografice ce stau la baza acestui capitol sunt: [**32**], [**33**], [**40**], [**41**], [**84**], [**2**], [**8**], [**11**], [**20**], [**21**], [**23**], [**122**], [**118**], [**120**], [**119**], [**121**], [**27**], [**29**], [**30**], [**16**], [**45**], [**18**], [**49**], [**50**], [**51**], [**64**], [**62**], [**69**], [**70**], [**71**]. [**31**], [**38**], [**39**], [**16**], [**18**], [**19**], [**21**], [**22**], [**23**], [**27**], [**62**],[**19**], [**29**], [**30**], [**44**], [**45**], [**96**], [**64**], [**97**], [**123**], [**124**], [**6**], [**17**], [**27**], [**28**], [**29**], [**30**], [**46**], [**47**], [**57**], [**61**], [**83**], [**108**], [**106**], [**121**], [**119**], [**120**], [**118**], [**122**], [**2**], [**3**], [**4**], [**5**], [**137**], [**8**], [**10**], [**11**], [**64**], [**65**], [**66**], [**67**], [**68**], [**70**], [**71**], [**78**], [**81**], [**87**], [**89**], [**94**], [**102**], [**104**], [**93**].

1. PUNCTE TRIPLE COINCIDENTE PENTRU OPERATORI MIXT-MONOTONI

În acest paragraf sunt prezentate definiţiile noilor concepte şi teoreme de existenţă şi unicitate a punctelor coincidente triple. Conceptele noi introduse sunt: mixt-g-monotonia, punct coincident pentru un operator mixt-g-monoton [Subparagraful 3.1.1]. Rezultatele ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor coincidente sunt prezentate în subparagrafele 3.1.2 şi 3.1.3.

1.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este metric complet. Definim spaţiul parţial ordonat $X \times X \times X$, astfel:

$$\text{pentru } (x,y,z), (u,v,w) \in X \times X \times X, (u,v,w) \leq (x,y,z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 3.1.1 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat, operatorul F : $X \times X \times X \ \to X$ şi funcţia $g : X \to X$. Spunem că F este mixt-g-monoton dacă $F(x,y,z)$ este g-monoton crescător în x, şiz, şi este g-monotonă descrescător în y, adică, pentru orice $x, y, z \in X$,*

$$x_1, x_2 \in X, g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, g(y_1) \leq g(y_2) \Rightarrow F(x, y_1, z) \geq F(x, y_2, z)$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, g(z_2) \leq g(z_1) \Rightarrow F(x, y, z_2) \geq F(x, y, z_1).$$

Definiţia 3.1.2 (Borcut, [**40**]). *Un element $(x, y, z) \in X \times X \times X$ este punct triplu coincident pentru operatorul F şi funţia g dacă*

$$F(x,y,z) = g(x),\ F(y,x,y) = g(y), F(z,y,x) = g(z).$$

Definiţia 3.1.3 (Borcut, [**40**]). *Fie X nevidă, $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie. Spunem că F şi g sunt comutative (F comută cu g) dacă:*

$$g(F(x,y,z)) = F(g(x),\ g(y), g(z)), \forall x, y, z \in X.$$

1.2. Teoreme de existenţă

Teorema 3.1.4 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie F : $X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie, astfel încât F este mixt-g-monoton. Presupunem că există $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$, astfel încât*

$$d(F(x,y,z), F(u,v,w)) \leq jd(g(x), g(u)) + kd(g(y), g(v)) + \\ + ld(g(z), g(w)), \tag{3.110}$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ *cu* $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g *este continuă şi commută cu* F *şi că avem următoarele proprietăţi:*

(a) F *este continuu sau*

(b) X *are următoarele propietăţi:*

$$(i) \text{ dacă există şirul crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci } x_n \leq x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii) \text{ dacă există şirul descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \geq y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, *astfel încât*

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0).$$

Deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, putem alege $x_1, y_1, z_1 \in X$, astfel încât

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), g(y_1) = F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0).$$

Din nou, deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$ putem alege $x_2, y_2, z_2 \in X$, astfel încât

$$g(x_2) = F(x_1, y_1, z_1), g(y_2) = F(y_1, x_1, y_1) \text{ şi } g(z_2) = F(z_1, y_1, x_1).$$

Continuând procedeul, construim şirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\} \subset X$, astfel încât pentru orice $n \geq 0$,

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n), \; g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, y_n), \; g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n). \tag{3.111}$$

Prin inducţie, vom demonstra că pentru $n \geq 0$

$$g(x_n) \leq g(x_{n+1}), \; g(y_n) \geq g(y_{n+1}), \; g(z_n) \leq g(z_{n+1}). \tag{3.112}$$

Într-adevăr, deoarece

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

şi

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), \; g(y_1) = F(y_0, x_0, y_0), \; g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0)$$

$$\Rightarrow g(x_0) \leq g(x_1), \; g(y_0) \geq g(y_1) \text{ şi } g(z_0) \leq g(z_1),$$

deci (3.112) este verificată pentru $n = 0$. Presupunem acum că

$$g(x_n) \leq g(x_{n+1}), g(y_n) \geq g(y_{n+1}) \text{ şi } g(z_n) \leq g(z_{n+1}), \forall n \geq 0.$$

Atunci, deoarece F este mixt-g-monoton, avem

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n) \leq F(x_{n+1}, y_n, z_n) \leq F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = g(x_{n+2}),$$

$$g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, y_n) \geq F(y_{n+1}, x_n, y_n) \geq F(y_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) = g(y_{n+2}),$$

şi

$$g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n) \leq F(z_{n+1}, y_n, x_n) \leq F(z_{n+1}, y_{n+1}, x_{n+1}) = g(z_{n+2}).$$

Astfel, prin inducţie am arătat că (3.112) este adevărată pentru orice $n \geq 0$.

Notăm

$$D_n^{g(x)} = d(g(x_{n-1}), g(x_n)),$$
$$D_n^{g(y)} = d(g(y_{n-1}), g(y_n)),$$
$$D_n^{g(z)} = d(g(z_{n-1}), g(z_n))$$

şi folosind (3.110) obţinem

$$D_2^{g(x)} = d(g(x_1), g(x_2)) = d(F(x_0, y_0, z_0), F(x_1, y_1, z_1))$$

$$\leq jd(g(x_0), g(x_1)) + kd(g(y_0), g(y_1)) + ld(g(z_0), g(z_1)) = jD_1^{g(x)} + kD_1^{g(y)} + lD_1^{g(z)}.$$

Similar, obţinem

$$D_2^{g(y)} \leq (j+l)D_1^{g(y)} + kD_1^{g(x)} + 0D_1^{g(z)},$$
$$D_2^{g(z)} \leq jD_1^{g(z)} + kD_1^{g(y)} + lD_1^{g(x)},$$

şi

$$D_3^{g(x)} \leq \left(j^2 + k^2 + l^2\right) D_1^{g(x)} + (2jk + 2kl) D_1^{g(y)} + 2jlD_1^{g(z)},$$
$$D_3^{g(y)} \leq (lk + 2jk) D_1^{g(x)} + \left((j+l)^2 + k^2\right) D_1^{g(y)} + klD_1^{g(z)},$$
$$D_3^{g(z)} \leq \left(2jl + k^2\right) D_1^{g(x)} + (2jk + 2kl) D_1^{g(y)} + \left(j^2 + l^2\right) D_1^{g(z)}.$$

Considerăm matricea

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ g_1 & b_1 & h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix}$$

atunci

$$\mathbf{A^2} := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ g_2 & b_2 & 2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^2 + k^2 + l^2 & 2jk + 2kl & 2jl \\ kl + 2jk & (j+l)^2 + k^2 & kl \\ 2jl + k^2 & 2jk + 2kl & j^2 + l^2 \end{pmatrix}$$

unde $a_2 + b_2 + c_2 = d_2 + e_2 + f_2 = g_2 + b_2 + h_2 = (j + k + l)^2 < j + k + l < 1$. Presupunem că

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix}$$

unde $a_n+b_n+c_n=d_n+e_n+f_n=g_n+b_n+h_n=(j+k+l)^n<j+k+l<1$, şi arătăm că

$$\mathbf{A^{n+1}}=\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ d_{n+1} & e_{n+1} & f_{n+1} \\ g_{n+1} & b_{n+1} & h_{n+1} \end{pmatrix}$$

unde $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=d_{n+1}+e_{n+1}+f_{n+1}=g_{n+1}+b_{n+1}+h_{n+1}=$

$$=(j+k+l)^{n+1}<j+k+l<1.$$

Într-adevăr

$$\mathbf{A^{n+1}}=\mathbf{A^nA}=\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & b_n & h_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_nj+b_nk+c_nl & a_nk+b_n(j+l)+c_nk & a_nl+c_nj \\ d_nj+e_nk+f_nl & d_nk+e_n(j+l)+f_nk & d_nl+f_nj \\ g_nj+b_nk+h_nl & g_nk+b_n(j+l)+h_nk & g_nl+h_nj \end{pmatrix}.$$

Deci $a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_nj+b_nk+c_nl+a_nk+b_nj+c_nk+a_nl+b_nl+c_nj$

$$=a_n\left(j+k+l\right)+b_n\left(k+j+l\right)+c_n\left(l+k+j\right)=\left(a_n+b_n+c_n\right)\left(j+k+l\right)$$

$$=\left(j+k+l\right)^n\left(j+k+l\right)=\left(j+k+l\right)^{n+1}<j+k+l<1.$$

Similar, se obţine că

$$d_{n+1}+e_{n+1}+f_{n+1}=g_{n+1}+b_{n+1}+h_{n+1}=(j+k+l)^{n+1}<j+k+l<1.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{pmatrix} D_{n+1}^{g(x)} \\ D_{n+1}^{g(y)} \\ D_{n+1}^{g(z)} \end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j+l & 0 \\ l & k & j \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} D_1^{g(x)} \\ D_1^{g(y)} \\ D_1^{g(z)} \end{pmatrix}.$$

În final, avem

$$D_{n+1}^{g(x)}\leq a_nD_1^{g(x)}+b_nD_1^{g(y)}+c_nD_1^{g(z)}, \tag{3.113}$$

$$D_{n+1}^{g(y)}\leq d_nD_1^{g(x)}+e_nD_1^{g(y)}+f_nD_1^{g(z)}, \tag{3.114}$$

$$D_{n+1}^{g(z)}\leq g_nD_1^{g(x)}+b_nD_1^{g(y)}+h_nD_1^{g(z)}. \tag{3.115}$$

Folosind (3.113), (3.114) şi (3.115), vom arăta că $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy. Într-adevăr, fie $m\geq n$, atunci

$$d\left(x_m,x_n\right)\leq d\left(x_m,x_{m-1}\right)+...+d\left(x_{n+1},x_n\right)=D_m^{g(x)}+D_{m-1}^{g(x)}+...+D_{n+1}^{g(x)}$$

$$\leq a_{m-1}D_1^{g(x)}+b_{m-1}D_1^{g(y)}+c_{m-1}D_1^{g(z)}+a_{m-2}D_1^{g(x)}+b_{m-2}D_1^{g(y)}+c_{m-2}D_1^{g(z)}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$+a_nD_1^{g(x)}+b_nD_1^{g(y)}+c_nD_1^{g(z)}$$

$$= (a_n + ... + a_{m-1}) D_1^{g(x)} + (b_n + ... + b_{m-1}) D_1^{g(y)} + (c_n + ... + c_{m-1}) D_1^{g(z)}$$
$$\leq \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{x} + \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{g(y)} + \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{g(z)}$$
$$= \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) \left(D_1^{g(x)} + D_1^{g(y)} + D_1^{g(z)}\right)$$
$$= \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \left(D_1^{g(x)} + D_1^{g(y)} + D_1^{g(z)}\right),$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$.

Similar, se verifică, că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy .

Deoarece X este spaţiu metric complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x, \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y, \lim_{n\to\infty} g(z_n) = z. \tag{3.116}$$

Din (3.116) şi continuitatea lui g obţinem

$$\lim_{n\to\infty} g(g(x_n)) = g(x), \lim_{n\to\infty} g(g(y_n)) = g(y), \lim_{n\to\infty} g(g(z_n)) = g(z). \tag{3.117}$$

Din (3.111) şi comutativitatea lui F şi g avem,

$$g(g(x_{n+1})) = g(F(x_n, y_n, z_n)) = F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), \tag{3.118}$$

$$g(g(y_{n+1})) = g(F(y_n, x_n, y_n)) = F(g(y_n), g(x_n), g(y_n)) \tag{3.119}$$

şi

$$g(g(z_{n+1})) = g(F(z_n, y_n, x_n)) = F(g(z_n), g(y_n), g(x_n)). \tag{3.120}$$

Acum, folosind (3.116) pentru x, y, z, avem

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Să presupunem că ipoteza (a) este adevărată. Folosind continuitatea funcţiei F şi trecând la limită $n \to \infty$ în (3.117)-(3.118), obţinem

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(g(x_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)) =$$
$$= F\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(x, y, z),$$

şi alte două egalităţi similare.

Acum presupunem ipoteza (b) adevărată. Deoarece $\{g(x_n)\}$ este crescător, $g(x_n) \to x$, avem $g(x_n) \leq x$. Atunci, din inegalitatea triunghiului, condiţia de contracţie (3.110) şi (3.118), avem

$$d(g(x), F(x, y, z)) \leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(g(g(x_{n+1})), F(x, y, z))$$
$$= d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), F(x, y, z))$$
$$\leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + jd(g(g(x_n)), g(x))$$
$$+kd(g(g(y_n)), g(y)) + ld(g(g(z_n)), g(z)).$$

Dacă $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus şi având în vedere (3.117), obţinem

$$d(g(x), F(x, y, z)) \leq 0,$$

ceea ce implică, $g(x) = F(x, y, z)$.

Similar, obţinem $g(y) = F(y, x, y)$ şi $g(z) = F(z, y, x)$. $\square$

Corolarul 3.1.5 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X, d) să fie spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ şi $g : X \to X$, astfel încât F să fie mixt-g-monoton. Presupunem că există $a \in [0, 1)$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \frac{a}{3}[d(g(x), g(u)) + d(g(y), g(v)) + d(g(z), g(w))] \tag{3.121}$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ cu $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem următoarele proprietăţi:

(a) F este continuu sau

(b) X verifică următoarele:

(i) dacă avem şirul crescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,

(ii) dacă avem şirul descrescător $\{y_n\} \to y$, atunci $y_n \geq y$ pentru orice n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \geq F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia teoremei 3.1.4, pentru $j = k = l = \frac{a}{3}$ cu $a \in [0, 1)$, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y), g(z) = F(z, y, x).$$

$\square$

Teorema 3.1.6 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică d pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie, astfel încât F este mixt-g-monoton. Presupunem că există funcţia $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ şi $\lim_{r \to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq \varphi(\max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\}) \tag{3.122}$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ cu $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem următoarele condiţii îndeplinite:

(a) F este continuu sau

(b) X are propietăţiile:

$$(i) \text{ dacă avem şirul crescător } \{x_n\} \to x, \text{ atunci} x_n \le x \text{ pentru orice } n,$$

$$(ii) \text{ dacă avem şirul descrescător } \{y_n\} \to y, \text{ atunci } y_n \ge y \text{ pentru orice } n.$$

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \ge F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \ge F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0).$$

Deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, putem alege $x_1, y_1, z_1 \in X$, astfel încât

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), g(y_1) = F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0).$$

Continuând procedeul, construim şirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\} \subset X$, astfel încât pentru orice $n \ge 0$,

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n), \; g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, y_n), \tag{3.123}$$

$$g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n).$$

Vom demonstra prin inducţie că, pentru $n \ge 0$

$$g(x_n) \le g(x_{n+1}), \; g(y_n) \ge g(y_{n+1}), \; g(z_n) \le g(z_{n+1}). \tag{3.124}$$

Într-adevăr, deoarece

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \ge F(y_0, x_0, y_0) \text{ şi } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0)$$

şi

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), \; g(y_1) = F(y_0, x_0, y_0), \; g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0)$$

obţinem

$$g(x_0) \le g(x_1), \; g(y_0) \ge g(y_1) \text{ şi } g(z_0) \le g(z_1),$$

şi (3.124) este adevărată pentru $n = 0$. Presupunem acum că

$$g(x_n) \le g(x_{n+1}), g(y_n) \ge g(y_{n+1}) \text{ şi } g(z_n) \le g(z_{n+1}), \forall n \ge 0.$$

Atunci, deoarece F este mixt-g-monotonă , avem

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n) \le F(x_{n+1}, y_n, z_n) \le F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = g(x_{n+2}),$$

$$g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, y_n) \ge F(y_{n+1}, x_n, y_n) \ge F(y_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) = g(y_{n+2}),$$

şi

$$g\left(z_{n+1}\right)=F\left(z_n,y_n,x_n\right)\leq F\left(z_{n+1},y_n,x_n\right)\leq F\left(z_{n+1},y_{n+1},x_{n+1}\right)=g\left(z_{n+2}\right).$$

În concluzie, din metoda inducţiei rezultă că (3.124) este adevărată pentru orice $n\geq 0$.

Notăm cu

$$\delta_n=\max\left\{d(g(x_n,g(x_{n+1});d(g(y_n,g(y_{n+1});d(g(z_n,g(z_{n+1}))\right\}$$

şi arătăm că

$$\delta_n\leq\delta_{n-1}. \tag{3.125}$$

Deoarece

$$g(x_{n-1}\leq g(x_n,g(y_{n-1}\geq g(y_n),g(z_{n-1})\leq g(z_n)$$

avem

$$\begin{aligned} d(g(x_n,g(x_{n+1})&=d\left(F(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),F(x_n,y_n,z_n)\right) \\ &\leq\varphi\left(\max d(g(x_{n-1}),g(x_n));d(g(y_{n-1}),g(y_n));d(g(z_{n-1}),g(z_n))\right)=\varphi\left(\delta_{n-1}\right),\end{aligned} \tag{3.126}$$

$$\begin{aligned} d(g(y_n,g(y_{n+1})&=d\left(F(y_{n-1},x_{n-1},y_{n-1}),F(y_n,x_n,y_n)\right) \\ &\leq\varphi\left(\max d(g(y_{n-1}),g(y_n));d(g(x_{n-1}),g(y_n))\right)\leq\varphi\left(\delta_{n-1}\right),\end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned} d(g(z_n,g(z_{n+1})&=d\left(F(z_{n-1},y_{n-1},x_{n-1}),F(z_n,y_n,x_n)\right) \\ &\leq\varphi\left(\max d(g(z_{n-1}),g(z_n));d(g(y_{n-1}),g(y_n));d(g(x_{n-1}),g(x_n))\right)=\varphi\left(\delta_{n-1}\right).\end{aligned} \tag{3.128}$$

Folosind (3.126), (3.127), (3.128), obţinem

$$\begin{aligned}\delta_n&=\max\left\{d(g(x_n,g(x_{n+1});d(g(y_n,g(y_{n+1});d(g(z_n,g(z_{n+1}))\right\} \\ &\leq\varphi\left(\delta_{n-1}\right)<\delta_{n-1},\ \text{deoarece } \varphi(t)<t,\ \text{pentru orice } t>0.\end{aligned}$$

Astfel, şirul δ_n este monoton descrescător. Prin urmare, există $\delta_+\geq 0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\delta_+$. Arătăm că $\delta=0$. Presupunem contrariul că $\delta>0$. Atunci, trecând la limită $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=\delta_+,\delta_n\leq\varphi\left(\delta_{n-1}\right)$ şi $\lim\limits_{r\to t}\varphi(r)<t$ oricare ar fi $t>0$ avem

$$\delta=\lim_{n\to\infty}\delta_n\leq\lim_{n\to\infty}\varphi(\delta_{n-1})=\lim_{\delta_{n-1}\to\delta_+}\varphi(\delta_{n-1})<\delta,$$

contradictie, deci $\delta=0$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\left[\max d(g(x_n,g(x_{n+1});d(g(y_n,g(y_{n+1});d(g(z_n,g(z_{n+1}))\right]=0$$

implicit

$$\lim_{n\to\infty}d(g(x_n),g(x_{n+1}))=0,\lim_{n\to\infty}d(g(y_n),g(y_{n+1}))=0 \tag{3.129}$$

$$\text{şi }\lim_{n\to\infty}d(g(z_n),g(z_{n+1}))=0.$$

Acum, vom arăta că $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ sunt şiruri Cauchy . Presupunem contrariul că cel puţin unul din $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ nu este şir Cauchy . Atunci există $\epsilon > 0$ şi două şiruri de numere întregi $\{l(k)\}, \{m(k)\}$ cu $m(k) > l(k) > k$ unde

$$r_k = \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\Big); \\ ; d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\Big)\Big\} \geq \epsilon. \tag{3.130}$$

Putem presupune, de asemenea că

$$\max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big); \\ ; d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big)\Big\} < \epsilon. \tag{3.131}$$

prin alegerea lui $m(k)$ care trebuie să fie cel mai mic $l(k)$ pentru care (3.129) $r_k \geq \epsilon$. Din (3.130), (3.131) şi inegalitatea triunghiului avem

$$\begin{aligned}\epsilon \leq r_k \leq \max\Big\{&d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(x_{m(k)-1}), g(x_{m(k)})\Big); \\ &; d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{m(k)-1}), g(y_{m(k)})\Big); \\ &; d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(z_{m(k)-1}), g(z_{m(k)})\Big) \\ = \max\Big\{&d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big); \\ &; d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big); \delta_m(k) - 1\Big\} < \max\{\epsilon; \delta_m(k) - 1\}.\end{aligned}$$

Trecând la limită $k \to \infty$ obţinem

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \epsilon_+. \tag{3.132}$$

Arătăm că $\epsilon = 0$. Presupunem contrariul că $\epsilon > 0$. Folosind inegalitatea triunghiului avem

$$\begin{aligned} r_k &= \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\Big); d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\Big)\Big\} \\ &\leq \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{l(k)+1})\Big); d\Big(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(x_{m(k)+1}), g(x_{m(k)})\Big); \\ &; d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{m(k)+1}), g(y_{m(k)})\Big); \\ &; d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{l(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{m(k)+1}), g(z_{m(k)})\Big)\Big\} \\ &= \max\Big\{\Big[d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{l(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{l(k)+1})\Big)\Big]; \\ &\Big[d\Big(g(x_{m(k)}), g(x_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{m(k)}), g(y_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{m(k)}), g(z_{m(k)+1})\Big)\Big]; \\ &; \Big[d\Big(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\Big)\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

Prin urmare

$$r_k \leq \max\Big\{\delta_{l(k)}; \delta_{m(k)}; \\ ; \Big[d\Big(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\Big); d\Big(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\Big)\Big]\Big\}. \tag{3.133}$$

Din (3.124) obţinem $g\left(x_{l(k)}\right) \leq g\left(x_{m(k)}\right)$, $g\left(y_{l(k)}\right) \geq g\left(y_{m(k)}\right)$ şi $g\left(z_{l(k)}\right) \leq g\left(z_{m(k)}\right)$, folosind (3.122), (3.123) avem

$$d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right) = d\left(F\left(x_{l(k)}, y_{l(k)}, z_{l(k)}\right), F\left(x_{m(k)}, y_{m(k)}, z_{m(k)}\right)\right)$$
$$\leq \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\right] = \varphi(r_k),$$
$$d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right) = d\left(F\left(y_{l(k)}, x_{l(k)}, y_{l(k)}\right), F\left(y_{m(k)}, x_{m(k)}, y_{m(k)}\right)\right)$$
$$\leq \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right)\right\}\right] = \varphi(r_k),$$
$$d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right) = d\left(F\left(z_{l(k)}, y_{l(k)}, x_{l(k)}\right), F\left(z_{m(k)}, y_{m(k)}, x_{m(k)}\right)\right)$$
$$\leq \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\right] = \varphi(r_k).$$

Deci, avem

$$d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right) \leq \varphi(r_k), d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right) \leq \varphi(r_k) \tag{3.134}$$
$$\text{şi } d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right) \leq \varphi(r_k).$$

Folosind (3.134) în (3.133), obţinem $r_k \leq max\left\{\delta_{l(k)}; \delta_{m(k)}; \varphi(r_k)\right\}$. Trecând la limită când $k \to \infty$, avem

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} \varphi(r_k) = \lim_{r_k\to\epsilon_+} \varphi(r_k) < \epsilon, \tag{3.135}$$

prin urmare, $\epsilon < \epsilon$, este contradictie. Deci, am demonstrat că $\{g\left(x_n\right)\}, \{g\left(y_n\right)\}$ şi $\{g\left(z_n\right)\}$ sunt şiruri Cauchy .

Deoarece X este complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x, \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y, \lim_{n\to\infty} g(z_n) = z. \tag{3.136}$$

Din (3.136) şi continuitatea lui g, avem

$$\lim_{n\to\infty} g\left(g(x_n)\right) = g(x), \lim_{n\to\infty} g\left(g(y_n)\right) = g(y), \lim_{n\to\infty} g\left(g(z_n)\right) = g(z). \tag{3.137}$$

Folosind (3.123) şi comutativitatea lui F şi g, obţinem

$$g\left(g(x_{n+1})\right) = g\left(F(x_n, y_n, z_n)\right) = F\left(g(x_n), g(y_n), g(z_n)\right), \tag{3.138}$$

$$g\left(g(y_{n+1})\right) = g\left(F(y_n, x_n, y_n)\right) = F\left(g(y_n), g(x_n), g(y_n)\right), \tag{3.139}$$

$$g\left(g(z_{n+1})\right) = g\left(F(z_n, y_n, x_n)\right) = F\left(g(z_n), g(y_n), g(x_n)\right). \tag{3.140}$$

Deoarece F este continuă, $g(x_n) \to x, g(y_n) \to y, g(z_n) \to z$ şi trecând la limită când $n \to \infty$ în (3.138), (3.139), (3.140), (3.136), (3.137), avem:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g\left(g(x_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(g(x_n), g(y_n), g(z_n)\right)$$
$$= F\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(x, y, z),$$
$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g\left(g(y_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(g(y_n), g(x_n), g(y_n)\right)$$
$$= F\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n)\right) = F(y, x, y),$$

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} g\left(g(z_{n+1})\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(g(z_n), g(y_n), g(x_n)\right)$$

$$= F\left(\lim_{n\to\infty} g(z_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = F(z, y, x).$$

Deci am dovedit că F şi g au puncte triple coincidente. □

Corolarul 3.1.7 (Borcut, [**40**]). *Fie* $(X, \leq)$ *un spaţiu parţial ordonat şi presupunem că există o metrică* d *pe* X*, astfel încât* (X, d) *să fie spaţiu metric complet. Fie* $F : X \times X \times X \to X$ *şi* $g : X \to X$*, astfel încât* F *să fie mixt-g-monoton . Presupunem că există* $k \in [0, 1)$*, astfel încât*

$$d\left(F\left(x, y, z\right), F\left(u, v, w\right)\right) \tag{3.141}$$

$$\leq k\left(\max\left\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\right\}\right)$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ *cu* $g\left(x\right) \leq g\left(u\right),\ g\left(y\right) \geq g\left(v\right),\ g\left(z\right) \leq g\left(w\right).$

Presupunem că $F\left(X \times X \times X\right) \subseteq g\left(X\right)$*,* g *este continuă şi comută cu* F *şi presupunem că avem următoarele proprietăţi:*

(a) F *este continuu sau*

(b) X *verifică următoarele:*

(i) *dacă avem şirul crescător* $\{x_n\} \to x$*, atunci* $x_n \leq x$ *pentru orice* n*,*

(ii) *dacă avem şirul descrescător* $\{y_n\} \to y$*, atunci* $y_n \geq y$ *pentru orice* n*.*

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$*, astfel încât*

$$g\left(x_0\right) \leq F\left(x_0, y_0, z_0\right), g\left(y_0\right) \geq F\left(y_0, x_0, y_0\right) \text{ şi } g\left(z_0\right) \leq F\left(z_0, y_0, x_0\right)$$

atunci există $x, y, z \in X$*, astfel încât*

$$g\left(x\right) = F\left(x, y, z\right), g\left(y\right) = F\left(y, x, y\right) \text{ and } g\left(z\right) = F\left(z, y, x\right).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia teoremei 3.1.6, pentru $\varphi(t) = kt$ cu $k \in [0, 1)$, atunci există $x, y, z \in X$ astfel încât

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y), g(z) = F(z, y, x).$$

□

1.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

Pentru a avea unicitatea punctului triplu coincident, este nevoie de a introduce o condiţie suplimentară la ipotezele teoremelor de existenţă, condiţie legată de relaţia de ordine cu care este înzestrat spaţiul X^3. Acest fapt va fi prezentat în teoremele următoare.

Teorema 3.1.8 (Borcut, [**40**]). *În condiţiile teoremei 3.1.6, dacă: pentru orice* $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *există* $(u, v, w) \in X^3$ *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *sunt comparabile cu* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, *atunci* F *şi* g *au un unic punct triplu coincident.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este încă un punct triplu coincident pentru F şi g, atunci arătăm că

$$d[(g(x), g(y), g(z)), (g(x^*), g(y^*), g(z^*))] = 0,$$

unde d este metrica definită în capitolul II. Deoarece $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*)$ este punct triplu coincident, avem

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, y), g(z) = F(z, y, x)$$

şi respectiv

$$g(x^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y^*) = F(y^*, x^*, y^*), g(z^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Din ipoteză, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$, astfel încât $(g(u), g(v), g(w))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$.

Punem $u_0 = u, v_0 = v, w_0 = w$, atunci există $u_1, v_1, w_1 \in X \times X \times X$, astfel încât

$$g(u_1) = F(u_0, v_0, w_0), g(v_1) = F(v_0, u_0, v_0), g(w_1) = F(w_0, v_0, u_0).$$

Pentru $n > 1$, continuăm procedeul şi construim şirurile $\{g(u_n)\}, \{g(v_n)\}$ şi$\{g(w_n)\}$, astfel încât

$$g(u_{n+1}) = F(u_n, v_n, w_n), g(v_{n+1}) = F(v_n, u_n, v_n) \text{ şi } g(w_{n+1}) = F(w_n, v_n, u_n).$$

Mai departe, luăm $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ şi $x_0^* = x^*, y_0^* = y^*, z_0^* = z^*$ şi, în acelaşi mod definim şirurile : $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ şi $\{g(x_n^*)\}, \{g(y_n^*)\}, \{g(z_n^*)\}$.
Se demonstrează uşor, pentru orice $n \geq 1$,

$$g(x_n) = F(x, y, z), g(y_n) = F(y, x, y), g(z_n) = F(z, y, x) \text{ şi}$$

$$g(x_n^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y_n^*) = F(y^*, x^*, y^*), g(z_n^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Deoarece

$$(F(x, y, z), F(y, x, y), F(z, y, x)) = (g(x_1), g(y_1), g(z_1)) = (g(x), g(y), g(z))$$

şi

$$(F(u, v, w), F(v, u, v), F(w, v, u)) = (g(u_1), g(v_1), g(w_1))$$

sunt comparabile $g(x) \leq g(u_1), g(y) \geq g(v_1)$ şi $g(z) \leq g(w_1)$. Este uşor de a arăta $(g(x), g(y), g(z))$ şi $(g(u_n), g(v_n), g(w_n))$ sunt comparabile, care este $g(x) \leq g(u_n), g(y) \geq g(v_n)$ şi $g(z) \leq g(w_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

Folosind (3.110) şi demonstraţia teoremei 3.1.4, avem

$$d(g(x), g(u_{n+1})) = d(F(x, y, z), F(u_n, v_n, w_n))$$

$$\leq jd(g(x), g(u_n)) + kd(g(y), g(v_n)) + ld(g(z), g(w_n)),$$

$$d(g(y), g(v_{n+1})) = d(F(y, x, y), F(v_n, u_n, v_n))$$

$$\leq jd(g(y), g(v_n)) + kd(g(x), g(u_n)) + ld(g(y), g(v_n)),$$

şi

$$d(g(z), g(w_{n+1})) = d(F(z, y, x), F(w_n, v_n, u_n))$$

$$\leq jd(g(z), g(w_n)) + kd(g(y), g(v_n)) + ld(g(x), g(u_n)).$$

Cu ajutorul relaţiilor de mai sus, obţinem

$$\frac{d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(y), g(v_{n+1})) + d(g(z), g(w_{n+1}))}{3} \leq \frac{j+k+l}{3} \cdot$$

$$\cdot d(g(x), g(u_n)) + \frac{j+l+2k}{3} \cdot d(g(y), g(v_n)) + \frac{j+l}{3} \cdot d(g(z), g(w_n))$$

$$\leq \alpha \left[d(g(x), g(u_n)) + d(g(y), g(v_n)) + d(g(z), g(w_n)) \right]$$

$$\leq \alpha^n \left[d(g(x), g(u_1)) + d(g(y), g(v_1)) + d(g(z), g(w_1)) \right], \tag{3.142}$$

Cu $\alpha = j + k + l < 1$.

Trecând la limită când $n \to \infty$ în relaţia (3.142) obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y), g(v_{n+1})) = 0, \text{ şi}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(g(z), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.143}$$

Similar, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x^*), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y^*), g(v_{n+1})) = 0, \text{ şi}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(g(z^*), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.144}$$

Din inegalitatea triunghiului şi (3.143) şi (3.144), avem

$$d(g(x), g(x^*)) \leq d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(x^*), g(u_{n+1})) \to 0 \text{cu } n \to \infty,$$

$$d(g(y), g(y^*)) \leq d(g(y), g(v_{n+1})) + d(g(y^*), g(v_{n+1})) \to 0 \text{ cu } n \to \infty,$$

$$d(g(z), g(z^*)) \leq d(g(z), g(w_{n+1})) + d(g(z^*), g(w_{n+1})) \to 0 \text{ cu } n \to \infty,$$

ceea ce arată că teorema este demonstrată. □

Teorema 3.1.9 (Borcut, [**40**]). *În condiţiile teoremei 3.1.6 dacă avem îndeplinită şi condiţia: pentru orice* $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, *atunci există* $(u, v, w) \in X^3$, *astfel încât* $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ *este comparabilă* $(g(x), g(y), g(z))$ *şi cu* $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, *atunci* F *şi* g *au un unic punct triplu coicident.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ este încă un punct triplu coincident pentru F şi g, atunci arătăm că

$$d[(g(x), g(y), g(z)), (g(x^*), g(y^*), g(z^*))] = 0.$$

Deoarece $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*)$ sunt puncte triple coincidente , avem

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z), g(z) = F(z, y, x)$$

şi respectiv

$$g(x^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Din ipoteză, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$, astfel încât $(g(u), g(v), g(w))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$.

Luăm $u_0 = u, v_0 = v, w_0 = w$, atunci există $u_1, v_1, w_1 \in X \times X \times X$, astfel încât

$$g(u_1) = F(u_0, v_0, w_0), g(v_1) = F(v_0, u_0, w_0), g(w_1) = F(w_0, v_0, u_0).$$

Pentru $n > 1$, continuăm procedeul şi construim şirurile $\{g(u_n)\}, \{g(v_n)\}$ şi $\{g(u_n)\}$, astfel încât

$$g(u_{n+1}) = F(u_n, v_n, w_n), g(v_{n+1}) = F(v_n, u_n, w_n) \text{ şi } g(w_{n+1}) = F(w_n, v_n, u_n).$$

În plus, $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ şi $x_0^* = x^*, y_0^* = y^*, z_0^* = z^*$ şi în acelaşi mod definesc şirurile $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ şi $\{g(x_n^*)\}, \{g(y_n^*)\}, \{g(z_n^*)\}$.
Cu uşurinţă se demonstrează că, pentru orice $n \geq 1$,

$$g(x_n) = F(x, y, z), g(y_n) = F(y, x, z), g(z_n) = F(z, y, x) \text{ şi}$$

$$g(x_n^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y_n^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z_n^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Întrucât

$$(F(x, y, z), F(y, x, z), F(z, y, x)) = (g(x_1), g(y_1), g(z_1)) = (g(x), g(y), g(z))$$

şi

$$(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u)) = (g(u_1), g(v_1), g(w_1))$$

sunt comparabile, şi $g(x) \leq g(u_1), g(y) \geq g(v_1)$ şi $g(z) \leq g(w_1)$. Este uşor să se demonstreze că $(g(x), g(y), g(z))$ şi $(g(u_n), g(v_n), g(w_n))$ sunt comparabile cu $g(x) \leq g(u_n), g(y) \geq g(v_n)$ şi $g(z) \leq g(w_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

Astfel, din (3.122) şi folosind demonstraţia teoremei 3.1.6, avem

$$d(g(x), g(u_{n+1})) = d(F(x, y, z), F(u_n, v_n, w_n))$$

$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(x), g(u_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right),$$

$$d(g(y), g(v_{n+1})) = d(F(y, x, z), F(v_n, u_n, w_n))$$

$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(y), g(v_n)); d(g(x), g(u_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right),$$

şi

$$\begin{aligned} d(g(z), g(w_{n+1})) &= d(F(z,y,x), F(w_n, v_n, u_n)) \\ &\le \varphi\left(\max\left\{d(g(z), g(w_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(x), g(u_n))\right\}\right). \end{aligned}$$

Din relaţiile de mai sus, obţinem

$$\begin{aligned} &\max\left\{d(g(x), g(u_{n+1})); d(g(y), g(u_{n+1})); d(g(z), g(w_{n+1}))\right\} \\ &\le \varphi\left(\max\left\{d(g(x), g(u_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right) \\ &\le \varphi^n\left(\max\left\{d(g(x), g(u_1)); d(g(y), g(v_1)); d(g(z), g(w_1))\right\}\right). \end{aligned} \tag{3.145}$$

Dacă trecem la limită cu $n \to \infty$ în relaţia (3.145), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y), g(v_{n+1})) = 0, \\ \text{şi } \lim_{n\to\infty} d(g(z), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.146}$$

Similar, se arată că

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x^*), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y^*), g(v_{n+1})) = 0, \\ \text{şi } \lim_{n\to\infty} d(g(z^*), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.147}$$

Din inegalitatea triunghiului, (3.146) şi (3.147), avem

$$d(g(x), g(x^*)) \le d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(x^*), g(u_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

$$d(g(y), g(y^*)) \le d(g(y), g(v_{n+1})) + d(g(y^*), g(v_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

$$d(g(z), g(z^*)) \le d(g(z), g(w_{n+1})) + d(g(z^*), g(w_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

şi demonstraţia noastră este încheiată. □

2. PUNCTE TRIPLE COINCIDENTE PENTRU OPERATORI MONOTONI

În acest paragraf sunt prezentate rezultatele de existenţă, existenţă şi unicitate a punctelor triple coincidente pentru operatori monotoni, iar definiţia punctului triplu coincident este cu totul alta, aşa cum s-a văzut în paragraful 2.2.

2.1. Definiţii

Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Construim spaţiul produs $X \times X \times X$ care este parţial ordonat dacă:

$$\text{pentru } (x, y, z), (u, v, w) \in X \times X \times X, (u, v, w) \leq (x, y, z) \Leftrightarrow x \geq u, y \leq v, z \geq w.$$

Definiţia 3.2.10 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat, operatorul $F : X \times X \times X \to X$ şi funcţia $g : X \to X$. Spunem că F este g-monoton, dacă $F(x, y, z)$ este g-monoton crescător (descrescător) in x, y, z , adică pentru orice $x, y, z \in X$, avem*

$$x_1, x_2 \in X, g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow F(x_1, y, z) \leq F(x_2, y, z),$$

$$y_1, y_2 \in X, g(y_1) \leq g(y_2) \Rightarrow F(x, y_1, z) \leq F(x, y_2, z)$$

şi

$$z_1, z_2 \in X, g(z_2) \leq g(z_1) \Rightarrow F(x, y, z_2) \geq F(x, y, z_1).$$

Definiţia 3.2.11 (Borcut, [**40**]). *Un element $(x, y, z) \in X \times X \times X$ este punct triplu coincident pentru operatorul F şi funcţia g dacă*

$$F(x, y, z) = g(x), \; F(y, x, z) = g(y), F(z, y, x) = g(z).$$

2.2. Teoreme de existenţă

Teorema 3.2.12 (Borcut, [**40**]). *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X, d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie astfel încât F este g-monoton. Presupunem că există $j, k, l \in [0, 1)$ cu $j + k + l < 1$, astfel încât*

$$d(F(x, y, z), F(u, v, w)) \leq jd(g(x), g(u)) + kd(g(y), g(v)) + ld(g(z), g(w)), \tag{3.148}$$

pentru orice $x, y, z, u, v, w \in X$ cu $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi presupunem că avem :

(a) F este continuu sau

(b) X are următoarea proprietate:

(*i*) *dacă avem şirul crescător $\{x_n\} \to x$, cu $x_n \leq x$ pentru orice n,* *Dacă există* $x_0, y_0, z_0 \in X,$ *astfel încât*

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \le F(y_0, x_0, z_0) \text{ și } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0)$$

atunci există $x, y, z \in X,$ *astfel încât*

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z) \text{ și } g(z) = F(z, y, x).$$

Demonstrație: Fie $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \le F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0).$$

Deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, putem găsi $x_1, y_1, z_1 \in X$, astfel încât

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), g(y_1) = F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0).$$

Din nou, deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, putem găsi $x_2, y_2, z_2 \in X$ astfel încât

$$g(x_2) = F(x_1, y_1, z_1), g(y_2) = F(y_1, x_1, z_1) \text{ şi } g(z_2) = F(z_1, y_1, x_1).$$

Continuând procedeul, construim şirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\} \subset X$, astfel încât pentru orice $n \ge 0$,

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n),\ g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, z_n),\ g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n). \tag{3.149}$$

Prin inducţie matematică demonstrăm că, pentru orice $n \ge 0$

$$g(x_n) \le g(x_{n+1}),\ g(y_n) \le g(y_{n+1}),\ g(z_n) \le g(z_{n+1}). \tag{3.150}$$

Într-adevăr, deoarece

$$g(x_0) \le F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \le F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \le F(z_0, y_0, x_0)$$

şi

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0),\ g(y_1) = F(y_0, x_0, z_0),\ g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0)$$

avem

$$g(x_0) \le g(x_1),\ g(y_0) \le g(y_1) \text{ şi } g(z_0) \le g(z_1),$$

şi (3.150) este adevărată pentru orice $n = 0$. Acum presupunem că

$$g(x_n) \le g(x_{n+1}), g(y_n) \le g(y_{n+1}) \text{ şi } g(z_n) \le g(z_{n+1}), \forall n \ge 0.$$

Deoarece F este g-monotonă, avem

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n) \le F(x_{n+1}, y_n, z_n) \le F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = g(x_{n+2}),$$

$$g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, z_n) \le F(y_{n+1}, x_n, z_n) \le F(y_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) = g(y_{n+2}),$$

şi

$$g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n) \le F(z_{n+1}, y_n, x_n) \le F(z_{n+1}, y_{n+1}, x_{n+1}) = g(z_{n+2}).$$

Din metoda inducţiei, putem concluziona că (3.150) este adevărată, pentru orice $n \geq 0$, şi, prin urmare,

$$g(x_0) \leq g(x_1) \leq ... \leq g(x_n) \leq g(x_{n+1}) \leq ...,$$

$$g(y_0) \leq g(y_1) \leq ... \leq g(y_n) \leq g(y_{n+1}) \leq ...$$

şi

$$g(z_0) \leq g(z_1) \leq ... \leq g(z_n) \leq g(z_{n+1}) \leq ....$$

Notăm

$$D_n^{g(x)} = d(g(x_{n-1}), g(x_n)),$$

$$D_n^{g(y)} = d(g(y_{n-1}), g(y_n)),$$

$$D_n^{g(z)} = d(g(z_{n-1}), g(z_n))$$

şi folosind (3.148), obţinem

$$D_2^{g(x)} = d(g(x_1), g(x_2)) = d(F(x_0, y_0, z_0), F(x_1, y_1, z_1))$$

$$\leq jd(g(x_0), g(x_1)) + kd(g(y_0), g(y_1)) + ld(g(z_0), g(z_1)) = jD_1^{g(x)} + kD_1^{g(y)} + lD_1^{g(z)}.$$

Similar, obţinem

$$D_2^{g(y)} \leq jD_1^{g(y)} + kD_1^{g(x)} + lD_1^{g(z)},$$

$$D_2^{g(z)} \leq jD_1^{g(z)} + kD_1^{g(y)} + lD_1^{g(x)},$$

şi

$$D_3^{g(x)} \leq \left(j^2 + k^2 + l^2\right) D_1^{g(x)} + (2jk + kl) D_1^{g(y)} + (2jl + kl) D_1^{g(z)},$$

$$D_3^{g(y)} \leq \left(l^2 + 2jk\right) D_1^{g(x)} + \left(j^2 + k^2 + kl\right) D_1^{g(y)} + (2jl + kl) D_1^{g(z)},$$

$$D_3^{g(z)} \leq \left(2jl + k^2\right) D_1^{g(x)} + (2jk + kl) D_1^{g(y)} + \left(j^2 + l^2 + kl\right) D_1^{g(z)}.$$

Considerăm matricea

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & e_1 & c_1 \\ f_1 & b_1 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix}$$

cu

$$\mathbf{A^2} := \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & c_2 \\ f_2 & b_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^2 + k^2 + l^2 & 2jk + kl & 2jl + kl \\ l^2 + 2jk & j^2 + k^2 + kl & 2jl + kl \\ 2jl + k^2 & 2jk + kl & j^2 + l^2 + kl \end{pmatrix}$$

unde $a_2 + b_2 + c_2 = d_2 + e_2 + c_2 = f_2 + b_2 + g_2 = (j + k + l)^2 < j + k + l < 1$. Presupunem

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & c_n \\ f_n & b_n & g_n \end{pmatrix}$$

unde $a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + c_n = f_n + b_n + g_n = (j+k+l)^n < j+k+l < 1$, şi arătăm că

$$\mathbf{A^{n+1}} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ d_{n+1} & e_{n+1} & c_{n+1} \\ f_{n+1} & b_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix}$$

unde $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = d_{n+1} + e_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1} + b_{n+1} + g_{n+1}$

$$= (j+k+l)^{n+1} < j+k+l < 1.$$

Într-adevăr

$$\mathbf{A^{n+1}} = \mathbf{A^n A} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & c_n \\ f_n & b_n & g_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n j + b_n k + c_n l & a_n k + b_n j + c_n k & a_n l + b_n l + c_n j \\ d_n j + e_n k + c_n l & d_n k + e_n j + c_n k & d_n l + e_n l + c_n j \\ f_n j + b_n k + g_n l & f_n k + b_n j + g_n k & f_n l + b_n l + g_n j \end{pmatrix}.$$

Deci $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n j + b_n k + c_n l + a_n k + b_n j + c_n k + a_n l + b_n l + c_n j$

$$= a_n (j+k+l) + b_n (k+j+l) + c_n (l+k+j) = (a_n + b_n + c_n)(j+k+l)$$

$$= (j+k+l)^n (j+k+l) = (j+k+l)^{n+1} < j+k+l < 1.$$

Similar, obţinem

$$d_{n+1} + e_{n+1} + c_{n+1} = f_{n+1} + b_{n+1} + g_{n+1} = (j+k+l)^{n+1} < j+k+l < 1.$$

Prin urmare, avem

$$\begin{pmatrix} D_{n+1}^{g(x)} \\ D_{n+1}^{g(y)} \\ D_{n+1}^{g(z)} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} j & k & l \\ k & j & l \\ l & k & j \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} D_1^{g(x)} \\ D_1^{g(y)} \\ D_1^{g(z)} \end{pmatrix}.$$

şi, implicit

$$D_{n+1}^{g(x)} \leq a_n D_1^{g(x)} + b_n D_1^{g(y)} + c_n D_1^{g(z)}, \tag{3.151}$$

$$D_{n+1}^{g(y)} \leq d_n D_1^{g(x)} + e_n D_1^{g(y)} + c_n D_1^{g(z)}, \tag{3.152}$$

$$D_{n+1}^{g(z)} \leq f_n D_1^{g(x)} + b_n D_1^{g(y)} + g_n D_1^{g(z)}. \tag{3.153}$$

Folosind (3.151), (3.152) şi (3.153), se arată cu uşurinţă că $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy. Într-adevăr, fie $m \geq n$, cu

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) = D_m^{g(x)} + D_{m-1}^{g(x)} + ... + D_{n+1}^{g(x)}$$

$$\leq a_{m-1} D_1^{g(x)} + b_{m-1} D_1^{g(y)} + c_{m-1} D_1^{g(z)} + a_{m-2} D_1^{g(x)} + b_{m-2} D_1^{g(y)} + c_{m-2} D_1^{g(z)}$$

....

$$+ a_n D_1^{g(x)} + b_n D_1^{g(y)} + c_n D_1^{g(z)}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a_n + ... + a_{m-1})\, D_1^{g(x)} + (b_n + ... + b_{m-1})\, D_1^{g(y)} + (c_n + ... + c_{m-1})\, D_1^{g(z)} \\
&\le \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{x} + \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{g(y)} + \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) D_1^{g(z)} \\
&= \left(\alpha^n + ... + \alpha^{m-1}\right) \left(D_1^{g(x)} + D_1^{g(y)} + D_1^{g(z)}\right) \\
&= \alpha^n \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \left(D_1^{g(x)} + D_1^{g(y)} + D_1^{g(z)}\right),
\end{aligned}
$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$.
Similar, se verifică faptul că $\{y_n\}$ şi $\{z_n\}$ sunt şiruri Cauchy .

Deoarece X este complet, atunci există $x, y, z \in X$, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x,\ \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y,\ \lim_{n\to\infty} g(z_n) = z. \tag{3.154}$$

Din (3.154) şi continuitatea lui g, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} g(g(x_n)) = g(x),\ \lim_{n\to\infty} g(g(y_n)) = g(y),\ \lim_{n\to\infty} g(g(z_n)) = g(z). \tag{3.155}$$

Din (3.149) şi comutativitatea lui F şi g avem,

$$g(g(x_{n+1})) = g(F(x_n, y_n, z_n)) = F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), \tag{3.156}$$

$$g(g(y_{n+1})) = g(F(y_n, x_n, z_n)) = F(g(y_n), g(x_n), g(z_n)) \tag{3.157}$$

şi

$$g(g(z_{n+1})) = g(F(z_n, y_n, x_n)) = F(g(z_n), g(y_n), g(x_n)). \tag{3.158}$$

Folosind (3.156) pentru x, y, z, avem

$$g(x) = F(x, y, z),\ g(y) = F(y, x, z) \text{ şi } g(z) = F(z, y, x).$$

Presupunem ipoteza (a) adevărată. Folosind continuitatea funcţiei F şi trecând la limită, când $n \to \infty$ în (3.155), (3.156), obţinem

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \lim_{n\to\infty} g(g(x_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)) \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(x, y, z), \\
g(y) &= \lim_{n\to\infty} g(g(y_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(y_n), g(x_n), g(z_n)) \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(y, x, z), \\
g(z) &= \lim_{n\to\infty} g(g(z_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(z_n), g(y_n), g(x_n)) \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(z_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = F(z, y, x).
\end{aligned}
$$

Similar, se obţin celelalte două egalităţi.

Presupunem acum că (b) este adevărată. Deoarece $\{g(x_n)\}$ este crescător şi $g(x_n) \to x$, reiese faptul că $g(x_n) \le x$. Similar, deoarece $\{g(y_n)\}$ este crescător şi $g(y_n) \to y$, obţinem $g(y_n) \leq y$, şi deoarece $\{g(z_n)\}$ este crescător şi $g(z_n) \to z$, obţinem $g(z_n) \leq z$. Din inegalitatea triunghiului, (3.148) şi (3.156), avem

$$d(g(x), F(x,y,z)) \leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(g(g(x_{n+1})), F(x,y,z))$$

$$= d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), F(x,y,z))$$

$$\leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + jd(g(g(x_n)), g(x))$$

$$+kd(g(g(y_n)), g(y)) + ld(g(g(z_n)), g(z)).$$

Dacă $n \to \infty$ în inegalitatea de mai sus, având în vedere (3.155), obţinem

$$d(g(x), F(x,y,z)) \leq 0,$$

şi în final, $g(x) = F(x,y,z)$.

Similar, se obţine $g(y) = F(y,x,z)$ şi $g(z) = F(z,y,x)$. □

Teorema 3.2.13. *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie astfel încât F este g-monoton. Presupunem că există funcţia de comparaţie $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ cu $\varphi(t) < t$ şi $\lim_{r \to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$, astfel încât*

$$d(F(x,y,z), F(u,v,w)) \tag{3.159}$$

$$\leq \varphi(\max\{d(g(x), g(u)); d(g(y), g(v)); d(g(z), g(w))\})$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w \in X$ cu $g(x) \leq g(u)$, $g(y) \geq g(v)$, $g(z) \leq g(w)$.

Presupunem că $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, g este continuă şi comută cu F şi de asemenea presupunem că

(a) F este continuu sau

(b) X are următoarea proprietate:

(i) dacă există şirul descrescător $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n,

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0,y_0,z_0), g(y_0) \leq F(y_0,x_0,z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0,y_0,x_0)$$

atunci există $x,y,z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x,y,z), g(y) = F(y,x,z) \text{ şi } g(z) = F(z,y,x).$$

Demonstraţie: Fie $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g(x_0) \leq F(x_0,y_0,z_0), g(y_0) \leq F(y_0,x_0,z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0,y_0,x_0).$$

Deoarece $F(X \times X \times X) \subseteq g(X)$, există $x_1, y_1, z_1 \in X$, astfel încât

$$g(x_1) = F(x_0,y_0,z_0), g(y_1) = F(y_0,x_0,z_0) \text{ şi } g(z_1) = F(z_0,y_0,x_0).$$

Continuând procedeul, construim şirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\} \subset X$, astfel încât, pentru orice $n \geq 0$,

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n), \; g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, z_n), \tag{3.160}$$
$$g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n).$$

Folosind inducţia matematică, arătăm că pentru $n \geq 0$

$$g(x_n) \leq g(x_{n+1}), \; g(y_n) \leq g(y_{n+1}), \; g(z_n) \leq g(z_{n+1}). \tag{3.161}$$

Într-adevăr, deoarece

$$g(x_0) \leq F(x_0, y_0, z_0), g(y_0) \leq F(y_0, x_0, z_0) \text{ şi } g(z_0) \leq F(z_0, y_0, x_0)$$

şi

$$g(x_1) = F(x_0, y_0, z_0), \; g(y_1) = F(y_0, x_0, z_0), \; g(z_1) = F(z_0, y_0, x_0),$$

obţinem

$$\Rightarrow g(x_0) \leq g(x_1), \; g(y_0) \leq g(y_1) \text{ şi } g(z_0) \leq g(z_1),$$

deci (3.161) este adevărată pentru $n = 0$. Presupunem acum că

$$g(x_n) \leq g(x_{n+1}), g(y_n) \leq g(y_{n+1}) \text{ şi } g(z_n) \leq g(z_{n+1}), \forall n \geq 0.$$

Atunci, deoarece F este g-monoton, avem

$$g(x_{n+1}) = F(x_n, y_n, z_n) \leq F(x_{n+1}, y_n, z_n) \leq F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = g(x_{n+2}),$$

$$g(y_{n+1}) = F(y_n, x_n, z_n) \leq F(y_{n+1}, x_n, z_n) \leq F(y_{n+1}, x_{n+1}, z_{n+1}) = g(y_{n+2}),$$

şi

$$g(z_{n+1}) = F(z_n, y_n, x_n) \leq F(z_{n+1}, y_n, x_n) \leq F(z_{n+1}, y_{n+1}, x_{n+1}) = g(z_{n+2}).$$

Astfel, conform inducţiei matematice, concluzionăm că (3.161) este adevărată pentru orice $n \geq 0$.

Acum, notăm

$$\delta_n = \max\{d(g(x_n), g(x_{n+1}); d(g(y_n), g(y_{n+1}); d(g(z_n), g(z_{n+1}))\}$$

şi arătăm că

$$\delta_n \leq \delta_{n-1}. \tag{3.162}$$

Deoarece

$$g(x_{n-1}) \leq g(x_n), g(y_{n-1}) \leq g(y_n), g(z_{n-1}) \leq g(z_n)$$

avem

$$d(g(x_n), g(x_{n+1})) = d(F(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}), F(x_n, y_n, z_n)) \tag{3.163}$$
$$\leq \varphi(\max d(g(x_{n-1}), g(x_n)); d(g(y_{n-1}), g(y_n)); d(g(z_{n-1}), g(z_n))) = \varphi(\delta_{n-1}),$$

$$d(g(y_n), g(y_{n+1})) = d(F(y_{n-1}, x_{n-1}, z_{n-1}), F(y_n, x_n, z_n)) \tag{3.164}$$

$$\leq \varphi\left(\max d(g(y_{n-1}), g(y_n)); d(g(x_{n-1}), g(x_n)); d(g(z_{n-1}), g(z_n))\right) \leq \varphi\left(\delta_{n-1}\right),$$

$$d(g(z_n), g(z_{n+1})) = d\left(F(z_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1}), F(z_n, y_n, x_n)\right) \tag{3.165}$$

$$\leq \varphi\left(\max d(g(z_{n-1}), g(z_n)); d(g(y_{n-1}), g(y_n)); d(g(x_{n-1}), g(x_n))\right) = \varphi\left(\delta_{n-1}\right).$$

Adunând relaţiile (3.163), (3.164), (3.165), obţinem

$$\delta_n = \max\left\{d(g(x_n), g(x_{n+1})); d(g(y_n), g(y_{n+1})); d(g(z_n), g(z_{n+1}))\right\}$$

$$\leq \varphi\left(\delta_{n-1}\right) < \delta_{n-1}, \text{ deoarece } \varphi(t) < t, \text{ pentru orice } t > 0.$$

Deci, şirul δ_n este monoton descrescător. Prin urmare, există $\delta_+ \geq 0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta_+$, şi arătăm că $\delta = 0$. Presupunem contrariul, adică $\delta > 0$. Ţinând cont în $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = \delta_+, \text{că}\delta_n \leq \varphi\left(\delta_{n-1}\right)$ şi $\lim\limits_{r\to t} \varphi(r) < t$ pentru orice $t > 0$ avem

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(\delta_{n-1}) = \lim_{\delta_{n-1}\to\delta_+} \varphi(\delta_{n-1}) < \delta,$$

ceea ce este o contradicţie, atunci $\delta = 0$ şi

$$\lim_{n\to\infty} \left[\max d(g(x_n), g(x_{n+1}); d(g(y_n), g(y_{n+1}); d(g(z_n), g(z_{n+1}))\right] = 0$$

implicând

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x_n), g(x_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y_n), g(y_{n+1})) = 0 \tag{3.166}$$

$$\text{şi } \lim_{n\to\infty} d(g(z_n), g(z_{n+1})) = 0.$$

Acum arătăm că $\{g\left(x_n\right)\}, \{g\left(y_n\right)\}, \{g\left(z_n\right)\}$ sunt şiruri Cauchy. Presupunem că cel puţin un şir dintre $\{g\left(x_n\right)\}, \{g\left(y_n\right)\}, \{g\left(z_n\right)\}$ nu este Cauchy. Atunci există $\epsilon > 0$ şi două şiruri de numere întregi $\{l(k)\}, \{m(k)\}$ cu $m(k) > l(k) > k$ şi

$$r_k = \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\Big); \tag{3.167}$$

$$d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\Big)\Big\} \geq \epsilon.$$

Putem presupune, de asemenea, că

$$\max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big); \tag{3.168}$$

$$d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big)\Big\} < \epsilon.$$

alegând $m(k)$ ca cel mai mic, mai mare ca $l(k)$ pentru care (3.167) rămâne adevărată. Folosind relaţiile (3.167), (3.168) şi inegalitatea triunghiului avem

$$\epsilon \leq r_k \leq \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(x_{m(k)-1}), g(x_{m(k)})\Big);$$

$$d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{m(k)-1}), g(y_{m(k)})\Big);$$

$$d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(z_{m(k)-1}), g(z_{m(k)})\Big)$$

$$= \max\Big\{d\Big(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)-1})\Big); d\Big(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)-1})\Big);$$

$$d\Big(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)-1})\Big); \delta_m(k) - 1\Big\} < \max\left\{\epsilon; \delta_m(k) - 1\right\}.$$

Trecând la limită când $k \to \infty$, obţinem

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \epsilon_+. \tag{3.169}$$

Arătăm că $\epsilon = 0$. Vom presupune contrariul, adică $\epsilon > 0$. Folosind inegalitatea triunghiului, obţinem

$$\begin{aligned}
r_k &= \max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\\
&\le \max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{l(k)+1})\right); d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right); d\left(g(x_{m(k)+1}), g(x_{m(k)})\right);\right.\\
&\quad d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1})\right); d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right); d\left(g(y_{m(k)+1}), g(y_{m(k)})\right);\\
&\quad \left. d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{l(k)+1})\right); d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right); d\left(g(z_{m(k)+1}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\\
&= \max\left\{\left[d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{l(k)+1})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{l(k)+1})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{l(k)+1})\right)\right];\right.\\
&\quad \left[d\left(g(x_{m(k)}), g(x_{m(k)+1})\right); d\left(g(y_{m(k)}), g(y_{m(k)+1})\right); d\left(g(z_{m(k)}), g(z_{m(k)+1})\right)\right];\\
&\quad \left.\left[d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right); d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right); d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}
r_k \le \max\Big\{&\delta_{l(k)}; \delta_{m(k)};\\
&\left[d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right); d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right); d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right)\right]\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Din relaţia (3.161) obţinem

$$g\left(x_{l(k)}\right) \le g\left(x_{m(k)}\right),\ g\left(y_{l(k)}\right) \ge g\left(y_{m(k)}\right) \text{ şi } g\left(z_{l(k)}\right) \le g\left(z_{m(k)}\right),$$

şi folosind (3.159) şi (3.160), avem

$$\begin{aligned}
d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right) &= d\left(F\left(x_{l(k)}, y_{l(k)}, z_{l(k)}\right), F\left(x_{m(k)}, y_{m(k)}, z_{m(k)}\right)\right)\\
&\le \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\right]\\
&= \varphi(r_k),\\
d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right) &= d\left(F\left(y_{l(k)}, x_{l(k)}, z_{l(k)}\right), F\left(y_{m(k)}, x_{m(k)}, z_{m(k)}\right)\right)\\
&\le \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\right]\\
&= \varphi(r_k),\\
d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right) &= d\left(F\left(z_{l(k)}, y_{l(k)}, x_{l(k)}\right), F\left(z_{m(k)}, y_{m(k)}, x_{m(k)}\right)\right)\\
&\le \varphi\left[\max\left\{d\left(g(x_{l(k)}), g(x_{m(k)})\right); d\left(g(y_{l(k)}), g(y_{m(k)})\right); d\left(g(z_{l(k)}), g(z_{m(k)})\right)\right\}\right]\\
&= \varphi(r_k).
\end{aligned}$$

Deci, avem

$$\begin{gathered}
d\left(g(x_{l(k)+1}), g(x_{m(k)+1})\right) \le \varphi(r_k), d\left(g(y_{l(k)+1}), g(y_{m(k)+1})\right) \le \varphi(r_k)\\
\text{şi } d\left(g(z_{l(k)+1}), g(z_{m(k)+1})\right) \le \varphi(r_k).
\end{gathered} \tag{3.171}$$

Folosind relaţia (3.171) în (3.170), obţinem $r_k \leq max\left\{\delta_{l(k)}; \delta_{m(k)}; \varphi(r_k)\right\}$. Dacă $k \to \infty$, atunci

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} \varphi(r_k) = \lim_{r_k \to \epsilon_+} \varphi(r_k) < \epsilon, \tag{3.172}$$

şi prin urmare, $\epsilon < \epsilon$, ceea ce este contradicţie. Deci, şirurile $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}$ şi $\{g(z_n)\}$ sunt Cauchy.

Deoarece X este complet, atunci există $x, y, z \in X$ astfel încât,

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = x, \lim_{n\to\infty} g(y_n) = y, \lim_{n\to\infty} g(z_n) = z. \tag{3.173}$$

Folosind (3.173) şi continuitatea lui g, avem

$$\lim_{n\to\infty} g(g(x_n)) = g(x), \lim_{n\to\infty} g(g(y_n)) = g(y), \lim_{n\to\infty} g(g(z_n)) = g(z). \tag{3.174}$$

Folosind (3.160) şi faptul că F comută cu g, avem,

$$g(g(x_{n+1})) = g(F(x_n, y_n, z_n)) = F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), \tag{3.175}$$

$$g(g(y_{n+1})) = g(F(y_n, x_n, z_n)) = F(g(y_n), g(x_n), g(z_n)), \tag{3.176}$$

$$g(g(z_{n+1})) = g(F(z_n, y_n, x_n)) = F(g(z_n), g(y_n), g(x_n)). \tag{3.177}$$

Deoarece, F este continuu, $g(x_n) \to x, g(y_n) \to y, g(z_n) \to z$, şi trecând la limită când $n \to \infty$ în (3.175), (3.176), (3.177), şi folosind (3.173), (3.174), obţinem:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \lim_{n\to\infty} g(g(x_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)) = \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(x, y, z), \\
g(y) &= \lim_{n\to\infty} g(g(y_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(y_n), g(x_n), g(z_n)) = \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n), \lim_{n\to\infty} g(z_n)\right) = F(y, x, z), \\
g(z) &= \lim_{n\to\infty} g(g(z_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} F(g(z_n), g(y_n), g(x_n)) = \\
&= F\left(\lim_{n\to\infty} g(z_n), \lim_{n\to\infty} g(y_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)\right) = F(z, y, x).
\end{aligned}$$

Astfel, am demonstrat că F şi g au un punct coincident triplu.

Acum presupunem că (b) este adevărată. Deoarece $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ sunt crescătoare şi $g(x_n) \to x$, $g(y_n) \to y$, şi $g(z_n) \to z$, şi folosind (b), avem

$$g(x_n) \leq x, g(y_n) \leq y \text{ şi } g(z_n) \leq z, \text{ pentru orice } n.$$

Dacă folosim inegalitatea triunghiului, (3.175), (3.176), (3.177) şi (3.159) obţinem

$$\begin{aligned}
d(g(x), F(x,y,z)) &\leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(g(g(x_{n+1})), F(x,y,z)) \\
&= d(g(x), g(g(x_{n+1}))) + d(F(g(x_n), g(y_n), g(z_n)), F(x,y,z)) \\
&\leq d(g(x), g(g(x_{n+1}))) \\
&+\varphi(\max\{d(g(g(x_n)), g(x)); d(g(g(y_n)), g(y)); d(g(g(z_n)), g(z))\}).
\end{aligned}$$

Dacă $n \to \infty$ atunci $d(g(x), F(x,y,z)) \leq 0$. Prin urmare $g(x) = F(x,y,z)$.

Similar, se arată că $g(y) = F(y,x,z)$ şi $g(z) = F(z,y,x)$. Astfel, am demonstrat că F şi g au un punct triplu coincident. $\square$

Corolarul 3.2.14. *Fie $(X, \leq)$ un spaţiu parţial ordonat şi d o metrică pe X, astfel încât (X,d) este spaţiu metric complet. Fie $F : X \times X \times X \to X$ un operator şi $g : X \to X$ o funcţie, astfel încât F este g-monoton. Presupunem că există constanta $k \in [0,1)$, astfel încât*

$$d\left(F\left(x,y,z\right), F\left(u,v,w\right)\right) \tag{3.178}$$

$$\leq k\left(max\left\{d(g(x),g(u)); d(g(y),g(v)); d(g(z),g(w))\right\}\right)$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w \in X$ cu $g\left(x\right) \leq g\left(u\right),\ g\left(y\right) \geq g\left(v\right),\ g\left(z\right) \leq g\left(w\right)$.

Presupunem că $F\left(X \times X \times X\right) \subseteq g\left(X\right)$, g este continuă şi comută cu F şi de asemenea, presupunem că

(a) F este continuu sau

(b) X are următoarea proprietate:

(i) dacă există şirul crescător cu $\{x_n\} \to x$, atunci $x_n \leq x$ pentru orice n.

Dacă există $x_0, y_0, z_0 \in X$, astfel încât

$$g\left(x_0\right) \leq F\left(x_0,y_0,z_0\right), g\left(y_0\right) \leq F\left(y_0,x_0,z_0\right) \text{ şi } g\left(z_0\right) \leq F\left(z_0,y_0,x_0\right)$$

atunci există $x,y,z \in X$, astfel încât

$$g\left(x\right) = F\left(x,y,z\right), g\left(y\right) = F\left(y,x,z\right) \text{ şi } g\left(z\right) = F\left(z,y,x\right).$$

Demonstraţie: Folosind demonstraţia Teoremei 3.2.13, pentru $\varphi(t) = kt$ cu $k \in [0,1)$, atunci există $x,y,z \in X$, astfel încât

$$g(x) = F(x,y,z), g(y) = F(y,x,z), g(z) = F(z,y,x).$$

$\square$

2.3. Teoreme de existenţă şi unicitate

Teorema 3.2.15 (Borcut, [**40**]). *În condiţiile Teoremei 3.1.4, dacă este îndeplinită şi condiţia: pentru orice $(x,y,z), (x^*,y^*,z^*) \in X \times X \times X$, există $(u,v,w) \in X^3$ astfel încât $(F(u,v,w), F(v,u,w), F(w,v,u))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, atunci F şi g are un unic punct triplu coincident.*

Demonstraţie: Dacă $(x^*,y^*,z^*) \in X \times X \times X$ este un alt punct triplu coincident pentru F şi g, atunci vom arăta că

$$d[(g(x), g(y), g(z)), (g(x^*), g(y^*), g(z^*))] = 0.$$

Deoarece $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*)$ sunt puncte triple coincidente, avem

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z), g(z) = F(z, y, x)$$

şi respectiv

$$g(x^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Din ipoteză, rezultă că există $(u, v, w) \in X \times X \times X$, astfel încât $(g(u), g(v), g(w))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$.

Luăm $u_0 = u, v_0 = v, w_0 = w$, atunci există $u_1, v_1, w_1 \in X \times X \times X$, astfel încât

$$g(u_1) = F(u_0, v_0, w_0), g(v_1) = F(v_0, u_0, w_0), g(w_1) = F(w_0, v_0, u_0).$$

Pentru $n > 1$, continuând procedeul construim şirurile $\{g(u_n)\}, \{g(v_n)\}$ şi $\{g(u_n)\}$, astfel încât

$$g(u_{n+1}) = F(u_n, v_n, w_n), g(v_{n+1}) = F(v_n, u_n, w_n) \text{ şi } g(w_{n+1}) = F(w_n, v_n, u_n).$$

În plus, dacă $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ şi $x_0^* = x^*, y_0^* = y^*, z_0^* = z^*$, definim în acelaşi mod şirurile $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ şi $\{g(x_n^*)\}, \{g(y_n^*)\}, \{g(z_n^*)\}$. Se demonstrează cu uşurinţă că, pentru orice $n \geq 1$,

$$g(x_n) = F(x, y, z), g(y_n) = F(y, x, z), g(z_n) = F(z, y, x) \text{ şi}$$

$$g(x_n^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y_n^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z_n^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Deoarece

$$(F(x, y, z), F(y, x, z), F(z, y, x)) = (g(x_1), g(y_1), g(z_1)) = (g(x), g(y), g(z))$$

şi

$$(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u)) = (g(u_1), g(v_1), g(w_1))$$

sunt comparabile, şi $g(x) \leq g(u_1), g(y) \geq g(v_1)$ şi $g(z) \leq g(w_1)$. Este uşor să demonstrăm că $(g(x), g(y), g(z))$ şi $(g(u_n), g(v_n), g(w_n))$ sunt comparabile şi că $g(x) \leq g(u_n), g(y) \geq g(v_n)$ şi $g(z) \leq g(w_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

Din (3.148) şi folosind demonstraţia teoremei 3.2.12, avem

$$d(g(x), g(u_{n+1})) = d(F(x, y, z), F(u_n, v_n, w_n))$$

$$\leq jd(g(x), g(u_n)) + kd(g(y), g(v_n)) + ld(g(z), g(w_n)),$$

$$d(g(y), g(v_{n+1})) = d(F(y, x, z), F(v_n, u_n, w_n))$$

$$\leq jd(g(y), g(v_n)) + kd(g(x), g(u_n)) + ld(g(z), g(w_n)),$$

şi

$$d(g(z), g(w_{n+1})) = d(F(z, y, x), F(w_n, v_n, u_n))$$

$$\leq jd(g(z), g(w_n)) + kd(g(y), g(v_n)) + ld(g(x), g(u_n)).$$

Din relaţiile de mai sus, obţinem

$$\frac{d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(y), g(u_{n+1})) + d(g(z), g(w_{n+1}))}{3}$$
$$\leq \frac{j+k+l}{3} \cdot d(g(x), g(u_n)) + \frac{j+2k}{3} \cdot d(g(y), g(v_n)) + \frac{j+2l}{3} \cdot d(g(z), g(w_n))$$
$$\leq \alpha \left[d(g(x), g(u_n)) + d(g(y), g(v_n)) + d(g(z), g(w_n))\right]$$
$$\leq \alpha^n \left[d(g(x), g(u_1)) + d(g(y), g(v_1)) + d(g(z), g(w_1))\right], \tag{3.179}$$

unde $\alpha = j + k + l < 1$.

Trecând la limită cu $n \to \infty$ în relaţia (3.179), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y), g(v_{n+1})) = 0, \text{ şi}$$
$$\lim_{n\to\infty} d(g(z), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.180}$$

Similar, se arată că

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x^*), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y^*), g(v_{n+1})) = 0, \text{ şi}$$
$$\lim_{n\to\infty} d(g(z^*), g(w_{n+1})) = 0. \tag{3.181}$$

Din inegalitatea triunghiului, (3.180) şi (3.181) avem

$$d(g(x), g(x^*)) \leq d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(x^*), g(u_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$
$$d(g(y), g(y^*)) \leq d(g(y), g(v_{n+1})) + d(g(y^*), g(v_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$
$$d(g(z), g(z^*)) \leq d(g(z), g(w_{n+1})) + d(g(z^*), g(w_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

demonstraţia fiind finalizată. □

Teorema 3.2.16. *Dacă la ipotezele Teoremei 3.2.13 adăugăm condiţia: pentru orice $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$, există $(u, v, w) \in X^3$ astfel încât $(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$, atunci F şi g au un unic punct coincident triplu.*

Demonstraţie: Pentru a demonstra acest fapt, vom presupune că avem al doilea punct triplu coincident $(x^*, y^*, z^*) \in X \times X \times X$ pentru F şi g, şi arătăm că

$$d[(g(x), g(y), g(z)), (g(x^*), g(y^*), g(z^*))] = 0.$$

Deoarece $(x, y, z), (x^*, y^*, z^*)$ sunt puncte triple coincidente , avem

$$g(x) = F(x, y, z), g(y) = F(y, x, z), g(z) = F(z, y, x)$$

şi respectiv

$$g(x^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Conform noii condiţii introduse în teoremă, există $(u, v, w) \in X \times X \times X$, astfel încât $(g(u), g(v), g(w))$ este comparabil cu $(g(x), g(y), g(z))$ şi cu $(g(x^*), g(y^*), g(z^*))$.

Luăm $u_0 = u, v_0 = v, w_0 = w$, atunci există $u_1, v_1, w_1 \in X \times X \times X$, astfel încât

$$g(u_1) = F(u_0, v_0, w_0), g(v_1) = F(v_0, u_0, w_0), g(w_1) = F(w_0, v_0, u_0).$$

Pentru $n > 1$, continuăm procedeul şi construim şirurile $\{g(u_n)\}, \{g(v_n)\}$ şi $\{g(u_n)\}$, astfel încât

$$g(u_{n+1}) = F(u_n, v_n, w_n), g(v_{n+1}) = F(v_n, u_n, w_n) \text{ şi } g(w_{n+1}) = F(w_n, v_n, u_n).$$

Mai mult, luăm $x_0 = x, y_0 = y, z_0 = z$ şi $x_0^* = x^*, y_0^* = y^*, z_0^* = z^*$ şi, în acelaşi mod definim şirurile $\{g(x_n)\}, \{g(y_n)\}, \{g(z_n)\}$ şi $\{g(x_n^*)\}, \{g(y_n^*)\}, \{g(z_n^*)\}$.
Se demonstrează cu uşurinţă că, pentru orice $n \geq 1$,

$$g(x_n) = F(x, y, z), g(y_n) = F(y, x, z), g(z_n) = F(z, y, x) \text{ şi}$$

$$g(x_n^*) = F(x^*, y^*, z^*), g(y_n^*) = F(y^*, x^*, z^*), g(z_n^*) = F(z^*, y^*, x^*).$$

Deoarece

$$(F(x, y, z), F(y, x, z), F(z, y, x)) = (g(x_1), g(y_1), g(z_1)) = (g(x), g(y), g(z))$$

şi

$$(F(u, v, w), F(v, u, w), F(w, v, u)) = (g(u_1), g(v_1), g(w_1))$$

sunt comparabile, atunci $g(x) \leq g(u_1), g(y) \leq g(v_1)$ şi $g(z) \leq g(w_1)$. Este uşor să demonstrăm că $(g(x), g(y), g(z))$ şi $(g(u_n), g(v_n), g(w_n))$ sunt comparabile şi că $g(x) \leq g(u_n), g(y) \leq g(v_n)$ şi $g(z) \leq g(w_n)$ pentru orice $n \geq 1$.

Astfel, ţinând cont de condiţia de contracţie (3.159) şi folosind demonstraţia Teoremei 3.2.13, avem

$$d(g(x), g(u_{n+1})) = d(F(x, y, z), F(u_n, v_n, w_n))$$
$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(x), g(u_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right),$$
$$d(g(y), g(v_{n+1})) = d(F(y, x, z), F(v_n, u_n, w_n))$$
$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(y), g(v_n)); d(g(x), g(u_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right),$$

şi

$$d(g(z), g(w_{n+1})) = d(F(z, y, x), F(w_n, v_n, u_n))$$
$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(z), g(w_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(x), g(u_n))\right\}\right).$$

Din relaţiile de mai sus, obţinem

$$\max\left\{d(g(x), g(u_{n+1})); d(g(y), g(u_{n+1})); d(g(z), g(w_{n+1}))\right\} \tag{3.182}$$
$$\leq \varphi\left(\max\left\{d(g(x), g(u_n)); d(g(y), g(v_n)); d(g(z), g(w_n))\right\}\right)$$
$$\leq \varphi^n\left(\max\left\{d(g(x), g(u_1)); d(g(y), g(v_1)); d(g(z), g(w_1))\right\}\right).$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ în relaţia (3.182), obţinem

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y), g(v_{n+1})) = 0, \tag{3.183}$$

$$\text{şi } \lim_{n\to\infty} d(g(z), g(w_{n+1})) = 0.$$

Similar, se poate dovedi că

$$\lim_{n\to\infty} d(g(x^*), g(u_{n+1})) = 0, \lim_{n\to\infty} d(g(y^*), g(v_{n+1})) = 0, \tag{3.184}$$

$$\text{şi } \lim_{n\to\infty} d(g(z^*), g(w_{n+1})) = 0.$$

Pornind de la relaţiile (3.183) şi (3.184) şi aplicând inegalitatea triunghiului, obţinem

$$d(g(x), g(x^*)) \le d(g(x), g(u_{n+1})) + d(g(x^*), g(u_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

$$d(g(y), g(y^*)) \le d(g(y), g(v_{n+1})) + d(g(y^*), g(v_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

$$d(g(z), g(z^*)) \le d(g(z), g(w_{n+1})) + d(g(z^*), g(w_{n+1})) \to 0 \text{ când } n \to \infty,$$

Cu acestea, demonstraţia este încheiată. □

3. Exemple.

Vom da în acest paragraf exemple de operatori atât mixt-monotoni, cât şi monotoni, ce au puncte triple coincidente şi verifică ipotezele teoremelor de existenţă şi unicitate prezentate în paragrafele 3.1 şi 3.2.

Spaţiul pe care lucrăm este $\mathbb{R}^3$, şi pe acest spaţiu condiţia de comparare a elementelor acestui spaţiu, inpusă la teoremele de unicitate, este îndeplinită.

Exemplul 3.3.17. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ *şi* $F : X \times X \times X \to X$*, dată de relaţia*

$$F(x, y, z) = \frac{4x - 4y + 3z + 1}{12},$$

şi $g : X \to X$*, unde* $g(x) = 10x - 1$.

Se arată cu uşurinţă, ca la exemplele din paragraful 2.3.1, că F şi g îndeplinesc condiţiile Teoremei 3.1.4.

Condiţia de contracîe (3.110) este verificată pentru $j = \frac{1}{3}, k = \frac{1}{3}$ şi $l = \frac{1}{4}$:

$$|F(x, y, z) - F(u, v, w)| = \left|\frac{1}{3}(x - u) + \frac{1}{3}(v - y) + \frac{1}{4}(z - w)\right|$$

$$< 10\left|\frac{1}{3}(x - u) + \frac{1}{3}(v - y) + \frac{1}{4}(z - w)\right| \le \frac{10}{3}|x - u| + \frac{10}{3}|v - y| + \frac{10}{4}|z - w|$$

$$= \frac{1}{3}|g(x) - g(u)| + \frac{1}{3}|g(v) - g(y)| + \frac{1}{4}|g(z) - g(w)|.$$

F şi g sunt continue, iar F este mixt-g-monoton.

Prin calcul se verifică uşor condiţia $g(F(x, y, z)) = F(g(x), g(y), g(z))$.

Punctul $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{18}, \frac{2}{9}, \frac{1}{18})$.

Deci F şi g au un unic punct triplu coincident pe $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right)$ şi este soluţia sistemului

$$\begin{cases} F(x, y, z) = g(x) \\ F(y, x, y) = g(y) \\ F(z, y, x) = (z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 116x + 4y - 3z = 13 \\ 4x + 113y = 13 \\ -3x + 4y + 116z = 13 \end{cases}.$$

Exemplul 3.3.18. *Fie* $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ *şi* $F : X\times X\times X \to X$*, dată de*
$$F(x,y,z)=\frac{x-2y+z+1}{12},$$
şi $g : X \to X$*,dată de* $g(x)=x+1$.

Este uşor de a arăta că F şi g satisfac condiţia de contracţie (3.121) cu $\varphi(t)=a\frac{t}{3}$, cu $a\in[0,1)$ şi celelalte ipoteze ale teoremei 3.1.6. $\left(\frac{-11}{12},\frac{-11}{12},\frac{-11}{12}\right)$ este unicul punct triplu coincident pentru F şi g.

Următoarele două exemple vor fi pentru operatori monotoni, ca aplicaţie la teoremele 3.2.12, 3.2.13.

Exemplul 3.3.19. *Fie* $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ *şi* $F : X\times X\times X \to X$*, dată de relaţia*
$$F(x,y,z)=\frac{4x+4y+3z+1}{12},$$
şi $g : X \to X$*, unde* $g(x)=x+1$.

F şi g satisfac condiţia de contracţie (3.148) cu $j=\frac{1}{3}, k=\frac{1}{3}$ şi $l=\frac{1}{4}$ şi celelalte condiţii ale Teoremei 3.1.6. Deci F şi g au un unic punct coincident pe $(-11,-11,-11)$ şi este soluţia sistemului
$$\begin{cases} F(x,y,z)=g(x) \\ F(y,x,z)=(y) \\ F(z,y,x)=(z) \end{cases} ,\Rightarrow \begin{cases} -8x+4y+3z=11 \\ 4x-8y+3z=11 \\ 3x+4y-8z=11 \end{cases}.$$

Exemplul 3.3.20. *Fie* $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ *şi* $F : X\times X\times X \to X$*, dată de*
$$F(x,y,z)=\frac{x+2y+z+1}{12},$$
şi $g : X \to X$*, dată de* $g(x)=x+1$.

Se arată ca la celelalte exemple că F şi g satisfac (3.159) cu $\varphi(t)=a\frac{t}{3}$, cu $a\in[0,1)$ şi celelalte ipoteze ale Teoremei 3.2.13 şi $\left(\frac{-11}{8},\frac{-11}{8},\frac{-11}{8}\right)$ este unicul punct triplu coincident pentru F şi g.

Exemplul 3.3.21. *Fie* $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$, $F(x,y,z)=x-y^3+z+1$ *şi* $g=x+1$.

Vom verifica condiţiile Corolarului 3.1.5:

F este continu şi mixt-monoton.

Pentru orice $k\in[0,1)$, condiţia de contracţie nu v-a fi îndeplinită. Există (x,y,z), $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ astfel încât
$$\frac{k}{3}d((x,y,z),(u,v,w))=\frac{k}{3}(d(x,u)+d(y,v)+d(z,w))$$
$$\leq\frac{1}{3}(d(x,u)+d(y,v)+d(z,w))<d(F(x,y,z),F(u,v,w)).$$

Condiţia $F(g(x), g(y), g(z)) = g(F(x, y, z))$.

Pentru

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x \\ F(y, x, y) = y \\ F(z, y, x) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3 = z \\ x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}.$$

Deci, avem trei puncte fixe coincidente $(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)$ deşi nu sunt îndeplinite toate condiţiile teoremei.

Exemplul 3.3.22. *Fie* $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x-y|$, $g(x) = x+1$ *şi* $F(x, y, z) = 2x+y+z$.

Fie

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x \\ F(y, x, z) = y \\ F(z, y, x) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}.$$

Soluţia acestui sistem este $(m, n, 1 - m - n)$, unde $m, n \in \mathbb{R}$. Deci, operatorul F are o infinitate de puncte triple coincidente. Vom vedea că, orice condiţie de contracţie din teoremele prezentate în acest capitol nu este îndeplinită.

Pentru $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ şi $(u, v, w) = (1, 1, 1)$ avem:

$$\begin{aligned} d(F(x, y, z), F(u, v, w)) &= |2(x-u) + (y-v) + (z-w)| = 8 \\ &> 6 = [d(g(x), g(u)) + d(g(y), g(v)) + d(g(z), g(w))] \\ &> \frac{k}{3}[d(g(x), g(u)) + d(g(y), g(v)) + d(g(z), g(w))], \text{ pentru orice } k \in [0, 1). \end{aligned}$$

Operatorul F este continu şi monoton, dar nu este îndeplinită condiţia de contracţie şi condiţia $F(g(x), g(y), g(z)) = g(F(x, y, z))$.

CAPITOLUL 4

Concluzii

După cum am prezentat în prefaţă, rolul teoriei punctului fix este major în dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii, atât prin contribuţiile pur teoretice cât şi cele aplicative. Fără îndoială, rolul central al acestei teorii îl are **Principiul Banach-Caccioppoli-Picard**, principiu promotor al întregii teorii a punctului fix. În secolul precedent, studiul acestei teorii s-a făcut predominant pentru operatori definiţi pe **spaţii metrice complete**.

În anul 2004, Ran şi Reueings, în lucrarea [**108**], aplică Principiul Banach-Caccioppoli-Picard pe **spaţii metrice complete parţial ordonate**.

Pornind de la rezultatele acestei lucrări, Bhaskar şi Laksmikantham, în articolul[**62**] apărut în anul 2006, extind această teorie la **spaţii metrice parţial ordonate produs** $X \times X$ şi introduc conceptul de **punct cuplat fix** pentru **operatori mixt-monotoni** de tip Picard, obţinând rezultate ce privesc existenţa, existenţa şi unicitatea acestor puncte.

După trei ani, în articolul [**84**] Lakshmikantham şi Ćirić generalizează noţiunea de punct fix cuplat şi introduc conceptul de **punct coincident cuplat**, obţinând rezultate de existenţă şi unicitate a punctelor coincidente pentru **operatori mixt-g-monotoni** ce verifică condiţia de contracţie de tipul **Matkowski-Rus**.

Berinde în lucrările [**23**], [**24**], obţine rezultate mai generale prin considerarea unor condiţii de contracţie mai slabe, cum ar fi:

$$d(F(x,y),F(u,v)) + d(F(y,x),F(v,u)) \le k[d(x,u) + d(y,v)].$$

După cum s-a văzut, această teorie a fost prezentată în capitolul I. Din anul 2009 până în prezent au apărut peste 80 de lucrări ce abordează atât teoria punctelor cuplate fixe, cât şi teoria punctelor cuplate coincidente pentru operatori definiţi pe diferite spaţii şi ce verifică diferite tipuri de contracţii.

Trendul de extindere a teoriei punctului fix continuă, şi în anul 2011 se lansează o nouă extindere în lucrările [**31**] **"Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** şi [**32**] **"Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces"** de autorii Berinde-Borcut, respectiv Borcut-Berinde, unde introduc conceptele de **puncte fixe triple** şi respectiv **puncte coincidente triple**. După cum s-a văzut în capitolele II şi III, rezultatele acestei teorii au fost obţinute pentru operatori monotoni şi mixt-monotoni definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, iar condiţiile de contracţie folosite sunt:

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq\frac{k}{3}\left[d\left(x,u\right)+d\left(y,v\right)+d\left(z,w\right)\right],\ \text{cu } k\in[0,1);$$

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(x,u\right)+kd\left(y,v\right)+ld\left(z,w\right),$$

unde $j,k,l\in[0,1)$ cu $j+k+l<1$, şi pentru oricare $x\geq u, y\leq v, z\geq w$;

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq jd\left(g\left(x\right),g\left(u\right)\right)+kd\left(g\left(y\right),g\left(v\right)\right)+ld\left(g\left(z\right),g\left(w\right)\right);$$

$$d\left(F\left(x,y,z\right),F\left(u,v,w\right)\right)\leq\varphi\left(\max\left\{d(g(x),g(u));d(g(y),g(v));d(g(z),g(w))\right\}\right)$$

pentru orice $x,y,z,u,v,w\in X$ cu $g\left(x\right)\leq g\left(u\right),\ g\left(y\right)\geq g\left(v\right),\ g\left(z\right)\leq g\left(w\right)$, iar φ este o funcţie de comparaţie.

Consider că aceaste rezultate obţinute privind punctele fixe triple au o mare importanţă în ansamblul teoriei punctelor fixe, deoarece, pe lângă directa aplicabilitate în rezolvarea ecuaţiilor integrale (paragraful 2.3), au generat apariţia a noi articole pe temă [**1**], [**109**], [**15**], [**110**], [**9**] iar articolul [**31**] **Berinde, V.,Borcut, M.,** ***Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*****, Nonlinear Anal., 74, (2011) 4889-4897**; are **12 citări date de L. Ciric, E. Karapinar, B. Samet, M. Abbas, H. Aydi, K.P.R. Rao** şi se poate continua cercetarea pe următoarele direcţii:

1. Obţinerea de rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru operatori mixt monotoni (monotoni) definiţi pe spaţii metrice parţial ordonate, în care operatorul să verifice un alt tip de contracţie, cum ar fi: **Rakotch, Kannan, Ćirić-Reich-Rus, Ćirić, Zanfirescu, Meir-Keeler, Istrăţescu, Rus-Kasahara-Rhoades şi altele**. Acum vom da pentru exemplificare, condiţia de contracţie de tipul **Kannan** pentru puncte fixe, puncte fixe cuplate şi pentru puncte fixe triple:

Fie operatorul $F:X\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$,

$$d(F(x),F(y))\leq k\left[d(x,F(x))+d(y,F(y))\right];$$

Fie operatorul $F:X^2\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$, atunci

$$d(F(x,y),F(u,v))\leq\frac{k}{2}\left[d(x,F(x,y))+d(y,F(y,x))+d(u,F(u,v))+d(v,F(v,u))\right];$$

Fie operatorul $F:X^3\to X$ şi $k\in[0,\frac{1}{2})$ atunci

$$d(F(x,y,z),F(u,v,w))\leq\frac{k}{4}\left[d(x,F(x,y,z))+d(y,F(y,x,y))+d(z,F(z,y,x))\right.$$
$$\left.+d(u,F(u,v,w))+d(v,F(v,u,v))+d(w,F(w,v,u))\right].$$

Tot pe această direcţie se poate studia existenţa, existenţa şi unicitatea punctelor triple pentru operatori ce îndeplinesc condiţii de contracţie mai slabe cum ar fi:

$$d\left(F(x,y,z),F(u,v,w)\right)+d\left(F(y,x,y),F(v,u,v)\right)+d\left(F(z,y,x),F(w,v,u)\right)$$
$$\leq k\left[d(x,u)+d(y,v)+d(z,w)\right].$$

2. Obţinerea de rezultate ce privesc existenţa şi unicitatea punctelor fixe pentru operatori mixt monotoni (monotoni) definiţi pe alt tip de spaţii:

3. Obţinerea de noi rezultate pentru extinderea la puncte fixe cvadruple, extindere introdusă de către Karapinar şi, respectiv, Karapinar-Berinde, în lucrările [**79**] şi respectiv [**80**], extindere fundamentată pe teoria punctelor fixe triple.

4. Deoarece există operatori care nu sunt nici monotoni şi nici mixt-monotoni, după definiţia 2.1.1 se justifică considerarea unei teorii a punctelor triple fixe pentru operatori ce îndeplinesc o proprietate de monotonie hibridă, şi anume: să fie crescător pe primele două componente şi descrescător pe a treia componentă.

În lucrarea [**43**], Berzig şi Samet introduc conceptul de m-mixt monoton şi de punct fix de ordinul N pentru un operator $F : X^N \to X$, unde F este monoton crescător pe primele m componente, iar pe următoarele $N - m$ componente este monoton descrescător. Un studiu de cercetare poate fi aprofundarea a ceea ce a propus Berzig şi Samet.

Bibliografie

[1] Abbas, M., Aydi, H., M., Karapýnar, E., *Tripled Fixed Points of Multivalued Nonlinear Contraction Mappings in Partially Ordered Metric Spaces*, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2011, Article ID 812690, 12 pages, doi:10.1155/2011/812690 **217** (2010), no. 1, 195–202

[2] Abbas, M., Ali Khan, M., Radenović, S., *Common coupled fixed point theorems in cone metric spaces for w-compatible mappings*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), no. 1, 195–202

[3] Abbas, M.; Damjanovic, B.; Lazovic, R., *Fuzzy common fixed point theorems for generalized contractive mappings*, Appl. Math. Lett. **23** (2010), no. 11, 1326–1330.

[4] Abbas, M.; Hajj-Diab, A., *Common zeros of exponential polynomials and Shapiro conjecture*, JP J. Algebra Number Theory Appl. **16** (2010), no. 2, 143–152.

[5] Abbas, M.; Jungck, G., *Common fixed point resul for noncommuting mappings without continuity incone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341**,(2008), 416-420.

[6] J. Aczel: *Lectures on Functional Equations and their Applications* Academic Press, New York- San Francisco- London, 1966.

[7] Aydi, H., *Some coupled fixed point results on partial metric spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences . (2011), art. no. 647091.

[8] Aydi, H., Karapnar, E., Shatanawi, W., *Coupled fixed point results for (ψ, φ) -weakly contractive condition in ordered partial metric spaces*, Computers and Mathematics with Applications. **62 (12)** (2011), 4449-4460 .

[9] Aydi, H., Karapnar, E., *Triple fixed point in ordered metric spaces*,Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. Volume 4 Issue 1 (2012.), Pages 197-207.

[10] Aydi, H., Damjanovic' Bosko, B., Samet, B., Shatanawi, W., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered G-metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling . **54 (9-10)** (2011)2443-2450 .

[11] Aydi, H., Postolache, M., Shatanawi, W., *Coupled fixed point results for (?, f) -weakly contractive mappings in ordered G-metric spaces*, Computers and Mathematics with Applications . **63 (1)** (2012), pp. 298-309.

[12] Altun, Ishak. *Common fixed point theorem for maps satisfying a general contractive condition of integral type*, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 22 (2010), 195–206.

[13] Altun, I., Damjanović, B. Djorić, D., *Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces*, Appl. Math. Lett. **23** (2010), no. 3, 310–316

[14] Altun, I., Rakocević, V., *Ordered cone metric spaces and fixed point results*, Comput. Math. Appl. **60** (2010), no. 5, 1145–1151

[15] Amini-Harandi, A., *Coupled and tripled fixed point theory in partially ordered metric spaces with application to initial value problem*,Mathematical and Computer Modelling (2012) Article in Press

[16] Azam, Akbar; Beg, Ismat; Arshad, Muhammad. *Fixed point in topological vector space-valued cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Art ID. 604084, 9 pp.

[17] Banach, S., *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales*, Fund. Math. 3 (1922), 133-181.

[18] Bartoszewski, Z., *Solving boundary value problems for delay differential equations by a fixed-point method*, Journal of Computational and Applied Mathematics. , **236 (6)** (2011) 1576-1590 .

[19] Beg, I., Abbas, M., *Fixed points and invariant approximation in random normed spaces*, Carpathian J. Math. **26** (2010), no. 1, 36–40

[20] BEG, ISMAT; BUTT, ASMA RASHID. *Common fixed point for generalized set valued contractions satisfying an implicit relation in partially ordered metric spaces*, Math. Commun. **15** (2010), no. 1, 65–76.

[21] BEG, ISMAT; BUTT, ASMA RASHID., *Fixed point for set-valued mappings satisfying an implicit relation in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. , **71** (2009) 3699-3704.

[22] BEG, ISMAT; SEDGHI, SHABAN; SHOBE, NABI., *Common fixed point of uniformly R-subweakly commuting mappings in fuzzy Banach spaces*, J. Fuzzy Math. **18** (2010), no. 1, 75–84.

[23] BERINDE, V.,*Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. **74 (18)** (2011), 7347-7355 .

[24] BERINDE, V., *Coupled fixed point theorems for ϕ-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. **75 (6)** (2012), 3218-3228 .

[25] BERINDE, , *Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*, Computers and Mathematics with Applications, Revised 11 January 2012. Accepted 2 February 2012. Available online 22 February 2012. .

[26] BERINDE, V.,*Coupled coincidence point theorems for mixed monotone nonlinear operators*, Nonlinear Analysis, Computers and Mathematics with Applications, Article in Press.

[27] Berinde, V., *Iterative approximation of fixed points*. Second edition, Lecture Notes in Mathematics, 1912, Springer, Berlin, 2007

[28] Berinde, V., Păcurar, M., *A note on the paper "Remarks on fixed point theorems of Berinde"*, Nonlinear Analysis Forum, 14 (2009), 119-124.

[29] Berinde, V., *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, 9 (2004), No. 1, 43-53

[30] Berinde V., *Contracţii generalizate şi aplicaţii*, Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.

[31] Berinde, V.,Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. , **74** (2011) 4889-4897.

[32] Borcut, M., Berinde, V., *Tripled coincidence theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* , Aplied Mathematics and Computation, **218 (10)** (2012) pp. 5929-5936

[33] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Aplied Mathematics and Computation, **218** (2012) pp. 7339-7346

[34] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* Carpathian J. MAath., (Acceptat).

[35] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* , Creative Mathematics and Informatics, (Acceptat).

[36] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Aplied Mathematics and Computation, (Submitted)

[37] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Mathematics and Computers in Simulation, (Submitted)

[38] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics (Submited)

[39] Borcut, M., *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* (Acceptat) Carpathian J. MAath., (Acceptat).

[40] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* , Creative Mathematics and Informatics, (Acceptat).

[41] Borcut, M., *Tripled coincidente point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces* Filomat J. (submitted)

[42] Berzig, M., *Solving a class of matrix equations via the Bhaskar-Lakshmikantham coupled fixed point theorem*Computers and Mathematics with Applications, (2012) Article in Press

[43] Berzig, M., Samet, B., *An extension of coupled fixed point's concept in higher dimension and applications*Computers and Mathematics with Applications, (2012) Article in Press

[44] Ćirić, Lj. B. *Generalized contractons and fixed point theorem*, Publ. L'Inst. Math., **12** (1971), 19-26.

[45] Ćirić, Lj. B., Lakshmikantham, V. *Coupled random fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*,Stochastic Analysis and Applications, **27 (6)** (2009), pp. 1246-1259.

[46] Ćirić, Lj. B., *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Am. Math. Soc., **45** (1974), 267-273.

[47] Chatterjea, S.K., *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25 (1972), 727-730.

[48] Cho, Y.J., Shah, M.H., Hussain, N., *Coupled fixed points of weakly F-contractive mappings in topological spaces*, Applied Mathematics Letters. **24 (7)** (2011), pp. 1185-1190.

[49] Choudhury, B. S., *A coincidence point result in partially ordered metric spaces for compatible mappings*, Nonlinear Anal. **73** (2010), 2524–2531.

[50] Choudhury, B.S., Maity, P., *Coupled fixed point results in generalized metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling . **54 (1-2)** (2011), pp. 73-79.

[51] Ding, H.-S., Li, L., *Coupled fixed point theorems in partially ordered cone metric spaces*,Filomat . **25 (2)** (2011),pp. 137-149.

[52] Diaz, J.B.; Margolis, B. *A fixed point theorem of the alternative, for contraction on a generalized complete metric space*, Bull. Amer. Math. Soc. **74**(1968), 305-309.

[53] Doric, D., Kadelburg, Z., Radenovic, S.. *Coupled fixed point results for mappings without mixed monotone property*, Applied Mathematics Letters, Article in Press.

[54] Drici, Z., McRae, F.A., Vasundhara Devi, J. *Fixed point theorems for mixed monotone operators with PPF dependence*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . **69 (2)**(2008),pp. 632-636.

[55] Du, W.-S.. *Nonlinear contractive conditions for coupled cone fixed point theorems*, Fixed Point Theory and Applications. (2010), art. no. 190606.

[56] Du, W.-S.. *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions satisfied Mizoguchi-Takahashi's condition in quasiordered metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications. (2010), art. no. 876372.

[57] Edelstein, M. *An extension of BanachŠs contracţie principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 7Ű10.

[58] Eshaghi Gordji, M., Baghani, H., Cho, Y.J., *Coupled fixed point theorems for contractions in intuitionistic fuzzy normed spaces* Mathematical and Computer Modelling .**54 (9-10)** (2011) 1897-1906 .

[59] Eshaghi Gordji, M., Ghods, S., Ghods, M., Hadian, M., *Coupled fixed point theorem for generalized fuzzy meir-keeler contraction in fuzzy metric spaces* Journal of Computational Analysis and Applications .**14 (2)** (2012), pp. 271-277.

[60] Figueroa, R., Pouso, R.L., *Coupled fixed points of multivalued operators and first-order ODEs with state-dependent deviating arguments*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . , **74 (18)** (2011) 6876-6889.

[61] Fréchet, M., *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[62] Gnana Bhaskar, T., Lakshmikantham, V., *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal. **65** (2006), no. 7, 1379–1393

[63] Ghods, S., Eshaghi Gordji, M., Ghods, M., Hadian, M., *Comment on "coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces" [Lakshmikantham and c ťiric ť, nonlinear anal. tma 70 (2009) 4341-4349]*, Journal of Computational Analysis and Applications. **14(5)** (2012), pp. 958-966

[64] Harjani, J; López, B; Sadarangani, K. *Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integral equations* , Nonlinear Anal. **74** (2011), 1749–1760.

[65] Huang, Xianjiu; Zhu, Chuanxi; Wen, Xi. *Common fixed point theorem for four non-self-mappings in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl.**2010** , Art. ID 983802, 14 pp.

[66] Huang, Xianjiu; Zhu, Chuanxi; Wen, Xi. *A common fixed point theorem in cone metric spaces*, Int. J. Math. Anal. (Ruse) **4** (2010), no. 13-16, 721–726.

[67] Huang,L.G.; Zhang, H., *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **332**,(2007), 1468-1476.

[68] Hu, X.-Q., , *Common coupled fixed point theorems for contractive mappings in fuzzy metric spaces* Fixed Point Theory and Applications. (2011) art. no. 363716.

[69] Hu, X.-Q., Ma, X.-Y., *Coupled coincidence point theorems under contractive conditions in partially ordered probabilistic metric spaces* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications .**54 (11-12)** (2011) 2816-2826.

[70] Hu, X.-Q., Ma, X.-Y.,*Coupled coincidence point theorems under contractive conditions in partially ordered probabilistic metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. **74 (17)** (2011), 6451-6458.

[71] Hussain, N., Shah, M.H., Kutbi, M.A.,*Coupled coincidence point theorems for nonlinear contractions in partially ordered quasi-metric spaces with a Q-function*, Fixed Point Theory and Applications. (2011), art. no. 703938.

[72] Jachymski, J.; Jóźwik, I. *Nonlinear contractive conditions: A comparison and related problems*, Banach Center Publ. 77 (2007) 123Ű146

[73] Jachymski, J. , The contracţie principle for mappings on a metric space with a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (136) (2008) 1359-1373.

[74] Kadelburg, Zoran; Pavlovic, Mirjana; Radenovic, Stojan., *Common fixed point theorems for ordered contractions and quasicontractions in ordered cone metric spaces*,Comput. Math. Appl., **59** (2010), no. 9, 3148–3159.

[75] Kannan, R. *Some results on fixed points,*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10** (1968), 71-76

[76] Karapinar, E., Luong, N.V., *Quadruple fixed point theorems for nonlinear contractions*, Computers and Mathematics with Applications , (2012), Article in Press

[77] Karapinar, E., Türkoglu, D., *Best approximations theorem for a couple in cone Banach space*, Fixed Point Theory and Applications, (2010),art. no. 784578

[78] Karapinar, E., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in cone metric spaces*, Comput. Math. Appl., **59** (2010), no. 12, 3656–3668

[79] Karapinar, E., *Quadruple Fixed Point Theorems for Weak ö-Contractions* , International Scholarly Research Network, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2011, Article ID 989423, 15 pages , doi:10.5402/2011/989423

[80] Karapinar, E., *Qoadruplr fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*,Banach J. Math. Anal. , **6** (2012), no. 1, 74-89

[81] Karapinar, Erdal; Turkojlu, Duran., *Best aproximations theorem for a coupled in cone Banach space*, Hindawi Publishing Corporation Fixed Point Theory and Aplications,Volume 2010,Article I D 784578,9 pages.

[82] Kannan, R., *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., **10**(1968), 71-76.

[83] Kirk, W.A.; Srinivasan, P.S. and Veeramani, P. *Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions*, Fixed Point Theory, **4** (2003), no. 1,

79Ű89.

[84] Lakshmikantham, V., Ćirić, L., *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 4341Ű-4349.

[85] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*,Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . , **74 (3)** (2011),pp. 983-992 .

[86] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings and an application to integral equations*, Computers and Mathematics with Applications . , **62 (11)** (2011) 4238-4248 .

[87] Luong, N.V., Thuan, N.X., *Coupled fixed point theorems in partially ordered G-metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling . , **55 (3-4)** (2012) pp. 1601-1609 .

[88] Matkowski, j., *Integrable solutions of functional equations,*,Dissertationes Math., **127** (1975).

[89] Mitrovic, Z. D., *A coupled best approximation theorem in normed spaces*, Nonlinear Anal. **72** (2010) 4049-4052.

[90] Mitrovic, Z. D., *On a coupled fixed point problem in topological vector spaces*, Mathematical and Computer Modelling (2012) Article in Press

[91] Mureşan, A.S., *From Maia fixed point theorem to the fixed point theory in a set with two metrics,*, Carpathian J. Math., **23** (2007) 133-140.

[92] Nashine, H.K., Shatanawi, W., *Coupled common fixed point theorems for a pair of commuting mappings in partially ordered complete metric spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . **62 (4)** (2011) ,pp. 1984-1993.

[93] Nguyen V. L., Nguyen X. T., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces* ,Bulletin of Mathematical Analysis and Applications., Volume 2 Issue 4 (2010), Pages 16-24.

[94] Nguyen V. L., Nguyen X. T., *Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application*, Nonlinear Anal., **74** (2011), 983–992.

[95] Nieto, J. J.; Pouso, R. L. and Rodríyguez-López, R. *Fixed point theorems in ordered abstract spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2505Ű2517.

[96] Nieto,Juan J.; Rodriguez-Lopez, Rosana., *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary diferential equations* , Order**22** (2005), no. 3, 223-239 (2006).

[97] Nieto,Juan J.; Rodriguez-Lopez, Rosana., *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations* , Acta. Math. Sin. ,(Engl. Ser.) **23**(2007), no. 12, 2205–2212 .

[98] O

[99] Olatinwo, M.O., *Stability of coupled fixed point iteration and the continuous dependence of coupled fixed points*,Communications on Applied Nonlinear Analysis, **19 (2)** (2012), pp. 71-83.

[100] Olatinwo, M.O., *Coupled fixed point theorems in cone metric spaces*,Annali dell'Universita di Ferrara , **57 (1)** (2011), pp. 173-180.

[101] Parvaneh, V., *Existence of common coupled fixed point for a class of mappings in partially ordered metric spaces*,Applied Mathematical Sciences , **6(17-20)** (2012), 987-994. 3-4, 1181Ű1187.

[102] Păcurar, M.; I.A. Rus, *Fixed point theorems for cyclic φ-contractions*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **72** (2010), no. Issues 3-4, 1181Ű1187.

[103] Petric, M.A. *Fixed points and best proximity points theorems for cyclical contractive operators*, Teză de doctorat, Universitatea de Nord Baia Mare, Facultatea de Ştiinţe 2011.

[104] M.A. Petric, M.A.; Zlatanov, B.G. *Fixed point theorems of Kannan type for cyclical contractive conditions*, Proceedings of the Anniversary International Conference REMIA 2010, Plovdiv, Bulgaria, 187Ű194.

[105] Petric, M.A. *Some remarks concerning Círíc-Reich-Rus operators*, Creative Math. Inform., **18** (2009), 188Ű193.

[106] Petruşel, A.; Rus, I. A.*Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 411Ű418.

[107] Radu, V. *The fixed point alternative and the stability of functional equations*, Fixed Point Theory **4**(1)(2003) 91-96.

[108] Ran, A. C. M., Reurings, M. C. B., *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), no. 5, 1435–1443

[109] Rao, K. P. R., Kishore, G.N.V., Srinivasa Rao, N., *A Unique Common 3-tupled fixed point theorem for $\psi - \phi$ contractions in partial metric spaces*, Mathematica Aeterna, Vol. 1, (2011), no. 07, 491 - 507

[110] Rao, K. P. R., Kishore, G.N.V.„ *A Unique Common tripled fixed point theorem in partially ordered cone metric spaces*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 3 Issue 4(2011), Pages 213 - 222.

[111] Rassias, J.M.: *Solution of a stability problem of Ulam*,Discuss. Math. **12** (1992), 431-434.

[112] Rassias, Th. M.: *Communication, 27-th International Symposium on Functional Equation* Bielsko-Biala, Katowice, Krokow, Poland, 1989.

[113] Rassias, Th. M.: *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72**(1978), 297-300.

[114] Razani, A., Zadeh, H.H., Jabbari, A.: *Coupled fixed point theorems in partially ordered metric spaces which endowed with vector-valued metrics*, Australian Journal of Basic and Applied Sciences (2012) **6(2)**(1978), pp. 124-129 .

[115] D. O'Reagan, D.; Petruşel, A.*Fixed point theorems for generalized contractions in ordered metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008) 1241Ű1252.

[116] Reich, S., *Kannan's fixed point theorem*, Boll. U.M.I., **4** (1971), 1-11.

[117] Rhoades, B. E., *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 257-290.

[118] I.A. Rus, *Cyclic representatioms and fixed points*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity, **3** (2005), 171Ű178.

[119] Rus, I.A., *O metodâ posledoviseleninâh priblijenii*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **17** (1972), 1433-1437

[120] Rus, I.A., *Some fixed point theorems in metric spaces*, Rend. Ist. di Matem., Univ. di Trieste, 3 (1971), fasc. 2, 1-4.

[121] Rus, I. A., *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001

[122] Rus, I. A., Petruşel, A., Petruşel, G., *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008

[123] Rus, M-D., *Fixed point theorems for generalized contractions in partially ordered metric spaces with semi-monotone metric*, Nonlinear Anal.

[124] Sabetghadam, F., Masiha, H.P., Sanatpour, A.H., *Some coupled fixed point theorems in cone metric spaces*, Fixed Point Theory. Appl., **2009**, Art. ID 125426, 8 pp

[125] Samet, B., *Coupled fixed point theorems for a generalized Meir-Keeler contraction in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., **72** (2010), no. 12, 4508–4517

[126] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P., *Fixed point theorems for a ?-contractive type mappings*,Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications ., **75 (4)** (2012), pp. 2154-2165

[127] Samet, B., Vetro, C., *Coupled fixed point theorems for multi-valued nonlinear contraction mappings in partially ordered metric spaces*,Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications ., **74 (12)** (2011),pp. 4260-4268

[128] Sedghi, S., Altun, I., Shobe, N., *Coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces*, Nonlinear Anal., **72** (2010), no. 3-4, 1298–1304

[129] Sedghi, Shaban; Choudhury, Binayak S.; Shobe, Nabi., *Unique common fixed point theorem for four weakly compatible mappings in complete fuzzy metric spaces* J. Fuzzy Math. **18**, (2010), no. 1, 161–170.

[130] Shatanawi, W., *Partially ordered cone metric spaces and coupled fixed point results*,Computers and Mathematics with Applications . **60 (8)** (2010) ,pp. 2508-2515.

[131] Shatanawi, W., *Some common coupled fixed point results in cone metric spaces*, International Journal of Mathematical Analysis . **4 (45-48)** (2010) ,pp. 2381-2388.

[132] Shatanawi, W., *Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling . **54 (11-12)** (2011) 2816-2826.

[133] Shatanawi, W., *Fixed point theorems for nonlinear weakly C-contractive mappings in metric spaces*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. **40 (3)** (2011) , pp. 441-447.

[134] Shatanawi, W., Samet, B., Abbas, M., *Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in ordered partial metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling . **55 (3-4)** (2012) pp. 680-687.

[135] Shatanawi, W., *On w-compatible mappings and common coupled coincidence point in cone metric spaces*, Applied Mathematics Letters. **25 (6)** (2012) pp.. 925-931.

[136] Turkoglu, D.; Sedghi, S.; Shobe, N., *A common fixed point theorem in complete fuzzy metric spaces*, Novi Sad J. Math. **39** (2009), no. 1, 11–20

[137] Turkoglu, D., Binbasioglu, D., *Some fixed-point theorems for multivalued monotone mappings in ordered uniform space*, Fixed Point Theory and Applications. (2011),art. no. 186237

[138] Ulam, S. M. *A Collection of Mathematical Problems* , Interscience Publ. New York, 1960.

[139] Zamfirescu, T., *Fixed point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel), **23**(1972), 292-298.

[140] Zhu, X.-H., Xiao, J.-Z., *Note on "coupled fixed point theorems for contractions in fuzzy metric spaces"*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . **74 (16)** (2011),5475-5479 .

[141] Zhang, Xian, *Fixed point theorems of multivalued monotone mappings in ordered metric spaces*, Applied Mathematics Letters. , **23** (2010) 235-240

[142] Xiao, J.-Z., Zhu, X.-H., Cao, Y.-F., *Common coupled fixed point results for probabilistic f-contractions in Menger spaces*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications . **74 (13)** (2011),, pp. 4589-4600 .