Universitatea de Nord din Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe

Teză de doctorat

TEHNICA OPERATORILOR NEEXPANSIVI ÎN REZOLVAREA ECUAŢIILOR INTEGRALE CU ARGUMENT MODIFICAT

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde

Doctorand:
Monica Lauran

Baia Mare
2012

Cuprins

Introducere

Teoria ecuaţiilor integrale reprezintă un capitol important în matematica aplicată. Primele lucrări, având ca tematică ecuaţiile integrale au apărut în secolul 19 şi la începutul secolului 20, având ca autori matematicieni renumiţi ca Niels Abel (1802- 1829), Augustin Cauchy (1789-1857), Edouard Goursat (1858-1936), Maxime Bocher (1867-1918), David Hilbert (1862-1943), Vito Volterra (1860-1940), Ivar Fredholm (1866-1927), Emile Picard (1856-1941), Traian Lalescu (1882-1929). Primele tratate din acest domeniu au apărut în anii 1910 (T. Lalescu 1911, M. Bocher 1912, D Hilbert 1912, V. Volterra 1913)(vezi I.A. Rus [**181**], [**175**]). În secolul 20 teoria ecuaţiilor integrale a avut o dezvoltare spectaculoasă, atât din perspectiva teoriilor matematice care se pot aplica, cât şi din punctul de vedere al aproximării efective a soluţiilor. Ecuaţiile integrale şi ecuaţiile diferenţiale, în general, iar cele cu argument modificat în special, constituie o parte importantă a analizei neliniare, având aplicaţii teoretice, dar şi practice cum ar fi în teoria electricităţii, a propagării căldurii, electromagnetismului, industria turboreactoarelor, dinamica populaţiei şi alte domenii. Dezvoltarea clasică a analizei funcţionale neliniare are loc odată cu începutul analizei funcţionale liniare de la sfârşitul secolului XIX şi începutul secolului al XX-lea în lucrările matematicienilor Picard, S. Bernstein, Lyapunov, E. Schmidt şi Lichtenstein şi a fost motivată de dorinţa de a studia existenţa şi proprietăţile soluţiilor problemelor la limită pentru ecuaţii neliniare, diferenţiale sau integrale cu sau fără argument modificat. Instrumentul clasic de lucru a fost principiul contracţiei a lui Picard, dat în spaţii liniare normate de către Banach şi în spaţii metrice complete de către Caccioppoli.

Principalele metode care se aplică la studiul ecuaţiilor integrale sunt:
1. metodele de punct fix (principiul contracţiilor, teoreme de punct fix de tip Schauder, Leray-Schauder);
2. metodele variaţionale (puncte critice, teoreme de tip mountain pass);
3. metode iterative (metoda iteraţiilor monotone, metode de tip Newton);
4. metode numerice (metoda elementului finit, metoda elementului la frontieră, metoda colocaţiei, metoda ondeletelor).

Dintre tratatele de bază având ca tematică metodele de mai sus menţionăm:
1. T.A. Burton ([**26**]), R.P. Agarwal şi D. O'Reagan ([**2**]), C. Corduneanu ([**32**], [**33**] şi [**34**]), V. Lakshmikantham ([**66**]), M.A. Krasnoselskii ([**93**]), R. Precup ([**160**] şi [**144**]);

2. A. Ambrosetti ([**4**]), D. Motreanu şi V. Rădulescu ([**132**]), R. Precup ([**160**]);
3. P.M. Anselone ([**6**]), V. Lakshmikantham ([**99**]), S. Heikkilă şi V. Lakshmikantham ([**100**]), D. Pascali şi S. Sburlan ([**148**]), R. Precup ([**160**]);
4. S. Prössdorf şi B. Silbermann ([**164**]), Gh. Micula ([**127**]), D. Trif şi T. Petrilă ([**193**]), C.I. Gheorghiu ([**61**]), C.A. Brebbia ([**192**]).

precum şi cărţile fundamentale de analiză funcţională scrise de K. Deimling ([**37**]), K. Yosida ([**199**]), E. Zeidler ([**202**]), H. Brezis ([**23**]). Pe parcursul acestei lucrări vom cita foarte des şi monografiile de bază în teoria punctelor fixe scrise de V. Berinde ([**18**]), I.A. Rus ([**168**], [**176**]), R.P. Agarwal, M. Meehan şi D. O'Regan ([**1**]), J. Dugundji şi A. Granas ([**64**],).

O nouă etapă în dezvoltarea teoriei metrice a punctului fix a fost legată de studiul punctelor fixe ale operatorilor neexpansivi. Rezultatul de bază în acestă direcţie este teorema de punct fix Browder-Göhde-Kirk.

O teoremă de punct fix pentru operatori neexpansivi a fost demonstrată de către Kirk [**86**] în cadrul spaţiilor metrice mărginite pentru care există o structură de convexitate care e numărabil compactă si normală. Spaţiile metrice sunt instrumente importante folosite în modelarea problemelor din viaţa de zi cu zi. Desigur, structura unui spaţiu metric este uneori mult prea generală pentru a aplica teorii existente utilizate în studiul unor astfel de procese. Pentru a asigura o anumită regularitate au fost considerate restricţii specifice asupra spaţiului metric. Unele dintre aceste proprietaţi conferă suficientă informaţie pentru a permite dezvoltarea şi extinderea unor teorii matematice care joacă un rol esenţial în rezolvarea unor astfel de probleme. Existenţa curbelor ce conservă distanţa între oricare două puncte ale spaţiului este una dintre cele mai importante proprietaţi care pot fi impuse într-un spaţiu metric deoarece înzestreaza spaţiul cu o structură care se aseamănă într-un fel cu structura liniară a unui spaţiu normat. Astfel de spaţii se numesc spaţii geodezice. O tratare detaliată a spaţiilor geodezice poate fi găsită, de exemplu, în [**147**].

Teza de faţă îşi propune pe de o parte generalizarea unor rezultate referitoare la operatori neexpansivi, iar pe de altă parte studiul soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat şi a soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat, respectiv a sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat şi a sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat

$$\left\{\begin{array}{c} y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda y(x))), \quad x \in [a,b], \quad \lambda \in (0,1) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right. \tag{0.0.1}$$

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^a K(t,s,x(s))ds, \ t \in [0,a] \tag{0.0.2}$$

în mulţimea C_L din spaţiul $C([a,b],X)$ unde $(X,\|\cdot\|)$ este spaţiul Banach şi în $L^2[a,b]$. În mulţimea C_L studiem existenţa soluţiilor ecuaţiilor şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat precum şi a soluţiilor ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat.

Teza este structurată în 5 capitole după cum urmează:

Capitolul 1 al tezei este un capitol introductiv în care sunt prezentate noţiunile şi teoremele de bază ce vor fi aplicate sau generalizate pe parcursul celorlalte capitole. Primele trei paragrafe conţin notaţiile şi definiţiile referitoare la teoreme de punct fix în spaţii metrice, spaţii normate şi spaţii metrice conice.

În **Capitolul 2** prezentăm rezultate legate de existenţa şi/sau unicitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat şi a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale integrale. Pornind de la problema (2.1.6) am demonstrat existenţa soluţiilor problemei (0.0.1) folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi pe submulţimea C_L a mulţimii $C[a,b]$. Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei

$$\left\{\begin{array}{c} y'(x)=f(x,y(y(x))), \quad x\in[a,b] \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right. \tag{0.0.3}$$

unde $x_0,\quad y_0\in[a,b]$ şi $f\in C([a,b]\times[a,b])$ a fost demonstrată în [**31**] şi [**25**] folosind tehnica operatorilor Picard. Observaţia 1.1 ne conduce la aproximarea soluţiei neunice cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij. În exemplul 2.1.1 se pune în evidenţă aplicabilitatea teoremei 2.1.25 în cazul în care condiţia (v) a teoremei 2.1.24 devine $2\cdot L_1\cdot C_{x_0}\le 1$. Considerând problema cu condiţii iniţiale

$$\left\{\begin{array}{c} y'(x)=f(x,y(x),y(y(x))) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right. \tag{0.0.4}$$

unde $x_0,y_0\in[a,b],\ f\in C([a,b]\times[a,b]\times[a,b])$ date, am demonstrat existenţa soluţiei în mulţimea C_L din $C[a,b]$ şi aproximarea ei cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij exemplificând pe un caz concret din C_1. Rezultatul a fost extins pe o problemă de tip iterativ de forma

$$\left\{\begin{array}{c} y'(x)=f(x,y(x),y(y(x)),y(\lambda x)), \quad \lambda\in(0,1) \\ y(x_0)=y_0 \end{array}\right. \tag{0.0.5}$$

În paragraful al doilea am tratat existenţa soluţiilor problemelor bilocale pentru ecuaţii diferenţiale de ordin fracţional cu condiţii integrale neliniare de forma:

$$\left\{\begin{array}{c} {}^cD^\alpha y(t)=f(t,y),\text{ pentru orice } t\in J=[0,T],\ 1<\alpha\le 2; \\ y(0)=\int_0^T g(s,y)ds; \\ y(T)=\int_0^T h(s,y)ds, \end{array}\right. \tag{0.0.6}$$

unde ${}^cD^\alpha$ este derivata de ordin fracţional de tip Caputo şi $f,g,h:J\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue date.

Pentru problema (0.0.6) a fost stabilit în [**16**] un rezultat privind existenţa şi unicitatea soluţiilor în intervalul $[0, T]$, folosind tehnica operatorilor Picard. Pornind de la acest rezultat am stabilit în teorema 2.2.53 existenţa soluţiilor problemei cu condiţii integrale (0.0.6) folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi pe submulţimea C_L din $C[a, b]$, soluţii (neunice) care pot fi aproximate cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$y_{n+1}(t) = (1 - \lambda)y_n(t) +$$
$$+\lambda \left[\left(\frac{t}{T} - 1 \right) \int_0^T g(s, y_n(s))ds + \frac{t}{T} \int_0^T h(s, y_n(s))ds \right] +$$
$$+\lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \cdot f(s, y_n(s))ds - \frac{t}{T \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s))ds \right]$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ şi $y_1 \in C_L$ este arbitrar ales.
În paragraful 2.2 am dat un exemplu care ilustrează faptul că rezultatul teoremei 2.2.53 este mai general decât cel al teoremei 2.2.52 (sau al Teoremei 3.5 din [**16**]).Rezultatele au fost publicate în lucrările [**115**], [**117**], [**118**].
În **Capitolul 3** prezentăm existenţa şi/sau unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat folosind atât principiul contracţiei, cât şi tehnica operatorilor neexpansivi. Capitolul este structurat pe patru paragrafe. În primul paragraf prezentăm câteva teoreme de existenţă şi unicitate a soluţiilor ecuaţiilor integrale de tip Fredholm aşa cum apar în lucrarea [**76**]. În paragraful al doilea studiem existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat de tip Volterra, folosind principiul $\varphi-$ contracţiei. Ecuaţia

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, x(s), x(g(s)))ds$$

pentru $a, t \in [-T, T]$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, are soluţie unică x^* în spaţiul $C[-T, T]$, iar şirul aproximaţiilor succesive, definit prin

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, x_n(s), x_n(g(s)))ds$$

converge către x^*, pentru orice $x_0 \in C[-T, T]$.
Pornind de la o ecuaţie simplă de tip Fredholm

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^a K(t, s, x(s))ds, \ t \in [0, a] \tag{0.0.7}$$

am demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei (0.0.7) în $C[0, a]$ folosind tehnica operatorilor Picard, respectiv existenţa soluţiilor în $C_L \subset C[0, a]$ folosind tehnica operatorilor neexpansivi. Exemplul 3.2.1 ilustrează faptul că teorema 3.2.57 şi teorema 3.2.58 se aplică şi ecuaţia integrală (3.2.3) are soluţie unică în $C[0, 1]$. Dacă se modifică unele ipoteze asupra operatorului asociat ecuaţiei (0.0.7), atunci se obţine soluţia neunică a ecuaţiei (0.0.7) în $C_L \subset C[0, a]$, folosind tehnica operatorilor neexpansivi.

În paragraful al treilea am studiat existenţa soluţiilor ecuaţiilor integrale de tip Fredholm cu argument modificat, de forma

$$x(t) = f(t) + \int_{\Omega} K(t, s, x(s), x(g(s)))ds, \tag{0.0.8}$$

în $\overline{B}\,(f, r) \subset L^2(\Omega)$, unde $\overline{B}\,(f, r) = \{x \in L^2(\Omega) / \left\| x - f \right\|_{L^2(\Omega)} \leq r, r > 0\} \subset L^2\,(\Omega)$, iar $\Omega \subset \mathbb{R}$ este o mulţime măsurabilă. În cazul în care $\Omega = [a, b]$ atunci se obţine un rezultat similar cu teorema 3.3.60 aşa cum se poate vedea în lucrarea [**20**]. Generalizând ecuaţia (0.0.8) se obţine un rezultat de existenţă a soluţiilor ecuaţiei

$$x(t) = f(t) + \int_{\Omega} K(t, s, x(g_1(s)), ..., x(g_m(s)))ds \tag{0.0.9}$$

în $\overline{B}\,(f, r) \subset L^2(\Omega)$.

Exemplele din paragraful 3.3 verifică condiţiile teoremei 3.3.61 şi prin urmare ecuaţia

$$x(t) = t^2 + \int_{1}^{a} e^{-t} \cdot s^2 \cdot x(s) \cdot x(s - e^{-s})ds \tag{0.0.10}$$

are soluţii în $\overline{B}(t^2, r) = \left\{x \in L^2(\Omega) / \left\| x - t^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq r\right\} \subset L^2(\Omega)$, unde $\Omega = [1, a]$.

Pentru ecuaţia integrală cu argument modificat

$$x(t) = t + \int_{1}^{a} \left[e^{-t} \cdot x(s) + s \cdot x(s - e^{-s})\right] ds \tag{0.0.11}$$

am demonstrat că are soluţii în $\overline{B}(t, r) = \left\{x \in L^2(\Omega) / \left\| x - t \right\|_{L^2(\Omega)} \leq r\right\} \subset L^2(\Omega)$, unde $\Omega = [1, a]$.

În paragraful 4 am demonstrat câteva rezultate de existenţă a soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat de tip iterativ, de forma

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{t} K(x, y(y(x)))dx, \tag{0.0.12}$$

unde $x_0, t \in [a, b]$, $y, f \in C[a, b]$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$, în $C_L \subset C[a, b]$, folosind tehnica operatorilor neexpansivi.

Ecuaţia integrală cu argument modificat de tip Fredholm, de forma

$$x(t) = f(t) + \int_{a}^{b} K(t, s, x(s), x(g(s)))ds, \quad t \in [a, b] \tag{0.0.13}$$

are soluţie (neunică) în $C_L \subset C[a, b]$, ce poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$x_{n+1}(t) = (1 - \lambda) \cdot x_n(t) + \lambda f(t) + \lambda \int_{a}^{b} K(t, s, x_n(s), x_n(g(s)))dx, t \in [a, b], n \geq 1$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ şi $x_1 \in C_L$ arbitrar.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrările [**111**], [**113**], [**112**], [**118**], [**116**].

În **Capitolul 4** am studiat existenţa soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat de forma

$$(0.0.14)\qquad \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_1(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(\lambda y_2(x))) \\ \quad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{cases}$$

cu $x, x_0, y_{1_0}, y_{2_0} \in [a,b]$, $f \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$, $\lambda \in (0,1]$, folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi pe submulţimea $(C_L[a,b];[a,b]^2)$ din spaţiul Banach $(C([a,b];\mathbb{R}^2);\|\cdot\|)$ cu $\|x\| = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, $\|x_i\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_i(t)|$, $i = 1,2$, fiind norma Cebîşev;
respectiv, sistemul de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat de tip iterativ,

$$(0.0.15)\qquad \begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(y_1(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(y_2(x))) \\ \quad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{cases}$$

cu $x, x_0, y_{i_0} \in [a,b], i = 1,2, f \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2), \lambda \in (0,1)$.
Rezultatele de existenţă pot fi extinse şi la alte tipuri de sisteme de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat de tip iterativ, prezentate în acest capitol.

Un exemplu de sistem de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat de tipul sistemului (0.0.14) este următorul

$$(0.0.16)\qquad \begin{cases} y_1'(x) = -3 + \frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{3}y_2(x) + y_1(\frac{1}{2}y_1(x)) \\ y_2'(x) = -3 + \frac{1}{3}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) + y_2(\frac{1}{2}y_2(x)) \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale

$$(0.0.17)\qquad y_1(\frac{1}{3}) = y_2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

În acest caz $x \in [0,1], y_1, y_2 \in C([0,1],[0,1]), \lambda = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{3}$. Problema (0.0.16)+(0.0.17) are soluţii în mulţimea:

$$C_1 = \{y_i \in C([0,1],[0,1]) : \\ |y_i(t_1) - y_i(t_2)| \le |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0,1]\}, i = 1,2.$$

Un exemplu care să justifice existenţa soluţiilor sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat de tipul sistemului (0.0.15) este următorul

$$(0.0.18)\qquad \begin{cases} y_1'(x) = -\dfrac{3}{2} + y_1(x) + y_1(y_1(x)) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -\dfrac{3}{2} + y_1(x) + y_2(x) + y_2(y_2(x)) \\ \quad y_1\left(\frac{1}{2}\right) = y_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rezultatele originale din acest capitol vor fi publicate ulterior în [**109**].
În **Capitolul 5** am demostrat un rezultat de existenţă a soluţiilor sistemului de ecuaţii

integrale cu argument modificat de forma

$$
(0.0.19) \qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_1(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_2(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds \end{cases}
$$

respectiv,

$$
(0.0.20) \qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_{a}^{b} K_1(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_{a}^{b} K_2(x, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds \end{cases}
$$

folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi pe mulţimea $C_L([a,b];[a,b]^2)$ din spaţiul Banach $(C([a,b],\mathbb{R}^2);\|\cdot\|)$ cu $\|x\| = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, unde $\|x_i\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_i(t)|, i = 1,2.$ şi a unor sisteme de ecuaţii integrale de tip iterativ.
Aplicând teorema lui Perov în spaţii metrice generalizate, am studiat existenţa şi unicitatea soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale de tip Fredholm cu argument modificat în $C_L([a,b],[a,b]^2)$. Rezultatele originale din acest capitol formează subiectul mai multor articole trimise spre publicare [**110**], [**114**].

Doresc în mod deosebit să-i mulţumesc conducătorului meu ştiinţific, **domnul Prof. Univ. Dr. Vasile Berinde**, pentru modul plin de competenţă şi de înaltă ţinută ştiinţifică în care m-a îndrumat şi susţinut în mod consecvent în efortul de finalizare a acestei lucrări.
Pe această cale ţin să le mulţumesc referenţilor, în special domnului prof. dr. Ioan A. Rus, pentru citirea foarte atentă a unei variante preliminare a tezei şi pentru observaţiile de îmbunătăţire a unor rezultate din teză.
În încheiere, doresc să aduc mulţumiri tuturor celor care au contribuit, într-un fel sau altul, la finalizarea acestei lucrări şi mă refer aici la colectivul Departamentului de Matematică şi Informatică a Universităţii de Nord Baia Mare, colegilor de catedră pentru sugestiile pline de competenţă.
De asemenea, doresc să mulţumesc familiei mele, în special soţului şi copiilor mei, pentru sprijinul constant acordat cât şi pentru înţelegerea şi acceptarea sacrificării timpului meu liber pentru efectuarea cercetărilor din prezenta lucrare.
Ţin să le mulţumesc celor mai apropiate persoane care m-au înţeles, m-au încurajat şi m-au ajutat întotdeauna, părinţilor mei şi mătuşii mele Margareta. Nu am cuvinte pentru a exprima recunoştinţa mea pentru sacrificiul lor.
Şi nu în ultimul rând, doresc să mulţumesc pe această cale şi fostului meu profesor de matematică din şcoala generală, care mi-a fost şi diriginte, domnul profesor Husti Ştefan, care mi-a cultivat pasiunea pentru matematică şi mai apoi, în calitate de coleg, mi-a insuflat dragostea pentru elevi, fără de care profesia de dascăl nu poate fi completă.

CAPITOLUL 1

Introducere în teoria punctului fix pentru operatori neexpansivi

În acest capitol prezentăm principalele noţiuni şi rezultate din teoria punctului fix pe care le vom folosi pe parcursul acestei teze. Este un capitol introductiv, în care sunt prezenate notaţiile utilizate, clasa operatorilor neexpansivi şi câteva rezultate din teoria punctului fix cu privire la operatorii neexpansivi care stau la baza rezultatelor obţinute şi prezentate în teză. În realizarea acestiu capitol am folosit, în principal cărţile [**1**], [**18**], [**1**], [**31**], [**37**], [**63**], [**27**], [**34**] [**64**], [**85**], [**87**], [**88**], [**148**], [**160**], [**168**], [**167**], [**176**], [**181**], [**177**], [**76**], [**69**], [**129**].

1. Notaţii de bază şi rezultate

Fie X o mulţime nevidă $T : X \to X$ un operator. Atunci

$P(X) := \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\}-$mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui X;

$F_T := \{x \in X : Tx = x\}-$mulţimea punctelor fixe ale operatorului T.

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X, r \in R$ şi $T : X \to X$ un operator. Atunci

$B(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}-$sfera deschisă cu centrul în x_0 şi raza r;

$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}-$sfera închisă cu centrul în x_0 şi raza r;

$P_b(X) := \{Y \in P(X) : Y = \overline{Y}\}-$mulţimea tuturor submulţimilor nevide, închise ale lui X;

$P_{cl}(X) := \{Y \in P(X) : Y$ mărginită şi $Y = \overline{Y}\}-$mulţimea tuturor submulţimilor nevide, mărginite şi închise ale lui X;

$P_{cp}(X) := \{Y \in P(X) : Y =$mulţime compactă$\}-$mulţimea tuturor submulţimilor nevide, compacte ale lui X.

Multe probleme provenind din diferite domenii ale matematicii sau fizicii, cum ar fi probleme de optimizare, de analiza variaţională sau din teoria jocurilor, pot fi formulate echivalent ca o problemă de punct fix astfel:

$$\text{Să se găsească } x \in X \text{ astfel încât } x = Tx,$$

unde T este operator de tip contractiv definit pe spaţiul (metric) X. Dacă T este operator neexpansiv, înseamnă că T satisface proprietatea $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

Rezultatele şi argumentele din această teză de doctorat au la bază următoarele teoreme de punct fix structurate după geometria spaţiului pe care este definit operatorul respectiv.

1.1. Teoreme de punct fix în spaţii metrice

DEFINIŢIA 1.1.1. Fie (X, d) spaţiu metric. Un operator $T : X \to X$ se numeşte:
[i] Lipschitz (sau α-Lipschitz) dacă există $\alpha > 0$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y) \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

[ii] (strict) contracţie (sau α-contracţie) dacă există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât T este α-Lipschitz.
[iii] neexpansiv dacă este 1-Lipschitz, adică

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

[iv] contractiv dacă

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

[v] expansiv dacă $d(Tx, Ty) > d(x, y)$,oricare ar fi $x, y \in X$.
[vi] izometrie dacă $d(Tx, Ty) = d(x, y)$,oricare ar fi $x, y \in X$.
[vii] asimptotic regular dacă $d(T^n x, T^{n+1} x) \to 0$, când $n \to \infty$, oricare ar fi $x \in X$.

Din definiţia de mai sus a fost obţinut următorul rezultat:

TEOREMA 1.1.1. *Au loc următoarele implicaţii:*

$$[ii] \Rightarrow [i],$$

$$[ii] \Rightarrow [iv] \Rightarrow [iii].$$

EXEMPLUL 1.1.1. 1) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \dfrac{1}{2}x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ este o strict contracţie şi $F_T = \{6\}$.

2) $T : [1, \infty) \to [1, \infty)$, $T(x) = x + \dfrac{1}{x}$ este o contracţie şi $F_T = \emptyset$.

Următoarea teoremă este fundamentală în teoria punctului fix şi va fi luată în considerare în teoremele ce urmează din capitolele 2 şi 3.

TEOREMA 1.1.2. (**Principiul contracţiei**) *Fie (X, d) spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ o $\alpha-$contracţie. Atunci:*
(i) *T are un punct fix unic x^*;*

(ii) *iteraţia Picard asociată operatorului* T*, definit prin şirul* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *astfel*

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0,\ \ n = 1, 2, ...$$

converge către unicul punct fix x^**, pornind de la orice valoare iniţială* $x_0 \in X$*;*

(iii) *au loc estimările a priori, respectiv a posteriori*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(x_0, x_1)\ n = 0, 1, 2, ...$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot d(x_{n-1}, x_n)\ n = 0, 1, 2, ...$$

.

(iv) *rata de convergenţă este dată de*

$$d(x_n, x^*) \leq \alpha \cdot d(x_{n-1}, x^*) \leq \alpha^n \cdot d(x_0, x^*),\ \ n = 1, 2, ...$$

.

În literatura de specialitate există diferite generalizări ale principiului contracţiei după structura geometrică a spaţiului considerat sau după proprietăţile contractive ale operatorului T (Dugundi şi Granas [**64**], Kirk şi Sims [**85**]).
Una dintre cele mai importante extinderi ale Teoremei 1.1.2 constă în înlocuirea condiţiei de strict contracţie (ii) cu una similară dar mai slabă de forma:

$[viii]$ $d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$

unde $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este funcţie de comparaţie.

Considerăm funcţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ care îndeplineşte următoarele proprietăţi:

(i_φ) φ este monoton crescătoare, adică $t_1 \leq t_2$ implică $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$;

(ii_φ) $\varphi(t) < t$ pentru orice $t > 0$;

(iii_φ) $\varphi(0) = 0$;

(iv_φ) φ este continuă;

(v_φ) Şirul $(\varphi^n(t))$ converge către 0, pentru orice $t \geq 0$;

(vi_φ) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t)$ este convergentă pentru orice $t > 0$;

(vii_φ) $t - \varphi(t) \to \infty$ când $t \to \infty$;

$(viii_\varphi)$ Funcţia φ este subaditivă.

Definiţia 1.1.2. 1) O funcţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ce satisface condiţiile (i_φ) şi (v_φ) se numeşte *funcţie de comparaţie.*

2) O funcţie φ ce satisface condiţiile (i_φ) şi (vi_φ) se numeşte *c - funcţie de comparaţie.*

3) O funcţie de comparaţie ce satisface ipoteza (vii_φ) se numeşte *funcţie de comparaţie strictă.*

Următoarele leme arată legătura dintre condiţiile îndeplinite de funcţia φ.

LEMA 1.1.3. *Au loc următoarele implicaţii*
1) (i_φ) *şi* $(ii_\varphi) \Rightarrow (iii_\varphi)$,
2) (ii_φ) *şi* $(iv_\varphi) \Rightarrow (iii_\varphi)$,
3) (i_φ) *şi* $(v_\varphi) \Rightarrow (ii_\varphi)$.

LEMA 1.1.4. *Pentru o funcţie de comparaţie* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *au loc afirmaţiile*
1) Orice c- funcţie de comparaţie este funcţie de comparaţie.
2) Orice funcţie de comparaţie strictă este funcţie de comparaţie.
3) Orice funcţie de comparaţie satisface condiţia (iii_φ).
4) Orice funcţie de comparaţie care satisface condiţia $(viii_\varphi)$ *va satisface şi condiţia* (iv_φ).
5) Daca φ *este funcţie de comparaţie, atunci pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$, φ^n *este de asemenea funcţie de comparaţie.*
6) Dacă φ *este o c- funcţie de compartie, atunci*

$$s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t),\ t \in \mathbb{R}_+$$

satisface condiţiile (i_φ) *şi* (iii_φ).

EXEMPLUL 1.1.2. Funcţia $\varphi(t) = at$ cu $t \in \mathbb{R}_+$ şi $a \in (0,1)$ satisface toate condiţiile $(i_\varphi) - (viii_\varphi)$.

DEFINIŢIA 1.1.3. ([**18**]) Fie (X,d) spaţiu metric. Aplicaţia $T : X \to X$ se numeşte $\varphi -$ *contracţie* dacă există funcţia de comparaţie $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y)),\ \text{ pentru orice } x,y \in X.$$

TEOREMA 1.1.5. ([**18**]) *Fie* (X,d) *spaţiu metric complet şi* $T : X \to X$ *o* $\varphi -$ *contracţie. Atunci* T *este operator Picard.*

O altă teoremă de punct fix utilizată în lucrare este teorema lui Perov. Principiul contracţiei lui Banach 1.1.2 a fost generalzat de A. I. Perov şi A. V. Kibenko [**149**] pe spaţii înzestrate cu metrici vectoriale.

O mulţime E înzestrată cu o metrică vectorială formează un spaţiu metric generalizat. Pentru spaţiile metrice generalizate noţiunile de şiruri convergente, completitudine, submulţimi deschise şi închise sunt similare cu cele pentru spaţiile metrice obişnuite.

DEFINIŢIA 1.1.4. Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat. O aplicaţie$T : X \to X$ spunem că este contracţie dacă există o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ astfel încât

$$M^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty$$

şi

$$d\left((Tx,Ty\right) \leq M \cdot d(x,y)$$

pentru orice $x, y \in X$. O matrice pentru care $M^k \to 0$ când $k \to \infty$, spunem că este convergentă la zero.

LEMA 1.1.6. ([**162**]) *Fie M o matrice pătratică cu elemente nenegative. Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

(i) M este o matrice convergentă la zero;

(ii) $I - M$ este o matrice nesingulară şi

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots;$$

(iii) $|\lambda| < 1$ pentru orice $\lambda \in C$ cu $\det(M - \lambda I) = 0$;

(iv) $I - M$ este nesingulară şi $(I - M)^{-1}$ ere elemente nenegative.

TEOREMA 1.1.7. (Perov) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat cu $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ şi fie $T : X \to X$ astfel încât*

$$d(Tx, Ty) \leq M \cdot d(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$ şi M matrice pătratică M de numere nenegative. Dacă M este convergentă la zero, atunci T are punct fix unic x^* şi

$$d(T^k x, x^*) \leq M^k \cdot (I - M)^{-1} \cdot d(Tx, x)$$

pentru orice $x \in X$ şi $k \geq 1$.

1.2. Teoreme de punct fix pentru operatori neexpansivi

Clasa operatorilor neexpansivi include contracţiile şi aplicţiile strict contractive; în plus ea conţine toate izometriile inclusiv operatorul identic.

În acest sens teoria operatorilor neexpansivi este fundamental diferită faţă de cea a operatorilor contractivi. Chiar dacă operatorul neexpansiv are puncte fixe, şirul aproximaţiilor succesive nu converge , în general către un punct fix al operatorului.

Referitor la operatorii neexpansivi se pun următoarele probleme:

(1) În ce condiţii asupra spaţiului şi asupra operatorului T avem, $F_T \neq \emptyset$?
(2) Să se studieze mulţimea punctelor fixe ale operatorului T.
(3) Să se studieze convergenţa slabă sau convergenţa tare a şirului $(T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

DEFINIŢIA 1.1.5. Fie E spaţiu vectorial real (complex). Numim normă pe E o aplicaţie $\|\cdot\| : E \times E \to \mathbb{R}_+$ ce are următoarele proprietăţi

(n_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (elementul nul al spaţiului E);

(n_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot |x|$, $\forall x \in E$, şi $\lambda-$constantă;

(n_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ ("inegalitatea triunghiului").

Perechea $(E, \|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu liniar normat.

OBSERVAŢIA 1.1.1. 1) Dacă $\|\cdot\|$ este normă pentru spaţiul vectorial E, atunci $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$, dată de $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in E$ este distanţă pe E. Această relaţie ilustrează faptul că orice spaţiu normat este întotdeauna spaţiu metric în raport cu distanţa indusă de normă.
2) Spaţiile înzestrate cu distanţele date ca exemplu în paragraful anterior sunt spaţii normate în raport cu norma indusă de metrica respectivă. Spaţiile liniare astfel obţinute sunt spaţii complete, deci spaţii Banach.

Din Observaţia 1.3. se deduce că toate conceptele legate de normă în spaţiul normat pot fi adaptate la spaţiul metric, incluzând principiul contracţiei şi toate condiţiile de contractivitate. Una dintre aceste condiţii, numită condiţia de neexpansivitate prezintă un interes aparte în spaţiile Banach:

DEFINIŢIA 1.1.6. Fie $(E, \|\cdot\|)$ spaţiu Banach şi K o submulţime nevidă, închisă, convexă şi mărginită a spaţiului X. Aplicaţia $T : K \to K$ este aplicaţie neexpansivă, dacă

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in E,$$

Definiţia 1.1.6 implică faptul că iteraţiile lui T, $T^n, n = 0, 1, 2...$ (cu $T^0 = I$) sunt de asemenea neexpansive. Prin înzestrarea spaţiului cu o structură geometrică suficient de bogată, se poate garanta existenţa punctelor fixe pentru operatori neexpansivi.

DEFINIŢIA 1.1.7. Un spaţiul Banach $(E, \|\cdot\|)$ se numeşte uniform convex dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru oric $x, y \in E$ cu $\|x\| < 1$, $\|y\| < 1$ şi $\|x - y\| \geq \varepsilon$ să avem

$$\frac{1}{2} \cdot \|x + y\| < 1 - \delta.$$

EXEMPLUL 1.1.3. Spaţiul $E = \mathbb{R}^n$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

este uniform convex, dar împreună cu norma $\|x_i\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ nu este spaţiu Banach uniform convex.

DEFINIŢIA 1.1.8. Un spaţiul Banach $(E, \|\cdot\|)$ strict convex dacă pentru orice $x, y \in E$ cu $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ şi $\|x - y\| > 0$ să avem

$$\frac{1}{2} \cdot \|x + y\| < 1.$$

LEMA 1.1.8. ([**29**]) *Fie* $(E, \|\cdot\|)$ *spaţiu Banach strict uniform convex şi* K *o submulţime închisă şi convexă a spaţiului* E*. Dacă* $T : K \to K$ *este aplicaţie neexpansivă, atunci mulţimea punctelor fixe a lui* T*,* F_T *este închisă şi convexă.*

Acest fapt nu este adevărat în general, aşa cum se poate vedea în exemplul următor.

EXEMPLUL 1.1.4. Pe $\mathbb{R}^2$ definim norma

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\},$$

şi operatorul $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin

$$T(x,y) = (x, |x|).$$

atunci T este operator neexpansiv relativ la $\|\cdot\|_\infty$ şi F_T este graficul $\{(x,y) : y = |x|\}$, care nu este convex. În plus, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie oarecare ce satisface relaţia

$$|f(t) - f(s)| \leq |t - s|,$$

atunci graficul lui f este mulţimea punctelor fixe al operatorului neexpansiv din $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ definit prin

$$T(x,y) = (x, f(x)).$$

Pentru a răspunde celei de a treia întrebare pusă la începutul acestui paragraf, ne propunem să studiem şirul iteraţiilor unei aplicaţii neexpansive. Se remarcă faptul că şirul iteraţiilor unei aplicaţii neexpansive este mult mai diferit faţă de cel al unei contracţii. În general, dacă $T : K \to K$ este aplicaţie neexpansivă şi $x_0 \in K$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n x_0 - T^{n+1} x_0\|$ există întotdeauna. Pe de altă parte, dacă considerăm operatorul $F = \frac{I+T}{2}$, ceea ce înseamnă că $Fx = \frac{x+Tx}{2}$, se poate verifica că $\lim\limits_{n\to\infty} \|F^n x - F^{n+1} x\| = 0$ ceea ce nu este o coincidenţă deoarece teoremele de punct fix depind de natura spatiului ales.

DEFINIŢIA 1.1.9. *K are proprietatea de punct fix în raport cu operatorii neexpansivi, dacă are loc implicaţia*

$$T : K \to K \text{ neexpansiv } \Rightarrow F_T \neq \emptyset$$

Problema determinării condiţiilor asupra lui K (sau asupra spaţiului E care conţine submulţimea K) ce are proprietatea de punct fix, îşi are originile în patru lucrări apărute în 1965. În prima dintre ele, F. Browder (1965 a) demonstrează că o submulţime închisă, mărginită şi convexă $K \subset E$ are proprietatea de punct fix dacă spaţiul E este spaţiu Hilbert. Aproape în acelaşi timp Browder (1965 b) şi Göhde (1965) au demonstrat că afirmaţia rămâne adevărată dacă E aparţine unei clase mai largi a spaţiilor uniform convexe. În acelaşi timp Kirk (1965) observă prezenţa unei proprietăţi geometrice numită *structură normală* garantând că $K \subset E$ are proprietatea de punct fix dacă E este spaţiu reflexiv. Conceptul de structură normală a fost introdus în 1948 de către Brodskii şi Milman (1948) în studiul punctelor fixe ale izometriilor şi este o proprietate comună tuturor spaţiilor uniform convexe.
Vom reaminti observaţiile si abordarea dată de Kirk.
Pentru orice submulţimi $D, H \subset E$, notăm mulţimile:

$$r_u(D) = \sup\{\|u - v\| : v \in D\} \ (u \in E) \text{ - raza lui D relativ la u;}$$

$$r_H(D) = \inf\{r_u(D) : u \in H\} \text{ - raza Cebîsev a lui D relativ la H;}$$

$$C_H(D) = \{u \in H : r_u(D) = r_H(D)\} \text{ - centru Cebîsev a lui D relativ la H.}$$

Când $H = D$ se va folosi notaţia $r(D)$ şi $C(D)$ în loc de raza, respectiv centru Cebîşev a lui D relativ la mulţimea H. Se observă că dacă $u \in C_H(D)$ atunci $B(u; r_u(D))$ conţine mulţimea D, însă nu toate bilele centrate în orice punct din H cu raza mai mică au această proprietate.

Este evident că pentru orice $u \in D$

$$r(D) \leq r_u(D) \leq diamD.$$

În plus dacă $r_u(D)$ este funcţia asociată lui u şi definită pe o submulţime închisă, mărginită şi convexă $D \in E$, atunci $r_u : D \to \mathbb{R}$ este continuă şi convexă şi $C(D)$ este mulţime închisă şi convexă.

Un punct $u \in D$ se numeşte diametral dacă $r_u(D) = diamD$; în caz contrar nu se numeşte nediametral. În exemplul următor se poate observa că mulţimea D mărginită, închisă şi convexă poate fi formată numai din puncte diametrale. Astfel de mulţimi se numesc mulţimi diametrale şi ele reprezintă un tip de "anomalie" geometrică.

EXEMPLUL 1.1.5. Fie $M \subset C[0,1]$ definită ca

$$M = \{x = (x(t)) : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1, t \in [0,1]\}$$

Se consideră două norme pe $C[0,1]$ definite pentru orice $x \in C[0,1]$:

$$\|x\|_0 = \max_{0 \leq t \leq 1} \{|x(t)|\};$$

$$\|x\|_1 = \|x\|_0 + \left(\int_0^1 (x(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

În raport cu $\|x\|_0$, $r(M) = diamM = 1$ şi M este mulţime diametrală, dar în raport cu $\|x\|_1$, $diamM = 2$ şi $r(M) = \frac{3}{2}$ şi niciun punct din M nu este diametral. În primul caz $C(M) = M$, iar în al doilea caz $C(M) = \emptyset$.

DEFINIŢIA 1.1.10. (Brodskii şi Milman, 1948 [**63**]) Spunem că o submulţime K a lui E are o structură normală dacă orice submulţime S mărginită, convexă din K cu $diamS > 0$ conţine un punct nediametral.

Astfel de mulţimi cu structură normală nu au submulţimi convexe S care să fie formate numai din puncte diametrale, cu o singură excepţie:

$$diamS > 0 \Rightarrow r(S) < diamS$$

Folosind un simplu argument inductiv, Brodskii şi Milman (1948) au arătat că mulţimea K convexă, slab compactă (orice funcţionala liniară, continuă din E îşi atinge maximum în K), care are structură normală conţine un punct $\overline{x}$ care este fix în raport

cu orice izometrie definită pe K cu valori în K. Faptul că toate mulţimile convexe, compacte au structură normală este o consecinţă imediată a următoarei leme.
Următoarea caracterizare a structurii normale este dată de Brodskii şi Milman şi implică şiruri de forma:
Un şir mărginit $\{x_n\}$ din spaţiul Banach E se numeşte *diametral* dacă nu este neapărat constant şi

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{conv}\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \operatorname{diam}\{x_1, x_2, ...\}.$$

LEMA 1.1.9. ([**63**]) *O submulţime K convexă, mărginită a unui spaţiu Banach are structură normală dacă şi numai dacă ea nu conţine un şir diametral.*

Această lemă este aplicată în identificarea spaţiilor reflexive care nu au structură normală. Deoarece orice subşir a unui şir diametral este de asemenea diametral şi limita slabă ("weak limit") a şirului aparţine învelitorii convexe, dacă spaţiul E este reflexiv şi nu are structură normală atunci E conţine un şir $\{x_n\}$ pentru care:

$$\begin{aligned} w - \lim_{n\to\infty} x_n &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| &= 1 \\ \operatorname{diam}(\{x_n\}) &\leq 1. \end{aligned}$$

Următorul rezultat este privit ca un rezultat fundamental de existenţă pentru operatori neexpansivi. Întrucât submulţimile închise, mărginite şi convexe ale unui spaţiu Banach reflexiv sunt de asemenea slab compacte, această teoremă se aplică pe astfel de spaţii.

TEOREMA 1.1.10. ([**63**]) *Presupunem că K este o submulţime nevidă, slab compactă şi convexă a unui spaţiu Banach şi K are structură normală. Atunci orice aplicaţie neexpansivă $T : K \to K$ are punct fix.*

Demonstraţia teoremei de mai sus este o reformulare a demonstraţiei originale a lui Kirk (1965). Ea se bazează pe existenţa unei submulţimi minimale T- invariante a lui K. Există şi alte demonstraţii mai constructive date de Gillespie şi Williams în 1979, Fuchssteiner în 1977, Goebel în 1969.
După cum se poate observa, centru Cebîşev $C(D)$, a unei mulţimi $D \subset E$ este caracterizat de

$$C(D) = \bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon(D),$$

unde

$$C_\epsilon(D) = \{u^\epsilon D : u \in \bigcap_{x\in D} B(x; r(D) + \epsilon)\}$$

Este evident că $C(D) \neq \emptyset$ dacă D este compactă în unele topologii pentru care bilele din E sunt de asemenea compacte. În caz particular, dacă E este spaţiu Banach care este dualul unui alt spaţiu şi D este slab* compact, atunci $C(D) \neq \emptyset$.

DEFINIŢIA 1.1.11. Spunem că o mulţime convexă D a unui spaţiu Banach dual E are structură normală slabă* dacă orice submulţime mărginită, slab* închisă şi convexă S a lui D cu $diamS > 0$ conţine un punct nediametral.

EXEMPLUL 1.1.6. Submulţimile convexe, slab* compacte a lui l^1 (care este dualul lui c_0) au structură normală slabă*.

Rezultate analoage teoremei 1.1.10 au loc în spaţii duale şi se aplică pentru spaţiul $E = l^1$.

TEOREMA 1.1.11. ([**63**]) *Dacă K este o submulţime nevidă, slab* compactă şi convexă a spaţiului Banach dual E şi K are structură normală slabă*, atunci orice aplicaţie neexpansivă $T : K \to K$ are cel puţin un punct fix.*

Demonstraţia acestei teoreme este identică cu cea a teoremei 1.1.10 cu excepţia că $\overline{conv}T(K)$ se înlocuieşte cu $\overline{conv}^*T(K)$, ceea ce înseamnă că intersecţia tuturor mulţimilor slab*, închise, convexe îl conţin pe $T(K)$. Au loc alte rezultate de existenţa a punctelor fixe pentru operatori neexpansivi dacă structura geometrică a spaţiului este îmbunătăţită.

DEFINIŢIA 1.1.12. Spunem că o mulţime nevidă, mărginită şi comvexă K din E are structură uniform normală dacă există constanta $k \in (0, 1)$ astfel încât

$$r(D) \leq k \cdot \mathrm{diam} D$$

pentru orice submulţime închisă, convexă D din K. Spaţiul E spunem că are structură normală uniformă dacă orice submulţime nevidă, convexă a sa are această proprietate.

Structura uniform normală este mult mai tare decât structura normală aşa cum se poate observa la spaţiile uniform convexe. De altfel există spaţii nereflexive care au structură normală. Această diferenţă este dată de următoarea teoremă.

TEOREMA 1.1.12. (Maluta, 1989, [**63**]) *Dacă E este spaţiu Banach cu structură normală atunci el este reflexiv.*

Conceptul de structură normală a fost studiat în multe lucări şi are multe variante propuse de autori precum Landes 1984 şi 1986 [**106**], [**107**], Kirk 1981 şi 1983 [**87**], [**88**], Swaminathan 1983 [**191**]. Autorii se concentrează asupra diferitelor conexiuni cu noţiunea de hiperconvexitate care are implicaţii teoretice de punct fix în spaţiile clasice $C(K)$ şi $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Acestor spaţii le lipseşte în general structura normală şi slab* normală.

DEFINIŢIA 1.1.13. Spunem că un spaţiu metric (M, ρ) este hiperconvex dacă orice familie de bile închise $\{B(x_\alpha; r_\alpha)\}$ din M ce satisfac relaţia $\rho(x_\alpha, x_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ au intersecţia nevidă.

Noţiunile de rază a unei mulţimi relativă la un punct, raza Cebîşev şi centru Cebîşev se definesc în mod similar cu cele din spaţiu Banach definite anterior.
Dacă (M, ρ) este spaţiu metric hiperconvex se poate verifica că el este complet. De altfel, dacă $J = \bigcap\limits_{\alpha\in A} B(x_\alpha; r_\alpha)$ este intersecţia bilelor închise din M, atunci (J, ρ) este de asemenea spaţiu metric hiperconvex. Dacă notăm cu $\mathcal{J}$ familia tuturor submulţimilor lui M care au această proprietate şi presupunem că $\mathcal{J}$ este compactă în sensul că orice subfamilie a lui $\mathcal{J}$ cu proprietatea de intersecţie finită are intersecţia nevidă.
Alegem $D \in \mathcal{J}$ cu $d = diamD > 0$. Pentru orice $u, v \in D$, $\rho(u, v) \le d = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d$. Din proprietatea de hiperconvexitate, raza Cebîşev a lui D relativă la M (sau D) este egală cu $\frac{1}{2}d$, iar centrele Cebîşev sunt date de

$$C_M(D) = \cap\{B(u; \frac{1}{2}d) : u \in D\}$$

$$C_D(D) = \bigcap\{B(u; \frac{1}{2}d) : u \in D\} \cap D = C_M(D) \cap D.$$

Ambele centre sunt mulţimi nevide şi aparţin lui $\mathcal{J}$. În plus, dacă $z \in C_D(D)$ atunci

$$B(z; \frac{1}{2}d) \supset C_M(D) \text{ şi } \mathrm{diam} C_D(D) \le \frac{d}{2}.$$

Observaţia 1.1.2. În spaţiul L^∞ mulţimilor $\mathcal{J}$ le corespund intervalele de ordine, adică mulţimi de forma $\{f : h \le f \le g\}$ pentru $h \le g$ fixat, în L^∞. Teorema 1.1.12 arată că intervalele de ordine din L^∞ au proprietatea de punct fix pentru operatori neexpansivi, aşa cum a fost notat pentru prima dată de Soardi (1979) [**189**] şi Sine (1979) [**187**].

În termeni abstracţi rezultatul lui Soardi [**189**] poate fi formulat astfel.

Definiţia 1.1.14. Fie (M, ρ) spaţiu metric şi $\mathcal{J}$ familia tuturor bilelor închise din M. Spunem că M are structură normală relativ uniformă dacă există $c \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $D \in \mathcal{J}$ există $z \in M$ ce satisface condiţiile:
(a) $D \subset B(z; c \cdot diamD)$;
(b) $u \in M$ şi $D \subset B(z; c \cdot diamD) \Rightarrow \rho(u, z) \le c \cdot diamD$.

Teorema 1.1.13. (Soardi [**189**]) *Presupunem că (M, ρ) este spaţiu metric mărginit care are structură normală relativ uniformă şi $\mathcal{J}$ familia bilelor închise din M cu intersecţie nevidă formează o structură compact, convexă. Atunci orice aplicaţie neexpansivă $T : M \to M$ are cel puţin un punct fix.*

Clasa spaţiilor Banach având structură normală este o clasă destul de "bună" în sensul că şirul iteraţiilor operatorului T neexpansiv sau şirul aproximant al punctelor fixe al unei aplicaţii neexpansive este convergent (nu este o convergenţă tare, ci o convergenţă topologică slabă). În cele ce urmează vom prezenta metode indirecte pentru studiul proprietăţii de punct fix a operatorilor neexpansivi în raport cu şirurile iterative şi aproximante, noţiuni introduse de M. Edelstein în 1972.

Considerăm o submulţime K nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach E, dar K nu este în general mărginită. Presupunem că $T : K \to K$ este operator neexpansiv şi fixăm $x_0 \in K$.

Notăm şirul iteraţiilor $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$. Mulţimea de puncte $O(x_0) = \{x_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ se numeşte *orbita* lui x_0 în raport cu T, iar închiderea ei se numeşte *închiderea orbitei.* Cum T este operator neexpansiv, dacă $O(x_0)$ este mărginită pentru cel puţin un $x_0 \in K$, atunci toate celelalte orbite $O(x), x \in K$ sunt mărginite.

Pentru $x \in E$ şi şirul mărginit $\{x_n\} \subset E$, definim *raza asimptotică* a şirului $\{x_n\}$ către x, ca fiind numărul

$$r(x, \{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup \|x - x_n\| .$$

Dacă $\{x_n\}$ este fixat, atunci $r(x, \{x_n\})$ defineşte o funcţie pe E având valori reale nenegative. Această funcţie are următoarele proprietăţi:

(1) Pentru orice $x \in E$, $r(x, \{x_n\}) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

(2) Pentru orice $x, y \in E$, $|r(x, \{x_n\}) - r(y, \{x_n\})| \leq \|x - y\|$;

(3) Pentru orice $x, y \in E$ şi $\alpha, \beta \geq 0$ cu $\alpha + \beta = 1$,
$r(\alpha x + \beta y, \{x_n\}) \leq \alpha r(x, \{x_n\}) + \beta r(y, \{x_n\})$;
Prin urmare $r(x, \{x_n\})$ este funcţie nenegativă, continuă şi convexă. Atunci

(4) Pentru orice $a \geq 0$, "mulţimea nivel" $A_a(\{x_n\}) = \{x : r(x, \{x_n\}) \leq a\}$ este închisă şi convexă. Dacă şirul $\{x_n\}$ nu este convergent, atunci mulţimea $A_a(\{x_n\})$ va fi vidă pentru un a suficient de mic.

Fie $K \subset E$ o submulţime nevidă şi închisă. Numărul

$$r(K, \{x_n\}) = \inf\{r(x, \{x_n\}); x \in K\}$$

se numeţe *raza asimptotică* a şirului $\{x_n\}$ în K. Familia de mulţimi nivel corespunzătoare se defineşte pentru orice $\mu \geq 0$ prin

$$A_\mu(K, \{x_n\}) = \{x \in K : r(x, \{x_n\}) \leq r(K, \{x_n\}) + \mu\}.$$

Mulţimea $A_0(K, \{x_n\})$ se numeşte *centru asimptotic* a lui $\{x_n\}$ în K. Se va nota prin $A(K, \{x_n\})$ sau pe scurt $A(\{x_n\})$ când K este fixat.

Pentru $\mu > 0$, $A_\mu(K, \{x_n\}) \neq \emptyset$ şi $A_{\mu'}(K, \{x_n\}) \subset A_\mu(K, \{x_n\})$ când $\mu' < \mu$, dar putem avea şi cazul în care

$$A_\mu(K, \{x_n\}) = A_0(K, \{x_n\}) = \bigcap_{\mu>0} A_\mu(K, \{x_n\}) = \emptyset.$$

Centrul asimptotic al şirului $\{x_n\}$ în K poate fi scris sub forma:

$$A(K, \{x_n\}) = \bigcap_{\mu>0} \{ \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} B(x_i; r(K, \{x_n\}) + \mu)} \} \cap K.$$

ceea ce caracterizează centrul asimptotic al şirului $\{x_n\}$ în K ca o familie de mulţimi slab închise.

LEMA 1.1.14. *Fie $\{x_n\}$ un şir din E şi K o submulţime nevidă din E.*
(a) Dacă K este slab compactă, atunci $A(K, \{x_n\}) \neq \oslash$;
(b) Dacă K este convexă, atunci $A(K, \{x_n\})$ este convexă.

Condiţia (a) a lemei are loc imediat, însă condiţia (b) este o consecinţă a faptului că orice funcţie convexă, continuă (în acest caz $r(\cdot, \{x_n\})$) este inferior semicontinuă în raport cu topologia slabă şi deci îşi atinge infimumul.
Semnificaţia conceptului de centru asimptotic în teoria operatorilor neexpansivi este dat de următoarele leme.

LEMA 1.1.15. *Fie E spaţiu Banach, $K \subset E$ şi $T : K \to K$ este neexpansiv având orbite mărginite. Pentru $x_0 \in K$, notăm mulţimea $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$. Atunci pentru orice $\mu > 0$, mulţimea $A_\mu(K, \{x_n\})$ este invariantă în raport cu T.*

Demonstraţie: Pentru orice $z \in K$ avem

$$r(Tz, \{x_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup \|Tz - T^n x_0\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup \left\|z - T^{n-1} x_0\right\| = r(z, \{x_n\}).$$

□

LEMA 1.1.16. *Fie T şi K fixate ca în lema 1.1.15 şi presupunem că $\{y_n\}$ este şirul aproximant al punctelor fixe a lui T, ceea ce înseamnă că $\lim_{n\to\infty} \|y_n - Ty_n\| = 0$. Presupunem că şirul $\{y_n\}$ este mărginit. Atunci pentru orice $\mu > 0$, mulţimea $A_\mu(K, \{y_n\})$ este invariantă în raport cu T.*

Demonstraţie: Concluzia teoremei are loc din:

$$r(Tz, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} \sup \|Tz - y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sup(\|Tz - Ty_n\| + \|Ty_n - y_n\|) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup \|z - y_n\| = r(z, \{y_n\}).$$

□

Următoarele observaţii pot fi rezumate în teorema următoare:

TEOREMA 1.1.17. ([**63**]) *Fie E spaţiu Banach şi K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui E. Considerăm $T : K \to K$ operator neexpansiv. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(a) T are cel puţin o orbită mărginită;
(b) Toate orbitele lui T sunt mărginite;
(c) K conţine o submulţime nevidă, închisă, mărginită, convexă şi $T-$ invariantă;
(d) K conţine un şir aproximant de puncte fixe mărginit.

Concluzia (c) a teoremei este consecinţă directă a Lemei 1.1.14 şi a Lemei 1.1.15 şi sugerează un procedeu pentru localizarea punctelor fixe a lui T. Alegem $x_0 \in K$, $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$ şi notăm mulţimea $K_1 = A(K, \{x_n\})$. Mulţimea K_1 este submulţime nevidă, slab compactă, T - invariantă şi convexă a lui K. Alegând un punct din K_1

şi repetând procedeul, obţinem mulţimea $K_2 = A(K, \{T^n x_1\})$ care este de asemenea nevidă, T - invariantă, slab compactă şi convexă. Procedeul continuă până la obţinerea unui şir descrescător de mulţimi nevide, T - invariante, slab compacte şi convexe $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$. Şirul de mulţimi $\{K_n\}$ depinde de structura geometrică a spaţiului E. Se remarcă faptul că prodedeul poate fi aplicat unei mulţimi K nemărginite, dacă K este local slab compactă, adică intersecţia lui K cu orice bilă este slab compactă şi $T : K \to K$ are orbite mărginite. Metoda poate fi folosită şi pentru şirul aproximant de puncte fixe în locul şirului iterativ.
Există o strânsă legătură între centru asimptotic a unui şir şi modulul de convexitate al spaţiului. Amintim definiţia modulului de convexitate al unui spaţiu Banach.

Definiţia 1.1.15. Se numeşte modul de convexitate a spaţiului Banach E, funcţia $\delta_E : [0, 2] \to [0, 1]$ definită prin

$$\delta_E(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}$$

Modulul de convexitate $\delta : [0, 2] \to [0, 1]$ poate fi definit în forma echivalentă astfel

$$\delta(\epsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \epsilon \right\}$$

Definiţia 1.1.16. Se numeşte caracteristica (coeficientul) convexităţii unui spaţiu Banach E, numărul

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(E) = \sup\{\epsilon \geq 0 : \delta(\epsilon) = 0\}$$

Legătura dintre cele două noţiuni este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1.1.18. *Fie K o submulţime închisă şi convexă a spaţiului Banach E şi $\{x_n\}$ un şir mărginit din E. Atunci*

$$diam\ A(K, \{x_n\}) \leq \epsilon_0(E) r(K, \{x_n\}).$$

Dacă $\epsilon_0(E) < 1$ atunci prin procedeul descris de Teorema 1.1.17 se obţine direct un punct fix. Mai precis, dacă K este submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach E pentru care $\epsilon_0(E) < 1$ (adică E reflexiv) şi dacă $T : K \to K$ este operator neexpansiv cu orbite mărginite, atunci pentru orice $x_0 \in K$ mulţimea $K_1 = A(K, \{T^n x_0\})$ este nevidă, T - invariantă, mărginită, închisă şi convexă. Alegem $x_1 \in K_1$, formăm mulţimea $K_2 = A(K, \{T^n x_1\})$ şi procedeul continuă până la obţinerea unui şir de submulţimi $\{K_n\}$ nevide, T - invariante, slab compacte din K. În baza teoremei 1.1.18 se obţine

$$\text{diam } K_n \leq (\epsilon_0(E))^n r(K, \{T^n x_0)\}).$$

Mulţimea $K_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ conţine exact un punct care este punct fix a lui T.
Un caz mai special este obţinut pentru $\epsilon_0(E) = 0$ ceea ce însemnă că E este spaţiu Banch uniform convex şi K_1 conţine un singur punct care este punct fix a lui T.

OBSERVAŢIA 1.1.3. (a) Proprietatea de punct fix nu este “ereditară” în sensul că submulţimea închisă şi convexă K_1 a lui K poate să nu aibă proprietatea de punct fix chiar dacă K are această proprietate.

(b) Proprietatea de punct fix nu este păstrată la trecerea la limită, adică există un şir de mulţimi $\{K_n\}$ având proprietatea de punct fix a cărui limită K_∞, în sensul metricii Hausdorff, nu are proprietatea de punct fix.

(c) Există un şir descrescător de mulţimi $\{K_n\}$ închise şi convexe cu proprietatea că pentru fiecare n, K_{2n+1} are proprietatea de punct fix, dar K_{2n} nu are această proprietate. Acest şir poate fi construit astfel încât intersecţia $K_\infty = \cap K_n$ să aibă sau să nu aibă acestă proprietate, ceea ce este posibil doar atunci când $K_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} K_n$.

Observaţiile $(a) - (c)$ arată faptul că proprietatea de punct fix este un concept delicat care poate depinde de natura mulţimii K mai mult decât de natura spaţiului din care face parte.
Următorul exemplu ilustrează o aplicaţie a centrului asimptotic.

EXEMPLUL 1.1.7. Fie E_1 un spaţiu Banach uniform convex arbitrar şi considerăm spaţiul produs $E = E_1 \times l^1$ înzestrat cu norma

$$\|(x, y)\| = \max\{\|x\|_{X_1}, \|y\|_{l^1}\}, \text{ pentru orice } x \in E_1, y \in l^1.$$

Fie K_1 submulţime închisă, mărginită din E_1 şi notăm cu B bila unitate din l^1 şi mulţimea $K = K_1 \times B$. Cum E nu este reflexiv, mulţimea K nu este slab compactă. Totuşi arătăm că mulţimea K are proprietatea de punct fix. Pentru a arăta acest lucru, considerăm un şir $\{(x_n, y_n)\}$ din K, cu $\{y_n\}$ slab convergent către $y \in B$. Centrul asimptotic a lui $\{x_n\}$ în K_1 conţine exact un punct. Dacă r_1 şi r_2 sunt razele asimptotice ale şirurilor $\{x_n\}$, respectiv $\{y_n\}$, atunci

$$r(K, (x_n, y_n)) = \max\{r_1, r_2\}.$$

Dacă $A(K_1, \{x_n\}) = \{x\}$ şi $r_1 = r_2$ atunci

$$A(K, \{(x_n, y_n)\}) = \{(x, y)\}.$$

Dacă $r_1 < r_2$, atunci

$$A(K, \{(x_n, y_n)\}) = \{z \in K_1; \limsup_{n\to\infty} \|z - x_n\| \le r_2\} \times \{y\} = A_{r_2 - r_1}(K_1, \{x_n\}) \times \{y\}.$$

Întrucât această mulţime este o izometrie a unei submulţimi închise, convexe din K_1, se comportă ca o submulţime a unui spaţiu uniform convex.
Dacă $r_1 > r_2$, atunci

$$\begin{aligned} A(K, \{(x_n, y_n)\}) &= \{x\} \times \{z \in B; \limsup_{n\to\infty} \|z - y_n\| \le r_1\} \\ &= \{x\} \times A_{r_1 - r_2}(B, \{y_n\}) \\ &= \{x\} \times \{B \cap B(y, r_1 - r_2)\}. \end{aligned}$$

Această mulţime poate fi considerată ca o submulţime slab compactă a spaţiului l^1. Fie $T : K \to K$ operator neexpansiv. În baza ipotezelor de mai sus vom arăta că T are puncte fixe. Fie $\{(x_n, y_n)\}$ un şir aproximant de puncte fixe a lui T. Dacă $r_1 = r_2$ atunci $T(x, y) = (x, y)$. Dacă $r_1 < r_2$, alegem $(u, y) \in A(K, \{(x_n, y_n)\})$ şi T are punct fix situat în centrul asimptotic a lui $\{T^n(u, y)\}$ în raport cu mulţimea $A(K, \{(x_n, y_n)\})$. Dacă $r_1 > r_2$ atunci T are punct fix în mulţimea $A(K, \{(x_n, y_n)\})$.
În concluzie, mulţimea K are proprietatea de punct fix.

Următorul exemplu este dat de J. Alexander în 1985 şi face referire la un operator asimptotic regular.

EXEMPLUL 1.1.8. Fie $T : [0, 1] \to [0, 1]$ operator neexpansiv şi considerăm operatorul $S = \frac{I+T}{2}$. Atunci S este de asemenea neexpansiv şi în plus este asimptotic regular. Presupunem că pentru un n întreg şi $x \in [0, 1]$ avem $|S^{n-2}x - S^{n-1}x| > \frac{1}{n}$. Atunci

$$|x - Sx| \geq \left|Sx - S^2x\right| \geq ... \geq \left|S^{n-2}x - S^{n-1}x\right| > \frac{1}{n}$$

şi de asemenea

$$\left|S^{n-1}x - TS^{n-2}x\right| = \left|S^{n-2}x - S^{n-1}x\right| > \frac{1}{n}$$

Şirul iteraţiilor $\{x, Sx, S^2x, ..., S^{n-1}x, TS^{n-2}x\}$ este monoton, deci inegalităţile de mai sus conduc la o contradicţie $|x - TS^{n-2}x| > 1$.
Deci, dacă $\epsilon > 0$ şi $x \in [0, 1]$, atunci pentru orice aplicaţie neexpansivă $T : [0, 1] \to [0, 1]$, $|S^n x - S^{n+1}x| \leq \epsilon$ oricare ar fi $n \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$. Acest caz este un caz special dat de următoarea teoremă.

TEOREMA 1.1.19. *Fie E un spaţiu Banach arbitrar, K o submulţime mărginită, închisă şi convexă a lui E şi fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor aplicaţiile neexpansive definite de la K la K. Fie operatorul $T_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha T$ pentru $\alpha \in (0, 1)$ şi $T \in \mathcal{F}$. Atunci T_α este asimptotic regular în K. În plus, şirul $\{\|T_\alpha^n x - T_\alpha^{n+1}x\|\}$ converge uniform către 0 pentru $x \in K$ şi $T \in \mathcal{F}$. Dacă $\epsilon > 0$ atunci există $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|T_\alpha^n x - T_\alpha^{n+1}x\| \leq \epsilon$, pentru orice $n \geq N$, $x \in K$ şi $T \in \mathcal{F}$.*

Se observă că pentru orice $T \in \mathcal{F}$ şi $\alpha \in (0, 1)$ mulţimea punctelor fixe ale lui T şi ale lui T_α coincid. Şirurile iteraţiilor $\{T_\alpha^n x\}$ pentru $x \in K$ formează şiruri aproximante de puncte fixe pentru T_α şi centrele lor asimptotice sunt T_α invariante. Acest fapt ajută la determinarea punctelor fixe a lui T. Demontraţia teoremei se bazează pe următoarea lemă care asigură convergenţa uniformă către 0 a şirului $\{\|T_\alpha^n x - T_\alpha^{n+1}x\|\}$ pentru orice $x \in K$ şi $T \in \mathcal{F}$. Rezultatul a fost demonstrat pentru prima dată de Ishikawa în 1976.

LEMA 1.1.20. *Fie E spaţiu Banach, $K \subset E$ mărginită, închisă, convexă şi $T : K \to K$ operator neexpansiv. Pentru $\alpha \in (0, 1)$ şi $x_0 \in K$ fixat, definim $T_\alpha = (1 - \alpha)I + \alpha T$*

şi şirurile $\{x_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *astfel:*

$$x_{n+1} = T_\alpha x_n;$$
$$y_n = Tx_n, \ \ n = 0, 1, 2, ...$$

Atunci pentru orice $i, n \in \mathbb{N}$, *avem*

$$\|y_{i+n} - x_i\| \geq (1-\alpha)^{-n}[\|y_{i+n} - x_{i+n}\| - \|y_i - x_i\|] + (1+n\alpha)\|y_i - x_i\|,$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

Teorema 1.1.19 generează următorul corolar.

Corolarul 1.1.21. ([**63**]) *Fie* E *spaţiu Banach,* $K \subset E$ *submulţime închisă şi convexă şi* $T : K \to K$ *operator neexpansiv pentru care* $T(K)$ *este compact. Atunci pentru orice* $\alpha \in (0,1)$ *iteraţiile operatorului* $T_\alpha = (1-\alpha)I + \alpha T$ *converg către un punct fix al lui* T.

Demonstraţia teoremei 1.1.19 stabileşte existenţa unui număr natural N astfel încât, dacă $T : K \to K$ este neexpansiv şi $x_0 \in K$, $n \geq N$, atunci

$$\left\|S^n(x_0) - S^{n+1}(x_0)\right\| \leq \epsilon,$$

unde $S = \frac{I+T}{2}$, adică S este asimptotic regular. Este puţin probabil ca o valoare comună N să existe pentru toate mulţimile K de un diametru dat. Acest lucru se poate întâmpla numai dacă toate mulţimile K aparţin unei clase de spaţii Banach uniform convexe, ale căror moduli de convexitate sunt toţi mărginiţi de un număr pozitv fixat. Acest rezultat este o consecinţă a următoarei teoreme dată de W.A. Kirk şi Martinez Yanez în 1990.

Teorema 1.1.22. ([**89**]) *Fie* E *un spaţiu Banach uniform convex cu modulul de convexitate* δ, $K \subset E$ *submulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă cu* $diamK = d$ *şi fie* $\epsilon > 0$ $(\epsilon \leq \frac{d}{2})$. *Dacă* $T : K \to K$ *este operator neexpansiv şi* $S = \frac{I+T}{2}$ *atunci pentru orice* $x \in K$, $\|S^n x - S^{n+1}x\| \leq \epsilon$, *pentru orice* n *ce satisface relaţia* $[1 - \delta(\frac{2\epsilon}{d})]^n \leq \dfrac{\epsilon}{d}$.

Observaţia 1.1.4. Teorema 1.1.19 are loc înlocuind şirul $\{T_\alpha^n x\}$ cu unul mai general $\{x_n\}$ definit astfel: fie şirul $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ pentru care $0 \leq \alpha_n \leq b < 1$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Pentru $T \in \mathcal{F}$ şi $x_0 \in K$ definim şirul

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \text{ n=0,1,2,...}$$

În cazul general, Teorema 1.1.19 a fost demonstrată de Goebel şi Kirk în 1983, iar o altă versiune a fost dată de Ishikawa în 1976. Edelstein şi O'Brien în 1978 au dat o demonstraţie a Teoremei 1.1.19 pentru un singur operator. Corolarul 1.1.21 a aparut mult mai repede în istoria teoriei punctului fix. În 1955 Krasnoselskij a obţinut acest rezultat pentru E spaţiu uniform convex (şi $\alpha_n \equiv \frac{1}{2}$), iar în 1966 Edelstein observă că

concluzia corolarului rămâne adevărată şi pentru E strict convex.
În 1978, Baillon, Bruck şi Reich extind Corolarul 1.1.21 către o altă direcţie. Ei arată că dacă $T : K \to K$ este operator neexpansiv, K o mulţime convexă arbitrară şi dacă $T_\alpha = (1-\alpha)I + \alpha T$, $\alpha \in (0,1)$ atunci T_α satisface relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T_\alpha^{n+1}x - T_\alpha^n x \right\| = \frac{1}{k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left\| T_\alpha^{n+k}x - T_\alpha^n x \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| T_\alpha^n x \right\|, \quad x \in K.$$

Având în vedere că Teorema 1.1.10 implică o normă topologică slabă, s-ar putea aştepta ca în anumite circumstanţe topologia slabă să poată fi folosită la aproximarea punctelor fixe ale unei aplicaţii neexpansive. Această schemă există în demonstraţia originală a lui Ghöde (1965).
Am enunţat mai sus că dacă K este submulţime mărginită, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex şi dacă $T : K \to K$ este operator neexpansiv, atunci operatorul definit prin $S = \frac{I+T}{2}$ este asimptotic regular. În plus dacă $x \in K$ şi şirul $\{x_n\}$ este definit astfel

$$x_{n+1} = \frac{x_n + Tx_n}{2} = Sx_n, \; n = 1, 2, ...,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Sx_n\| \equiv \lim_{n\to\infty} \left\| S^n x - S^{n+1}x \right\| = 0.$$

În baza Teoremei 1.1.10, dacă E este uniform convex, atunci orice limită subsecvenţială slabă a şirului $\{x_n\}$ este punct fix a lui S, respectiv T. Următoarea teoremă dată de Reich în 1979 arată că o ipoteză suplimentară asupra lui E asigură convergenţa slabă a şirului $\{x_n\}$.

Teorema 1.1.23. ([**166**]) *Fie K o submulţime închisă, mărginită şi convexă a spaţiului Banach uniform convex E înzestrat cu norma diferenţiabilă Fréchet. Presupunem că $T : K \to K$ este operator neexpansiv şi fie $S = \frac{I+T}{2}$. Atunci pentru orice $x \in K$, şirul $\{S^n x\}$ converge slab către un punct fix a lui T.*

Reamintim noţiunea de normă diferenţiabilă Fréchet:
Fie E un spaţiu Banach. Spunem că E este înzestrat cu norma diferenţiabilă Fréchet dacă pentru orice $x \in E$ cu $x \neq 0$, limita

$$D_x(y) = \lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

există uniform pentru $y \in E$ mărginit. Spaţiile cu norma diferenţiabilă Fréchet includ, printre altele, toate spaţiile de forma l^p, L^p cu $1 < p < \infty$.
Teorema de mai sus, dată de Reich în 1979, a fost iniţial demonstrată cu şirul $\{S^n x\}$ înlocuit cu un şir $\{x_n\}$ definit mai general astfel:

$$x_1 \in K; \; x_{n+1} = (1 - c_n)x_n + c_n T x_n, \; n = 1, 2, ...,$$

unde $0 \le c_n \le 1$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(1 - c_n) = +\infty$.
Structura mulţimii punctelor fixe ale unei aplicaţii neexpansive depinde de domeniul

pe care este definită aplicaţia. Dacă domeniul este convex şi spaţiul este stict convex atunci mulţimea punctelor fixe este de asemenea convexă. În cazul unui spaţiu care nu este strict convex, mulţimea punctelor fixe nu este neapărat convexă.
Reamintim că un spaţiu metric (M, ρ) se numeşte *metric convex* dacă pentru oricare două puncte $x, y \in M$ cu $x \neq y$ există $z \in M$, $x \neq z \neq y$ astfel încât

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y).$$

Teorema fundamentală a lui Menger pe spaţii metric convexe arată că în spaţii metrice complete şi metric convexe oricare două puncte pot fi unite printr-un segment. Submulţimile convexe a unui spaţiu Banach sunt metric convexe, iar în spaţii Banach strict convexe acestea sunt singurele mulţimi metric convexe. Pentru o clasă largă de spaţii Banach, mulţimea punctelor fixe ale aplicaţiilor neexpansive sunt metric convexe.

DEFINIŢIA 1.1.17. Spunem că un spaţiu Banach E are proprietatea de punct fix pentru sfere, dacă orice submulţime nevidă, închisă şi convexă a sferei unitate are proprietatea de punct fix pentru aplicaţii neexpansive.

Deşi definiţia de mai sus pare puţin artificială, spaţiile având această proprietate includ toate spaţiile strict convexe. Această proprietate are implicaţii în structura mulţimilor punctelor fixe ale operatorilor neexpansivi.
Presupunem că K este submulţime închisă şi convexă a spaţiului Banach E şi E are proprietatea de punct fix pentru sfere. Fie $T : K \to K$ operator neexpansiv şi notăm cu F_T mulţimea punctelor fixe a lui T. Presupunem că $F_T \neq \emptyset$ şi K este local slab compactă, ceea ce înseamnă că intersecţia lui K cu orice bilă închisă din E este slab compactă. Fie K_0 o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui K care este invariantă în raport cu T. Atunci $F_T \cap K_0 \neq \emptyset$. În acest sens, considerăm $x \in F_T$ şi submulţimea

$$\begin{aligned} K_1 = Proj_{K_0}(x) &= \{y \in K_0 : \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, K_0)\} \\ &= B(x, \operatorname{dist}(x, K_0)) \end{aligned}$$

Atunci K_1 este submulţime închisă şi convexă a sferei, care din compactitate este nevidă. Astfel, pentru orice $y \in K_1$ avem $\|Ty - x\| = \|Ty - Tx\| \leq \|y - x\|$. În plus $T : K_1 \to K_1$ şi din proprietatea de punct fix pentru sfere obţinem

$$F_T \cap K_0 \supset F_T \cap K_1 \neq \emptyset.$$

Are loc următoarea propoziţie.

PROPOZIŢIA 1.1.1. *Fie E spaţiu Banach care are proprietatea de punct fix pentru sfere şi fie $K \subset E$ o submulţime mărginită, închisă şi convexă, iar $T : K \to K$ este operator neexpansiv. Atunci:*
T are un punct fix în orice submulţime nevidă, închisă, convexă şi T-invariantă a lui K. *(P.F.C.)*

Despre aplicaţiile satisfăcând concluzia (P.F.C.) spunem că au proprietatea de punct fix condiţionată. Această proprietate a fost introdusă şi studiată de Bruck în 1973.

TEOREMA 1.1.24. (Bruck, [**24**]) *Presupunem că E este spaţiu Banach având proprietatea de punct fix pentru sfere, $K \subset E$ submulţime nevidă, închisă, convexă şi $T : K \to K$ o aplicaţie neexpansivă. Atunci F_T este metric convexă.*

O altă proprietate a mulţimilor punctelor fixe ale operatorilor neexpansivi implică noţiunea de *retracţie*. O submulţime H alui K se numeşte *retract* a lui K dacă există o aplicaţie continuă $R : K \to H$ cu $F_R = H$. Orice aplicaţie R este o *retracţie* a lui K în H. Dacă R este aplicaţie neexpansivă, atunci H se numeşte *retract neexpansiv* a lui K.
Următoarele rezultate date de Bruck R. E. în 1973 fac referire la proprietăţile mulţimilor punctelor fixe a lui T.

TEOREMA 1.1.25. (Bruck, [**24**]) *Fie E spaţiu Banach şi $K \subset E$ o submulţime nevidă local slab compactă şi convexă şi $T : K \to K$ o aplicaţie neexpansivă care satisface concluzia (P.F.C.). Atunci F_T este retract neexpansiv al lui K.*

Următoarele leme derivă din teorema 1.1.25.

LEMA 1.1.26. *Fie K o mulţime convexă şi local slab compactă şi F o submulţime nevidă a lui K. Atunci mulţimea*

$$N(F) = \{f \in K^K : f \text{ este neexpansivă şi } F_f \supset F\}$$

este compactă în topologia convergenţei punctuale slabe.

LEMA 1.1.27. *Fie K şi F ca în lema 1.1.26 şi presupunem că pentru orice $z \in K$ există $h \in N(F)$ astfel încât $hz \in F$. Atunci F este retract neexpansiv a lui K.*

EXEMPLUL 1.1.9. Considerăm spaţiul l_3^p şi spaţiul $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu norma $\|(x_1, x_2, x_3)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p)^{1/p}$ pentru $1 < p < \infty$.
Notăm cu P planul $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. Atunci dacă $p \neq 2$, P nu poate fi retract neexpansiv a lui l_3^p pentru că nu există nici o aplicaţie neexpansivă $T : l_3^p \to l_3^p$ pentru care $F_T = P$.
Pentru a demonstra cest lucru considerăm vectorii bazei $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ şi $e_3 = (0, 0, 1)$ şi şirul periodic $\{x_n\}$ definit prin $\{e_1, e_2, e_3, e_1, e_2, e_3, ...\}$. Centrul asimptotic a lui $\{x_n\}$ coincide cu centrul Chebîsev a mulţimii $\{e_1, e_2, e_3\}$ care este punctul (c, c, c) cu $c = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{p-1}}}$. Acest punct aparţine planului P numai dacă $p = 2$, caz în care P este retract neexpansiv al lui l_3^p prin proiecţia ortogonală a lui l_3^p în P.

Pentru ca un şir de funcţii continue definite pe o mulţime K cu valori în $\mathbb{R}^n$, să fie uniform convergent, este necesar ca el să fie mărginit şi echicontinuu. Aceste

două proprietăţi sunt necesare şi suficiente pentru ca o familie A de funcţii continue din K cu valori în $\mathbb{R}^n$, să aibă proprietatea că orice şir de funcţii din A posedă un subşir uniform convergent. Teorema Arzelá-Ascoli este un instrument fundamental în stabilirea existenţei şi unicităţii soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare, precum şi în studiul compactităţii operatorilor integrali.
Fie K o mulţime compactă fixată din $\mathbb{R}^n$.
Pentru o funcţie $f : K \to \mathbb{R}^n$ definim $\|f\| = \|f\|_K \stackrel{def}{=} \sup_{x\in K} \|f(x)\|$

Definiţia 1.1.18. Familia $\mathcal{A}$ de funcţii continue definite pe K cu valori în $\mathbb{R}^n$, se numeşte mărginită sau uniform mărginită dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f\| \leq M$$

pentru orice $f \in \mathcal{A}$

Observaţia 1.1.5. Este clar că orice famile finită $\mathcal{A}$ este mărginită. În general, o familie infinită nu este mărginită. Totuşi, un şir uniform convergent de funcţii continue, din K cu valori în $\mathbb{R}^n$, este mărginit.

Definiţia 1.1.19. Familia $\mathcal{A}$ de funcţii, din K cu valori în $\mathbb{R}^n$, se numeşte echicontinuă dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta_\epsilon > 0$ astfel ca, pentru orice $x, y \in K$ cu $\|x - y\| < \delta_\epsilon$ şi orice funcţie $f \in \mathcal{A}$, să avem

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

Observaţia 1.1.6. Considerentele de mai sus arată că orice famile finită de funcţii continue, din K cu valori în $\mathbb{R}^n$, este echicontinuă.

Teorema 1.1.28. (Arzelá-Ascoli [**160**]) *Fie K o mulţime compactă din $\mathbb{R}^n$ şi $\mathcal{A}$ o familie de funcţii definite pe K cu valori în $\mathbb{R}^n$.*
Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $\mathcal{A}$ este mărginită şi echicontinuă.
b) orice şir de elemente din $\mathcal{A}$ posedă un subşir uniform convergent.

În cazul unui spaţiu normat $(E, \|\cdot\|)$ şi a unei aplicaţii $T : E \to E$ sunt definite diferite şiruri ale aproximaţiilor succesive a căror convergenţă către punctul fix al aplicaţiei este asigurată sau nu, depinzând de geometria spaţiului ales şi de proprietăţile operatorului în acest spaţiu. Principiul contracţiei 1.1.2 sau teorema lui Picard-Banach-Caccioppoli conduce la *iteraţia Picard* asociată operatorului T definit ca şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$, cu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, ...,$$

unde $x_0 \in E$ arbitrar ales.
Şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

se numeşte *iteraţia Krasnoselskij.*
Se observă că iteraţia Krasnoselskij se reduce la iteraţia Picard corespunzătoare operatorului

$$T_\lambda = (1-\lambda)\cdot I + \lambda \cdot T, \quad I = \text{operatorul identic}$$

pentru $\lambda = 1$. În plus $F_T = F_{T_\lambda}$, pentru orice $\lambda \in (0, 1]$.
Pentru $x_0 \in K$, şirul definit prin

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n T x_n, \quad n = 0, 1, 2, ..., \text{unde } \{\lambda_n\} \subset [0, 1]$$

se numeşte *iteraţia Mann.*
Dacă $\lambda_n = \lambda(\text{const.})$ atunci iteraţia Mann se reduce la iteraţia Krasnoselskij.
Următoarele noţiuni şi teoreme sunt de o importanţă fundamentală în teoria punctului fix pentru operatori neexpansivi definiţi pe spaţii normate.

DEFINIŢIA 1.1.20. O submulţime K a unui spaţiu vectorial real E se numeşte **convexă** dacă pentru orice pereche de puncte $x, y \in K$, segmentul închis cu extremităţile x, y, ceea ce înseamnă mulţimea $\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$ este conţinută în K. O submulţime K a unui spaţiu real normat este mărginiă dacă există $M > 0$ astfel încât $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in C$.

TEOREMA 1.1.29. (Bowder-Ghöde-Kirk [**160**]) *Fie K o submulţime închisă şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex şi $T : K \to K$ o aplicaţie neexpansivă. Atunci T are cel puţin un punct fix.*

Chiar dacă operatorul T este neexpansiv şi are punct fix, este posibil ca iteraţia Picard să nu conveargă către punctul fix, aşa cum se poate observa în următorul exemplu.

EXEMPLUL 1.1.10. ([**64**]). Fie $K = [0, 1]$ şi $T : [0, 1] \to [0, 1]$, $Tx = 1 - x$ pentru orice $x \in [0, 1]$. În acest caz, operatorul T este neexpansiv şi are un punct fix unic, $F_T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$, dar pentru orice $a \neq \frac{1}{2}$, iteraţia Picard corespunzătoare este un şir oscilant

$$a, 1-a, a, 1-a, \ldots$$

.

În scopul determinării mulţimii punctelor fixe ale unui operator neexpansiv vom considera câteva dintre cele mai importante teoreme din teoria punctului fix pentru operatori neexpansivi.

DEFINIŢIA 1.1.21. ([**157**]) *Dacă* X, Y *sunt spaţii Banach şi* $T : K \subset X \to Y$*, atunci vom spune că:*

a) *operatorul* T *este mărginit dacă transformă mulţimile mărginite în mulţimi mărginite;*
b) *operatorul* T *este compact dacă transformă mulţimile mărginite în mulţimi relativ compacte;*
c) *operatorul* T *este complet continuu dacă este continuu şi compact;*
d) *operatorul* T *este de rang finit dacă* $T(D)$ *este inclus într-un spaţiu finit dimensional.*

Urmatoarele teoreme sunt cunoscute ca teoremele de punct fix ale lui Schauder. În aplicaţii ultimele două variante sunt mai utile

TEOREMA 1.1.30. (Schauder [**160**]) *Fie* K *o submulţime nevidă, compactă şi convexă a unui spaţiu Banach* E *şi* $T : K \to K$ *un operator continuu. Atunci* T *are cel puţin un punct fix.*

TEOREMA 1.1.31. (Schauder [**160**]) *Dacă* K *este o mulţime nevidă, convexă, mărginită şi închisă a unui spaţiu Banach* E*, atunci orice operator complet continuu* $T : K \to K$ *are cel puţin un punct fix în* K*.*

Se mai întâlneşte în literatura de specialitate o altă formulare a teoremi anterioare.

TEOREMA 1.1.32. *Dacă* K *este o submulţime nevidă, compactă şi stelată a unui spaţiu Banach* E*, atunci orice aplicaţie neexpansivă* $T : K \to K$ *are cel puţin un punct fix.*

Pentru această variantă există o demonstraţie simplă, aşa cum poate fi găsită în [**77**].

LEMA 1.1.33. (Kirk [**18**]) *Dacă* E *este spaţiu Banach normat şi* $K \subset E$ *o submulţime nevidă, mărginită, închisă şi convexă şi* $T : K \to K$ *este operator neexpansiv, atunci*

$$\inf\{\|x - Tx\| : x \in K\} = 0.$$

Lema 1.1.33 ne asigură că operatorul neexpansiv T are "puncte aproape fixe", în sensul că aceste puncte pot fi găsite constructiv, dar distanţa dintre ele este foarte mică. Există întotdeauna un şir $\{y_n\}$ din K pentru care $\lim_{n\to\infty} \|y_n - Ty_n\| = 0$. Vom numi acest şir, *şirul aproximant al punctelor fixe* al lui T. În baza acestei observaţii, a afirma că T are puncte fixe este echivalent cu a spune că funcţia continuă $\varphi : K \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(x) = \|x - Tx\|$ îşi atinge valoarea minimă în zero, dacă mulţimea K este compactă.
Un caz special al Teoremei de punct fix a lui Schauder 1.1.31 este teorema lui Schaefer în care aplicaţia T este aplicaţie complet continuă definită pe un spaţiu liniar normat.

TEOREMA 1.1.34. (Schaefer [**64**]) *Fie E un spaţiu liniar normat. Dacă $T : E \to E$ este operator complet continuu, atunci submulţimea $\{x \in X : x = \lambda Tx,\ \lambda \in [0,1]\}$ este mărginită sau T are punct fix.*

Krasnoselskij în [**94**], în cazul operatorilor neexpansivi, pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ a stabilit că

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n) \to p, \text{ când } n \to \infty,$$

şi apoi Schaefer în [**185**], pentru un $\lambda \in (0,1)$ arbitrar, a arătat că dacă E este spaţiu Banach uniform convex şi K este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului E, atunci iteraţia Krasnoselskij converge către un punct fix a p operatorului $T : K \to K$, adică

$$(1-\lambda)x_n + \lambda Tx_n \to p \text{ când } n \to \infty$$

TEOREMA 1.1.35. ([**19**]) *Fie K o submulţime a spaţiului Banach E şi $T : K \to K$ un operator neexpansiv. Pentru $x_0 \in K$, arbitrar ales, considerăm iteraţia Mann $\{x_n\}$ cu următoarele proprietăţi:*

(a) $x_n \in K$ *pentru orice* $n \geq 1$*;*

(b) $0 \leq \lambda_n \leq b < 1$ *pentru orice* $n \geq 1$*;*

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$.

Dacă $\{x_n\}$ este mărginit, atunci $x_n - Tx_n \to 0$, când $n \to \infty$.

În strânsă legătură cu Teorema 1.1.35, în [**29**] se demonstrează următoarele rezultate care asigură convergenţa iteraţiei Krasnoselskij pentru un operator neexpansiv.

TEOREMA 1.1.36. ([**29**]) *Fie K o submulţime a spaţiului real liniar normat E şi $T : K \to X$ un operator neexpansiv. Dacă există $x_0 \in K$ pentru care şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset K$ este mărginit, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0.$$

În plus, dacă K este submulţime mărginită din E, atunci limita anterioară este uniformă.

TEOREMA 1.1.37. ([**29**]) *Cu K, T, E definite ca în teorema de mai sus şi $x_0 \in K$, presupunem că există şirul $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset K$ mărginit, iar şirul descrescător $\{C_n\}_{n\geq 0}$ satisface relaţia $0 < a \leq C_n < 1$. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

COROLARUL 1.1.38. ([**29**]) *Fie K o submulţime convexă şi compactă a spaţiului Banach E şi $T : K \to K$ un operator neexpansiv. Dacă iteraţia Mann $\{x_n\}$ satisface ipotezele (a)-(c) din Teorema 1.1.35, atunci $\{x_n\}$ converge tare către un punct fix a lui T.*

COROLARUL 1.1.39. ([**29**]) *Fie E spaţiu real normat şi K o submulţime închisă, mărginită şi convexă a spaţiului E şi $T : K \to K$ un operator neexpansiv. Dacă $I - T$ transformă submulţimi închise, mărginite din E în submulţimi închise din E şi iteraţia Mann $\{x_n\}$ îndeplineşte ipotezele (a)-(c) din Teorema 1.1.35, atunci $\{x_n\}$ converge tare către un punct fix a lui T în K.*

Aceste ultime două rezultate vor juca un rol esenţial în capitolele următoare ale tezei.

1.3. Teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate

În stabilirea unora dintre rezultatele originale ale tezei şi anume în Capitolul 5, vom folosi şi câteva din teoremele de bază din teoria punctului fix în spaţii metrice generalizate cu metrica luând valori într-un con, pe care le enunţăm mai jos.

Pentru fixarea ideilor prezentăm câteva noţiuni din teoria punctului fix în spaţii metrice conice.

Fie E spaţiu Banach real cu θ vectorul nul al spaţiului şi K o submulţime a lui E.

DEFINIŢIA 1.1.22. Mulţimea K se numeşte *con* dacă şi numai dacă

(k_1) K este nevidă, închisă şi $K \neq \{0\}$;

(k_2) pentru orice numere reale $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a, b \geq 0$ şi orice $x, y \in K$, să avem $ax + by \in K$;

(k_3) $K \cap (-K) = \{0\}$.

Dându-se conul $K \subset E$ definim următoarele relaţii de ordine pe K:

(OP) ordonarea parţială "$\underset{K}{\leq}$" în raport cu K

$$x \underset{K}{\leq} y \text{ dacă şi numai dacă } y - x \in K;$$

(OPS) ordonarea parţială strictă "$\underset{K}{<}$" în raport cu K prin

$$x \underset{K}{<} y \text{ dacă şi numai dacă } y - x \in K \text{şi } x \neq y;$$

(OPST) ordonarea parţială strictă tare "$\underset{K}{\ll}$" în raport cu K prin

$$x \underset{K}{\ll} y \text{ dacă şi numai dacă } y - x \in \text{ int } K,$$

unde *intK* reprezintă interiorul conului K.

EXEMPLUL 1.1.11. 1) Fie $E = C[0, 1]$ spaţiul tuturor aplicaţiilor continue pe $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$. Avem următorul con

$$K = \{\mu \in E : \mu(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$$

cu

$$\text{int } K = \{\mu \in E : \mu(t) > 0\,, \forall t \in [0, 1]\}.$$

În acest caz vom spune că

$$
\begin{aligned}
u \underset{K}{\leq} v \text{ în } K \text{ dacă } u(t) &\leq v(t), \forall t \in [0,1],\\
u \underset{K}{<} v \text{ în } K \text{ dacă } u(t) &\leq v(t), \text{ şi } u(t) \neq v(t), \forall t \in [0,1],\\
u \underset{K}{\ll} v \text{ în } K \text{ dacă } u(t) &< v(t), \forall t \in [0,1].
\end{aligned}
$$

2) Dacă considerăm aplicaţiile $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu $u(t) = t$ şi $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ definit prin

$$
v(t) = \begin{cases} t,\ t \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right) \\ 2t^2,\ t \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \end{cases}
$$

avem că $u \underset{K}{\leq} v$ în K. Cum $u \neq v$ obţinem că $u \underset{K}{<} v$ în K, dar $u \underset{K}{\ll} v$ nu este adevărată.

Dacă în spaţiul Banach E avem conul $K \subset E$, care inzestrează spaţiul cu relaţia de ordine parţială $\underset{K}{\leq}$, atunci E este spaţiu Banach ordonat şi-l vom nota cu (E, K) sau $(E, K, \underset{K}{\leq})$. Mulţimea $A \subset E$, unde (E, K) este spaţiu Banach ordonat, este mărginită dacă există $k \in K$ astfel încât $x \underset{K}{\leq} k$ pentru orice $x \in A$.

Definiţia 1.1.23. Fie A o submulţime mărginită a unui spaţiu Banach ordonat (E, K). Elementul $M = \sup A \in K$ este *supremumul* lui A dacă M există şi satisface următoarele condiţii

(SUPa) pentru orice $x \in A$ avem $x \underset{K}{\leq} M$;

(SUPb) pentru orice $e \in K$ există $s \in A$ astfel încât $M - e \underset{K}{\ll} s$.

Conul K se numeşte *normal* dacă există numărul $P > 0$ astfel încât $0 \leq x \leq y$ implică $\|x\| \leq P \cdot \|y\|$, pentru orice $x, y \in E$. Cel mai mic număr pozitiv ce satisface relaţia de mai sus se numeşte *constanta normală* a conului K.

Definiţia 1.1.24. Fie X o mulţime nevidă şi (E, K) spaţiu Banach ordonat . O aplicaţie $d : X \times X \to K$ se numeşte *metrică conică* pe X dacă

(m_1) $0 \underset{K}{\leq} d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$ şi $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(m_2) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$;

(m_3) $d(x, z) \underset{K}{\leq} d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$.

Mulţimea X înzestrată cu metrica conică d formează un *spaţiu metric conic*, notat (X, d).

Noţiunea de spaţiu metric conic este mult mai generală decât cea de spaţiu metric.

Avem următoarele exemple de spaţii metrice conice.

EXEMPLUL 1.1.12. Fie $E = \mathbb{R}^2$ şi $K = \mathbb{R}^2_+$, $X = \mathbb{R}$ şi definim metrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ prin $d(x, y) = (|x - y|, \alpha |x - y|)$ unde $\alpha \geq 0$ este constantă reală. Atunci (X, d) este spaţiu metric conic.

EXEMPLUL 1.1.13. Fie $E = C[0, 1]$, $K = \{\varphi \in E : \varphi \geq 0\} \subset E$, $X = \mathbb{R}$ şi aplicaţia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to E$ definită prin $d(x, y) = |x - y| \cdot \varphi$, unde $\varphi(t) = e^t \in E$. Atunci (X, d) este spaţiu metric conic.

DEFINIŢIA 1.1.25. Fie (X, d) spaţiu metric conic. O aplicaţie $T : X \to X$ se numeşte Lipschitziană dacă există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$d(Tx, Ty) \underset{K}{\leq} k \cdot d(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$. Cea mai mică constantă care satisface inegalitatea de mai sus se numeşte constanta Lipschitz a lui T. În particular, T este contracţie dacă $k \in [0, 1)$ şi T este operator neexpansiv dacă $k = 1$.

Noţiunile de şir convergent, şir Cauchy şi spaţiu metric conic complet se definesc în acelaşi mod ca şi în cazul spaţiilor metrice obişnuite.

DEFINIŢIA 1.1.26. Fie $x \in X$ şi $\{x_n\}$ un şir din X. Atunci vom spune că

(a) Şirul $\{x_n\}$ converge conic către x dacă pentru orice $c \in E$ cu $\theta \underset{K}{\ll} c$ există un număr natural n_0 astfel încât $d(x_n, x) \underset{K}{\ll} c$ pentru orice $n > n_0$. Vom nota $x_n \overset{d}{\to} x$ când $n \to \infty$.

(b) Şirul $\{x_n\}$ este şir Cauchy conic dacă pentru orice $c \in E$ cu $0 \underset{K}{\ll} c$ există un număr natural n_0 astfel încât $d(x_m, x_n) \underset{K}{\ll} c$ pentru orice $m, n > n_0$.

(c) (X, d) este spaţiu conic complet dacă orice şir Cauchy conic este convergent conic în X.

Avem următorul rezultat regăsit în [**201**], [**67**] şi [**75**], care reprezintă Principiul Contracţiei al lui Banach în spaţii metrice conice.

TEOREMA 1.1.40. (P. Zabrejko [**201**]) *Fie (X, d) spaţiu conic complet, K un con normal cu constanta P. Presupunem că $T : X \to X$ satisface condiţia de contracţie*

$$d(Tx, Ty) \underset{K}{\leq} k \cdot d(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$ şi $k \in [0, 1)$ constantă. Atunci T are un punct fix unic în X şi pentru orice $x \in X$ şirul aproximaţiilor succesive $\{T^n x\}$ converge către unicul punct fix.

CAPITOLUL 2

Ecuaţii diferenţiale cu argument modificat

Existenţa şi/ sau unicitatea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale, respectiv a ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat s-a bazat pe două metode: "metoda analitic-numerică" şi "metoda aproximaţiilor succesive".

Dintre tratatele de bază având ca tematică ecuaţii diferenţiale menţionăm: T.Lalescu [**105**], R.D. Driver [**52**], I.G. Petrovskii [**150**], Kolmanovskii, V. and Nosov, V.R. [**91**], Kolmanovskii, V. and Myshkis [**90**], A. J. Hale [**71**], S.R. Bernfeld, V. Lakshmikantham [**20**], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, D.J. Vasundhara [**98**], V. Lakshmikantham, Wen, L., B.Zhang [**104**], K. Yoshida [**198**], Gh. Marinescu [**124**], A. Haimovici [**69**], Y. Hino, S. Murakami şi T. Naito [**74**], C. Corduneanu [**34**],[**32**], Gh. Coman, I. Rus, G. Pavel, I.A. Rus [**31**], D. Guo, V. Lakshmikantham şi X. Liu [**66**], W. Hackbush [**68**], D.V. Ionescu [**76**], Şt. Mirică [**129**], V. Mureşan [**137**], A.D. Polyanin şi A.V. Manzhirov [**156**], R. Precup [**157**] şi [**160**], I.A. Rus [**168**],[**167**],[**171**],[**176**], Sz. Andras [**5**], V.A. Dârzu [**36**], T.A. Burton [**27**], Azbelev, N.V., Maksimov, V.P. şi Rakhmatullina, L.F. [**7**].

Existenţa şi unicitatea soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale concrete, precum şi dependenţa de date a acestora au fost studiate în multe lucrări, dintre care menţionăm câteva: A.D. Myshkis, L.E. Elsgolts [**140**], A. Halanay, J. Yorke [**70**], R. Ramalho [**165**], G. Karakostas, Y.G. Sficas, V.A. Staikos [**81**], C.A. Stuart [**190**], B. Rzepecki [**183**], I.A. Rus [**169**], [**170**], [**172**], [**173**], [**174**], I.A. Rus, S. Mureşan, V. Mureşan [**180**], R. Precup [**160**],[**161**], [**158**], [**159**], R. Precup şi E. Kirr [**163**], D.O'Regan şi A. Petruşel [**143**], M. Dobriţoiu, I.A. Rus şi M.A. Şerban [**50**], M. Ambro [**3**], [**47**], [**43**], [**44**], [**45**], [**46**], [**50**], M. Lauran [**118**], [**117**], [**115**].

În prezentul capitol studiem existenţa soluţiilor următoarelor tipuri de ecuaţii

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda x)), & x \in [a,b] \\ y(x_0) = y_0, & \lambda \in (0,1) \end{cases} \tag{2.0.1}$$

unde $x_0, y_0 \in [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b])$ date,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(y(x))) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.0.2}$$

unde $x_0, y_0 \in [a,b],\ f \in C\left([a,b]\times[a,b]\times[a,b]\right)$ date,
a unor ecuaţii diferenţiale de tip iterativ de forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(y(x)), y(\lambda x)), \quad \lambda \in (0,1) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.0.3}$$

regăsite în paragraful 1 al acestui capitol. În paragraful al doilea am studiat existenţa soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale fracţionare de forma

(1) ${}^cD^\alpha y(t) = f(t,y)$, pentru orice $t \in J = [0,T],\ 1 < \alpha \leq 2$;

(2) $y(0) = \int_0^T g(s,y)ds$;

(3) $y(T) = \int_0^T h(s,y)ds$,

unde ${}^cD^\alpha$ este derivata de ordin fracţionar de tip Caputo şi $f,g,h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue date.

Teoria ecuaţiilor cu argument modificat a cunoscut o dezvoltare rapidă în ultimii 30 de ani. Aceasta a fost determinată de multiplele aplicaţii ale acestora în mecanică, fizică, biologie, ştiinţe economice, aşa cum se poate vedea în lucrările [**80**],[**126**],[**178**],[**137**], [**136**], [**135**].

1. Ecuaţii diferenţiale cu argument modificat

Ecuaţiile diferenţiale cu argument modificat sau ecuaţiile diferenţial-funcţionale sunt acele ecuaţii funcţionale în care funcţia necunoscută şi/sau derivatele ei intervin pe argumente diferite.

Considerăm o ecuaţie diferenţială de ordin întâi cu argument modificat de forma:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(g(x))), \quad x \in [a,b]. \tag{2.1.1}$$

Ecuaţia (2.1.1) se numeşte cu argument întârziat dacă

$$\exists c \in \mathbb{R}\ a.\hat{\imath}.\ \ c \leq g(x) \leq x, \quad \forall x \in [a,b].$$

Menţionăm că în teoria ecuaţiilor cu argument modificat se întâlnesc ecuaţii diferenţiale de tip mixt în care apar şi întârzieri şi depăşiri ale argumentului şi diferă esenţial de cazul ecuaţiilor diferenţiale fără modificatre a argumentului (ecuaţii diferenţiale obişnuite).

Ecuaţiile diferenţial-funcţionale în care intervin derivatele de ordin maxim prin valori pe argumente diferite se numesc ecuaţii de tip neutral.

O noţiune importantă în cazul ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat este aceea de soluţie, noţiune care este strâns legată de tipul de modificare a argumentului

i) Dacă $a \leq g(x) \leq b, \forall x \in [a,b]$ atunci printr-o soluţie a ecuaţiei (2.1.1) înţelegem o funcţie $y \in C^1[a,b]$ care verifică ecuaţia dată.

ii) Dacă $c \leq g(x) \leq x, \forall x \in [a,b]$ atunci printr-o soluţie a ecuaţiei (2.1.1) înţelegem o funcţie $y \in C[c,b] \cap C^1[a,b]$, $c < b$, care verifică ecuaţia dată.

iii) Dacă $x \leq g(x) \leq c, \forall x \in [a,b]$ atunci printr-o soluţie a ecuaţiei (2.1.1) înţelegem o funcţie $y \in C[a,c] \cap C^1[a,b]$, $c > a$, care verifică ecuaţia dată.

Formularea problemelor cu condiţii iniţiale diferă în cazul ecuaţiilor diferenţiale cu argument modificat de cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

Vom face referiri în continuare la ecuaţii diferenţiale cu modificarea liniară a argumentului pentru care $g(x) = x$ şi respectiv $g(x) = \lambda x,\ \lambda > 0$ şi la o ecuaţie diferenţială cu argument modificat de tip iterativ. Vom considera problema Cauchy:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda x)) \quad x \in [a,b] \tag{2.1.2}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \lambda \in (0,1) \tag{2.1.3}$$

$$x_0, y_0 \in [a,b],\ \ a,b \in \mathbb{R}, \qquad f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b]) \quad \text{date.}$$

Prin soluţia problemei (2.1.2)+(2.1.3) înţelegem o funcţie $y \in C^1[a,b]$ care verifică ecuaţia (2.1.2) şi condiţia (2.1.3).
Considerăm $[a,b] \subset \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\lambda \cdot [a,b] \subset [a,b] \quad (*).$$

Ca exemplu, intervalul $[0,1]$ cu $\lambda \in (0,1)$ îndeplineşte condiţia (*). Dacă intervalul $[a,b]$ nu satisface condiţia (*) atunci considerăm funcţia $t(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ care transformă orice interval $[a,b]$ în intervalul $[0,1]$.
În lucrarea [**137**] V. Mureşan, prezintă existenţa şi unicitatea soluţiilor unor tipuri de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat, de forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x),\ y(\lambda x)), & x \in [a,b] \\ \quad y(x) = \psi(x) & x \in [d,a] \end{cases} \tag{2.1.4}$$

unde $\lambda > 0, \lambda \neq 1, co\,\{\lambda a, \lambda b\} \subset [d,b]\,,\ a,b,d \in \mathbb{R},\ d < a$, sau

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x),\ y(\lambda x)), & x \in [a,b] \\ \quad y(x) = \varphi(x) & x \in [b,c] \end{cases} \tag{2.1.5}$$

unde $\lambda > 0, \lambda \neq 1$,şi $co\,\{\lambda a, \lambda b\} \subset [a,c]\,,\ a,b,c \in \mathbb{R}\ c > b$.

Folosind principiul contracţiei în [**137**] se demonstrează existenţa şi unicitatea soluţiei problemei (2.1.4) în $C[d,b]$, respectiv (2.1.5) în $C[a,c]$.

Vom enunţa teorema de existenţă şi unicitate pentru problema (2.1.4) care precede câteva din rezultatele următoare.

TEOREMA 2.1.41. (Mureşan, V., [**137**]) *Presupunem că au loc condiţiile*
i) $a > 0, b > 0, 0 < \lambda < 1, \lambda b > 0$ *sau* $a < 0, b < 0, \lambda > 1, \lambda b > a, b = 0, \lambda > 1$
ii) $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ *şi* $\psi \in C[d,a]$ *este funcţia dată*

iii) $\exists L > 0$ *astfel încât* $|f(x,u,v) - f(x,\widetilde{u},\widetilde{v})| \leq L\left(|u-\widetilde{u}| + |v-\widetilde{v}|\right), \forall x \in [a,b]$, $\forall u,\widetilde{u},v,\widetilde{v} \in \mathbb{R}$

Atunci problema Cauchy (2.1.4) are $C[d,b]$ *soluţie unică ce poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice element din* $C[d,b]$.

Pornind de la problema (2.1.4) şi de la ecuaţia diferenţială cu argument modificat cu condiţie iniţială dată prezentată în [**25**], vom demonstra existenţa soluţiilor problemei (2.1.6) în mulţimea $C_L \subset C[a,b]$ folosind tehnica operatorilor neexpansivi.
În [**25**] se consideră problema cu condiţii iniţiale

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(y(x))), \quad x \in [a,b] \\ \quad y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

unde $x_0,\ \ y_0 \in [a,b]$ şi $f \in C([a,b] \times [a,b])$ şi

$$c_x = \max\{x-a, b-x\}\,, \quad x \in [a,b].$$

Pentru un $L > 0$ se consideră mulţimea

$$C_L = \{y \in C([a,b],[a,b]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq L \cdot |t_1 - t_2|\,, t_1, t_2 \in [a,b]\}\,, \tag{2.1.7}$$

Referitor la problema cu condiţii iniţiale de mai sus în [**25**] se demonstrează o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei cu condiţii iniţiale (2.1.6) în C_L, folosind principiul contracţiei. Soluţia problemei (2.1.6) $y \in C^1[a,b]$ deoarece integrand o funcţie continuă pe un interval compact obţinem primitiva funcţiei de asemenea continuă.

TEOREMA 2.1.42. ([**25**]) *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile*

(i) $f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b])$

(ii) există $L_1 > 0$ *astfel încât* $|f(s,u) - f(s,v)| \leq L_1 |u-v|$ *pentru orice* $s,u,v \in [a,b]$;

(iii) dacă L *constanta definită în relaţia (2.1.7) atunci*

$$M = \max\{|f(s,u)| : (s,u) \in [a,b] \times [a,b]\} \leq L$$

(iv) una din condiţii are loc:

a) $M \cdot c_{x_0} \leq c_{y_0}$;

b) $x_0 = a,\ M(b-a) \leq b - y_0, f(s,u) \geq 0,\ \forall s,u \in [a,b]$;

c) $x_0 = b,\ M(b-a) \leq y_0 - a, f(s,u) \geq 0,\ \forall s,u, \in [a,b]$.

(v) $L_1 \cdot C_{x_0} \cdot (L+1) < 1$.

Atunci problema cu condiţii iniţiale (2.1.6) are soluţia unică y^* *în* C_L.

OBSERVAŢIA 2.1.1. *1) În condiţiile teoremei 2.1.42, şirul aproximaţiilor succesive converge către unica soluţie* y^*.
2) Condiţia (v) este foarte restrictivă, dar din punctul de vedere a principiului contracţiei oferă multe informaţii despre soluţia problemei (2.1.6). Dacă o slăbim la o condiţie de neexpansivitate, atunci teorema 2.1.42 nu mai este valabilă, deci nu avem asigurate:

a) unicitatea soluţiei;

b) convergenţa şirului aproximaţiilor succesive.

Totuşi, şi în acest caz este posibil să obţinem rezultate privind:

a) existenţa soluţiei;

b) convergenţa unui proces iterativ către această soluţie.

Rezultatul premergător teoremei de existenţă a soluţiilor problemei (2.1.2)+(2.1.3) este publicat în lucrarea [**19**] şi stabileşte existenţa soluţiilor ecuaţiei diferenţiale (2.1.6):

TEOREMA 2.1.43. (V. Berinde, [**19**]) *Presupunem că au loc ipotezele (i)-(iv) din teorema 2.1.42 şi condiţia (v) este înlocuită cu*
(v′) $L_1 \cdot C_{x_0} \cdot (L+1) \leq 1$.
Atunci problema (2.1.6) are cel puţin o soluţie în C_L*, care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij*

$$y_{n+1}(t) = (1-\mu)y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds,\ t \in [a,b], n \geq 1$$

unde $\mu \in (0,1)$ *şi* $y_1 \in C_L$ *arbitrar ales.*

TEOREMA 2.1.44. (**M. Lauran**, [**115**]) *Dacă*

(i) $f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b])$

(ii) există $L_1 > 0$ *astfel încât* $|f(s,u_1,v_1) - f(s,u_2,v_2)| \leq L_1(|u_1-u_2| + |v_1-v_2|)$ *pentru orice* $s, u_i, v_i \in [a,b]$, $i = 1,2$

(iii) dacă L *constanta definită în relaţia (2.1.7) atunci*

$$M = \max\{|f(s,u,v)| : (s,u,v) \in [a,b] \times [a,b] \times [a,b]\} \leq L$$

(iv) are loc una din condiţiile :

a) $M \cdot c_{x_0} \leq c_{y_0}$;

b) $x_0 = d,\ M(b-a) \leq b - y_0, f(s,u,v) \geq 0,\ \forall s,u,v \in [a,b]$;

c) $x_0 = b,\ M(b-a) \leq y_0 - d, f(s,u,v) \geq 0,\ \forall s,u,v \in [a,b]$.

(v) $2 \cdot L_1 \cdot C_{x_0} \leq 1$.

Atunci problema cu condiţii iniţiale (2.1.2)+(2.1.3) are cel puţin o soluţie în C_L.

Demonstraţie: Se ştie din Lema 1 din [**25**] sau ca o consecinţă a teoremei Arzelá-Ascoli 1.1.28 că C_L este submulţime nevidă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a,b], \|\cdot\|)$ unde $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Considerăm operatorul integral $F : C_L \to C[a,b]$ definit prin

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda s))ds, \quad t \in [a,b].$$

Vom arăta că C_L este mulţime invariantă în raport cu F, adică

$$\begin{gathered} F(C_L) \subset C_L \\ |(Fy)(t)| \leq |y_0| + \left|\int_{x_0}^t f(s, y(s), y(\lambda s) ds\right| \leq |y_0| + M \cdot |t - x_0| \leq b \\ |(Fy)(t)| \geq |y_0| - \left|\int_{x_0}^t f(s, y(s), y(\lambda s) ds\right| \geq |y_0| - M \cdot |t - x_0| \geq \\ \geq |y_0| - M \cdot c_{x_0} \geq y_0 - c_{y_0} \geq a. \end{gathered}$$

Deci $Fy \in [a, b], \forall y \in C_L$.

Pentru orice $t_1, t_2 \in [a, b]$ avem

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| \leq \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y(\lambda s)) ds\right| \leq M \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

Deci $Fy \in C_L, \forall y \in C_L$. În mod analog se tratează cazurile b) şi c). Vom arăta în continuare că F este operator neexpansiv.

$$\begin{gathered} |F(y)(t) - (Fz)(t)| \leq \\ \leq \left|\int_{x_0}^t f(s, y(s), y(\lambda s)) - f(s, z(s), z(\lambda s))\right| ds \leq \\ \leq \int_{x_0}^t L_1 \left(|y(s) - z(s)| + |y(\lambda s) - z(\lambda s)|\right) ds \leq \\ \leq 2L_1 \cdot |t - x_0| \cdot \|y - z\| \leq 2L_1 \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\| \end{gathered}$$

Trecând la normă şi în membrul stâng al inegalităţii, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq 2L_1 \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

care în baza ipotezei (v) demonstrează că F este operator neexpansiv şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder 1.1.30, F are cel puţin un punct fix în C_L. Deci punctele fixe ale operatorului F sunt soluţii pentru problema (2.1.2) cu condiţia iniţială (2.1.3) □

Observaţia 2.1.2. Deşi soluţia problemei (2.1.2)+(2.1.3) nu este unică, aceasta poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$y_{n+1}(t) = (1 - \mu) y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^t f(s, y_n(s), y_n(\lambda s)) ds,\ t \in [a, b], n \geq 1$$

unde $\mu \in (0, 1)$ şi $y_1 \in C_L$ arbitrar ales.

Demonstraţie: Dacă operatorul T este neexpansiv, atunci are puncte fixe în C_L. Fie $p \in F_T$.

$$y_{n+1} - p = (1 - \mu)(y_n - p) + \mu(Ty_n - p),$$

de unde

$$\|y_{n+1} - p\| \leq (1 - \mu) \|y_n - p\| + \mu \|Ty_n - p\|$$

Pe baxa teoremei 1.1.36 şi a teoremei 1.1.37 avem că:

$$\|y_{n+1} - p\| \leq \|y_n - p\|$$

ceea ce conduce la faptul că şirul $\{y_n\}$ converge tare către p. □

Un exemplu care ilustrează că Teorema 2.1.42 nu se aplică, însă Teorema 2.1.44 se aplică este următorul exemplu.

Exemplul 2.1.1. Considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{1}{2} + y(y(x)) + y(\lambda x) \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.1.8}$$

unde $x \in [0,1], y \in C^1([0,1],[0,1])$, $\lambda \in (0,1)$.

Vom arăta că problema (2.1.8) are soluţii în mulţimea

$$C_1 = \{y \in C([0,1],[0,1]) : |y(t_1) - y(t_2)| \le |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0,1]\},$$

ceea ce înseamnă că $L = 1$. Avem

$$a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{2} \text{ şi } c_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{1}{2}.$$

Funcţia $f(x,u,v) = -\frac{1}{2} + u + v$ este Lipschitziană în sensul ipotezei (ii) din teorema 2.1.44, cu constanta Lipschitz $L_1 = 1$.

În acest caz condiţia (v) din Teorema 2.1.44 este $2 \cdot L_1 \cdot c_{x_0} = 1$, deci Teorema 2.1.42 nu se poate aplica, dar este aplicabilă Teorema 2.1.44.

Pornind de la ecuaţia diferenţială cu argument modificat (2.1.2) printr-o modificare a argumentului $g(x) = \lambda x$ în $g(x) = y(x)$ obţinem ecuaţia diferenţială

$$y'(x) = f(x, y(x), y(y(x))) \tag{2.1.9}$$

cu condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.1.10}$$

unde $x_0, y_0 \in [a,b]$, $f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b])$ date.

Are loc următorul rezultat referitor la existenţa soluţiei problemei (2.1.9)+(2.1.10) în C_L.

Teorema 2.1.45. (**M. Lauran**, [**115**]) *Dacă*

(i) $f \in C([a,b] \times [a,b] \times [a,b])$

(ii) există $L_1 > 0$ *astfel încât* $|f(s,u_1,v_1) - f(s,u_2,v_2)| \le L_1(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$, *pentru orice* $s, u_i, v_i \in [a,b], i = 1,2$

(iii) dacă L *este constanta definită în relaţia (2.1.7) atunci*

$$M = \max\{|f(s,u,v)| : (s,u,v) \in [a,b] \times [a,b] \times [a,b]\} \le L$$

(iv) una din condiţii are loc:

a) $M \cdot c_{x_0} \le c_{y_0}$

b) $x_0 = a, M(b-a) \le b - y_0, f(s,u,v) \ge 0, \ \forall s,u,v \in [a,b]$

c) $x_0 = b, M(b-a) \le y_0 - a, f(s,u,v) \ge 0, \ \forall s,u,v \in [a,b]$

(v) $L_1(2 + L) \cdot c_{x_0} \le 1$.

Atunci problema (2.1.9) cu condiţia iniţială (2.1.10) are cel puţin o soluţie în C_L.

Demonstraţie: Definim operatorul $F : C_L \to C[a,b]$, prin

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s)))ds, \quad t \in [a,b].$$

Arătăm că $Fy \in C_L$ pentru orice $y \in C_L$

$$|(Fy)(t)| \le |y_0| + \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s)))ds \right| \le |y_0| + M \cdot |t - x_0| \le b$$

$$\begin{gathered} |(Fy)(t)| \ge |y_0| - \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s)))ds \right| \ge |y_0| - M \cdot |t - x_0| \ge \\ \ge |y_0| - M \cdot c_{x_0} \ge y_0 - c_{y_0} \ge a \end{gathered}$$

Deci $(Fy)(t) \in [a,b]$, pentru orice $y \in C_L$.
Pentru orice $t_1, t_2 \in [a,b]$ avem:

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| \le \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y(y(s)))ds \right| \le M \cdot |t_1 - t_2| \le L \cdot |t_1 - t_2|$$

Deci $Fy \in C_L, \forall y \in C_L$. Acelaşi rezultat este obţinut şi în cazul b) sau c). Arătăm că F este operator neexpansiv

$$\begin{gathered} |(Fy)(t) - (Fz)(t)| \le \int_{x_0}^{t} |f(s, y(s), y(y(s))) - f(s, z(s), z(z(s)))| \, ds \le \\ \le L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - z(z(s))|) \, ds \le \\ \le L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - y(z(s))| + |y(z(s)) - z(z(s))|) \, ds \le \\ \le L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + L \cdot |y(s) - z(s)| + |y(z(s)) - z(z(s))|) \, ds \end{gathered}$$

Trecând la maximum în inegalitate avem că

$$\|Fy - Fz\| \le L_1(2 + L) \cdot |t - x_0| \cdot \|y - z\| \le L_1(2 + L) \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

În baza ipotezei (v) obţinem că F este operator neexpansiv şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder 1.1.30, F are cel puţin un punct fix în C_L care este soluţie a problemei (2.1.9)+(2.1.10). $\square$

Observaţia 2.1.3. În mod similar problemei (2.1.2)+(2.1.3), soluţia problemei (2.1.9)+(2.1.10) poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij astfel:

$$y_{n+1}(t) = (1 - \mu)\, y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(s), y_n(y_n(s)))ds,$$

$t \in [a,b], \; n \ge 1, \; \mu \in (0,1)$ pornind de la $y_1 \in C_L$ arbitrar ales.

Un exemplu care să ilustreze aplicabilitatea Teoremei 2.1.45 este următorul.

Exemplul 2.1.2. Considerăm problema

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot y(x) + \frac{1}{2} y(y(x)) \\ y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{array} \right. \tag{2.1.11}$$

unde $x \in [0,1], y \in C^1([0,1],[0,1])$.

Arătăm că problema (2.1.11) are soluţii în mulţimea

$$C_1 = \{y \in C\left([0,1],[0,1]\right) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq |t_1 - t_2|\,, \forall t_1, t_2 \in [0,1]\}$$

Avem

$$L = 1, a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{3}\text{şi} c_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{2}{3}.$$

Funcţia $f(x,u,v) = -\frac{1}{3} + \frac{u+v}{2}$ este Lipschitziană în sensul ipotezei (ii), cu constanta Lipschitz $L_1 = \frac{1}{2}$.

În condiţiile date, avem că $L_1(2+L)\cdot c_{x_0} = 1$, deci Teorema 2.1.42 nu se poate aplica, dar se aplică Teorema 2.1.45. Se poate observa că $y(x) = \frac{1}{3}, x \in [0,1]$ este o soluţie pentru problema (2.1.11).

Fie ecuaţia diferenţială cu argument modificat de tip iterativ

(2.1.12) $$y'(x) = f(x, y(x), y(y(x)), y(\lambda x)), \quad \lambda \in (0,1)$$

cu condiţia iniţială

(2.1.13) $$y(x_0) = y_0$$

Următorul rezultat este o teoremă de existenţă a problemei (2.1.12)+(2.1.13) în C_L.

Teorema 2.1.46. (**M. Lauran**, [**115**]) *Dacă*
(i) $f \in C\left([a,b]\times[a,b]\times[a,b]\times[a,b]\right)$
(ii) există $L_1 > 0$ *astfel încât*

$$|f(s,u_1,v_1,w_1) - f(s,u_2,v_2,w_2)| \leq L_1(|u_1-u_2| + |v_1-v_2| + |w_1-w_2|),$$
$$\forall s, u_i, v_i, w_i \in [a,b], i = 1,2$$

(iii) dacă L *este constanta definită în relaţia (2.1.7) atunci*

$$M = \max\{|f(s,u,v,w)| : (s,u,v,w) \in [a,b]\times[a,b]\times[a,b]\times[a,b]\} \leq L$$

(iv) una din condiţii are loc:
a) $M \cdot c_{x_0} \leq c_{y_0}$
b) $x_0 = a, M(b-a) \leq b - y_0, f(s,u,v,w) \geq 0,\ \forall s,u,v,w \in [a,b]$
c) $x_0 = b, M(b-a) \leq y_0 - b, f(s,u,v,w) \geq 0,\ \forall s,u,v,w \in [a,b]$.
(v) $L_1(3+L)\cdot c_{x_0} \leq 1$
Atunci problema cu condiţii iniţiale (2.1.12)+(2.1.13) are cel puţin o soluţie în C_L.

Demonstraţie: Definim operatorul $F : C_L \to C[a,b]$,

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s), y(\lambda s))ds, \quad t \in [a,b], y \in C_L$$

Arătăm că $Fy \in C_L$ pentru orice $y \in C_L$

$$|(Fy)(t)| \leq |y_0| + \left|\int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s))y(\lambda s))ds\right| \leq |y_0| - M\cdot|t - x_0| \leq b$$

$$|(Fy)(t)| \geq |y_0| - \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(y(s)), y(\lambda s)) ds \right| \geq |y_0| - M \cdot |t - x_0| \geq$$
$$\geq |y_0| - M \cdot c_{x_0} \geq a$$

Ceea ce înseamnă că $(Fy)(t) \in [a, b], \forall y \in C_L$.

Pentru orice $t_1, t_2 \in [a, b]$ avem:

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y(y(s)), y(\lambda s)) ds \right| \leq M \cdot |t - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

ceea ce conduce la faptul că $Fy \in C_L, \forall y \in C_L$. Analog se tratează cazurile b) şi c). Arătăm că F este operator neexpansiv.

$$|(Fy)(t) - (Fz)(t)| \leq \int_{x_0}^{t} |f(s, y(s), y(y(s)), y(\lambda s)) - f(s, z(s), z(z(s)), z(\lambda s))| \, ds \leq$$
$$\leq L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - z(z(s))| + |y(\lambda s) - z(\lambda s)|) \, ds \leq$$
$$\leq L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - y(z(s))| + |y(z(s)) - z(z(s))| + |y(\lambda s) - z(\lambda s)|) \, ds \leq$$
$$\leq L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + L \cdot |y(s) - z(s)| + |y(z(s)) - z(z(s))| +$$
$$+ |y(\lambda s) - z(\lambda s)|) ds \leq L_1(3 + L) \cdot |t - x_0| \cdot \|y - z\| \leq L_1(3 + L) \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

Trecând la normă în întreaga inegalitate obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq L_1(3 + L) \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

Din ipoteza (v) obţinem că F este operator neexpansiv, iar conform teoremei de punct fix a lui Schauder 1.1.30, F are cel puţin un punct fix în C_L care este soluţie a problemei (2.1.12)+(2.1.13) □

Observaţia 2.1.4. În condiţiile de mai sus, şirul aproximaţiilor succesive dat de iteraţia Krasnoselskij

$$y_{n+1}(t) = (1 - \mu) y_n(t) + \mu \cdot y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(s), y_n(y_n(s)), y_n(\lambda s)) ds, \ t \in [a, b],$$

$n \geq 1$, $\mu \in (0, 1)$, converge oricare ar fi $y_1 \in C_L$ şi limita sa este un punct fix al operatorului neexpansiv F, punct fix ce depinde de y_1.

Exemplul 2.1.3. Considerăm ecuaţia diferenţială cu argument modificat de tip iterativ

$$\left\{ \begin{array}{c} y'(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y(x) + \frac{1}{2}y(y(x)) + \frac{1}{2}y(\frac{x}{2}) \\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \tag{2.1.14}$$

unde $x \in [0, 1], y \in C^1([0, 1], [0, 1])$ şi $\lambda = \frac{1}{2}$.

Arătăm că problema (2.1.14) are soluţii în mulţimea

$$C_1 = \{y \in C([0, 1], [0, 1]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0, 1]\}$$

Avem $L = 1, a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{2}$ şi $c_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{1}{2}$.
Funcţia $f(x, u, v, w) = -\frac{1}{3} + \frac{u+v+w}{2}$ este Lipschitziană în sensul dat de condiţia (ii) cu constanta Lipschitz $L_1 = \frac{1}{2}$.

În condiţiile date avem că $L_1(3+L)\cdot c_{x_0}=1$, aşadar Teorema 2.1.42 nu se poate aplica, dar se aplică Teorema 2.1.46.

1.1. Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu argument modificat de tip iterativ

În nenumărate lucrări, precum [**19**], [**15**], [**25**], [**56**], [**54**], [**179**], [**197**], [**115**] găsim probleme cu valori iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Forma generală a acestor ecuaţii este

$$y'(t)=f(x,y(y(t))).$$

Pornind de la ecuaţia

$$y'(x)=f(x,y(x),y(\lambda x))\quad x\in[a,b] \tag{2.1.15}$$

cu condiţia iniţială

$$y(x_0)=y_0 \qquad\qquad \lambda\in(0,1) \tag{2.1.16}$$

$$x_0,y_0\in[a,b],\;\; a,b\in\mathbb{R},\qquad f\in C([a,b]\times[a,b]\times[a,b])\quad \text{date},$$

vom demonstra folosind tehnica operatorilor neexpansivi, existenţa soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x),y(\lambda_1 x),y(\lambda_2 x))\\ \qquad y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{2.1.17}$$

şi, respectiv,

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x),y(\lambda_1 y(x)),y(\lambda_2 y(x))\\ \qquad\quad y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{2.1.18}$$

unde $x_0,y_0\in[a,b],\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ şi $f\in C([a,b]\times[a,b]\times[a,b]\times[a,b])$ sunt date. Problema (2.1.17) extinde problema (2.1.16). Vom formula rezultatul referitor la existenţa soluţiilor problemei (2.1.17).
Pentru $x\in[a,b]$, notăm $C_x=\max\{x-a,b-x\}$, şi

$$(2.1.7)C_L=\{y\in C([a,b],[a,b]):|y(t_1)-y(t_2)|\le L\cdot|t_1-t_2|\,,\forall t_1,t_2\in[a,b]\},$$

unde $L>0$ este dat.

TEOREMA 2.1.47. (**M. Lauran**, [**117**]) *Presupunem că pentru problema (2.1.17) au loc condiţiile:*
(i) $f\in C([a,b]\times[a,b]\times[a,b]\times[a,b])$;
(ii) există $L_1>0$ *astfel încât*
$|f(s,u_1,v_1,w_1)-f(s,u_2,v_2,w_2)|\le L_1(|u_1-v_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|)$ *pentru orice* $s,u_i,v_i,w_i\in[a,b]$, $i=1,2$;

(iii) dacă L este constanta Lipschitz definită în (2.1.7), atunci

$$M = \max\{|f(s,u,v,w)| : (s,u,v,w) \in [a,b]\} \leq L$$

(iv) are loc una din condiţiile:

a) $M \cdot C_{x_0} \leq C_{y_0}$;

b) $x_0 = 0,\ M(b-a) \leq b - y_0, f(s,u,v,w) \geq 0,\ \forall s,u,v,w \in [a,b]$;

c) $x_0 = b,\ M(b-a) \leq y_0 - a, f(s,u,v,w) \geq 0,\ \forall s,u,v,w \in [a,b]$.

(v) $3L_1 \cdot C_{x_0} \leq 1$.

Atunci problema (2.1.17) are cel puţin o soluţie în C_L, care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= (1-\mu)y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(s), y_n(\lambda_1 s), y_n(\lambda_2 s))ds, \\ t &\in [a,b], n \geq 1 \end{aligned}$$

unde $\mu \in (0,1)$ şi $y_1 \in C_L$ este arbitrar.

Demonstraţie: Ca o consecinţă a teoremei Arzela-Ascoli 1.1.28 sau din [[**25**], Lemma 1], C_L este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a,b], \|\cdot\|)$ unde $\|\cdot\| = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Considerăm operatorul integral $F : C_L \to C[a,b]$ definit prin

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 s), y(\lambda_2 s))ds, \quad t \in [a,b].$$

Orice punct fix a ecuaţiei $y = Fy$ este soluţie a problemei (2.1.17).

Demonstrăm că C_L este mulţime invariantă în raport cu F, adică, $F(C_L) \subset C_L$. Dacă condiţia (a) are loc, atunci pentru orice $y \in C_L$ şi $t \in [a,b]$ avem

$$|(Fy)(t)| \leq |y_0| + \left|\int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 s), y(\lambda_2 s))ds\right| \leq |y_0| + M \cdot |x_0 - t| \leq b$$

$$\begin{aligned} |(Fy)(t)| &\geq |y_0| - \left|\int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 s), y(\lambda_2 s))ds\right| \geq |y_0| - M \cdot |x_0 - t| \geq \\ &\geq |y_0| - M \cdot C_{x_0} \geq |y_0| - C_{y_0} \geq a \end{aligned}$$

Deci, $(Fy)(t) \in [a,b]$ pentru orice $y \in C_L$.

Pentru orice $t_1, t_2 \in [a,b]$ avem

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| \leq$$

$$\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y(\lambda_1 s), y(\lambda_2 s))ds\right| \leq M \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

În acest caz, $F_y \in C_L$ pentru orice $y \in C_L$. În mod similar se tratează cazurile (b) şi (c). Deci am obţinut că $F : C_L \to C_L$.

Demonstrăm că F este operator neexpansiv. Fie $y, z \in C_L$ şi $t \in [a,b]$.

Atunci

$$|(Fy)(t) - (Fz)(t)| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 s), y(\lambda_2 s)) - f(s, z(s), z(\lambda_1 s), z(\lambda_2 s)) \right| ds \leq$$
$$\leq \int_{x_0}^{t} L_1(|y(s) - z(s)| + |y(\lambda_1 s) - z(\lambda_1 s)| + |y(\lambda_2 s) - z(\lambda_2 s)|) ds \leq$$
$$\leq 3 \cdot L_1 \cdot C_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

Trecând la normă, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq 3L_1 \cdot C_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

care în baza condţiei (v), demonstreză că F operator neexpansiv, deci continuu. Aplicând teorema de punct fix a lui Browder-Ghode-Kirk 1.1.29 obţinem prima parte a concluziei, iar Corolarul 1.1.38 sau Corolarul 1.1.39 ne asigură a doua parte a concluziei. $\square$

Aplicând aceeaşi tehnică pentru ecuaţia diferenţială de ordin întâi extra-iterativă

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda_1 y(x)), y(\lambda_2 y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1.18}$$

$x_0, y_0 \in [a, b], \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ şi $f \in C([a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [a, b])$ sunt date, obţinem următorul rezult privind existenţa soluţiilor problemei (2.1.18) în C_L.

TEOREMA 2.1.48. (**M. Lauran**, [**117**]) *Presupunem că*

(i) $f \in C([a, b] \times [a, b] \times [a, b] \times [a, b])$;

(ii) există $L_1 > 0$ *astfel încât*

(**)$|f(s, u_1, v_1, w_1) - f(s, u_2, v_2, w_2)| \leq L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|)$, *pentru orice* $s, u_i, v_i, w_i \in [a, b]$, $i = 1, 2$;

(iii) dacă L *este constanta Lipschitz considerată în (2.1.7), atunci*

$$M = \max\{|f(s, u, v, w)| : (s, u, v, w) \in [a, b]\} \leq L;$$

(iv) are loc una din condiţiile:

a) $M \cdot C_{x_0} \leq C_{y_0}$;

b) $x_0 = a,\ M(b - a) \leq b - y_0, f(s, u, v, w) \geq 0,\ \forall s, u, v, w \in [a, b]$;

c) $x_0 = b,\ M(b - a) \leq y_0 - a, f(s, u, v, w) \geq 0,\ \forall s, u, vw \in [a, b]$.

(v) $L_1 \cdot [1 + L(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot C_{x_0} \leq 1$.

Atunci problema (2.1.18) are cel puţin o soluţie în C_L*, care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij*

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= (1 - \mu) \cdot y_n(t) + \mu \cdot y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(s), y_n(\lambda_1 y_n(s)), y_n(\lambda_2 y_n(s))) ds, \\ t &\in [a, b], n \geq 1 \end{aligned}$$

unde $\mu \in (0,1)$ *şi* $y_1 \in C_L$ *este arbitrar ales.*

Demonstraţie: Considerăm operatorul integral $F : C_L \to C[a,b]$, definit prin

$$(Fy)(t) = y_0 + \int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 y(s)), y(\lambda_2 y(s)))ds, \quad t \in [a,b]$$

În acelaşi mod ca în teorema 2.1.47 demonstrăm că C_L este mulţime invariantă în raport cu F, ceea ce înseamnă că $F(C_L) \subset C_L$.

$$|(Fy)(t)| \le |y_0| + \left|\int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 y(s)), y(\lambda_2 y(s)))ds\right| \le |y_0| + M \cdot |t - x_0| \le b$$

$$\begin{aligned} |(Fy)(t)| &\ge |y_0| - \left|\int_{x_0}^{t} f(s, y(s), y(\lambda_1 y(s)), y(\lambda_2 y(s)))ds\right| \ge |y_0| - M \cdot |t - x_0| \ge \\ &\ge |y_0| - M \cdot C_{x_0} \ge y_0 - C_{y_0} \ge a \end{aligned}$$

Deci, $Fy \in [a,b]$ pentru orice $y \in C_L$. Pentru orice $t_1, t_2 \in [a,b]$ avem:

$$\begin{aligned} |(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| &\le \left|\int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), y(\lambda_1 y(s)), y(\lambda_2 y(s)))ds\right| \\ &\le M \cdot |t_1 - t_2| \le L \cdot |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

Deci, $Fy \in C_L$ oricare ar fi $y \in C_{L.}$. În mod similar tratăm cazurile (b) şi (c).

Considerăm $y, z \in C_L$ şi $t \in [a,b]$ pentru a demonstra că F este operator neexpansiv.

$$\begin{gathered} |(Fy)(t) - (Fz)(t)| \le \\ \textstyle\int_{x_0}^{t} |f(s, y(s), y(\lambda_1 y(s), y(\lambda_2 y(s))) - f(s, z(s), z(\lambda_1 z(s)), z(\lambda_2 z(s)))|\, ds \le \\ \le \textstyle\int_{x_0}^{t} L_1(|y(s) - z(s)| + |y(\lambda_1 y(s)) - z(\lambda_1 z(s))| + |y(\lambda_2 y(s)) - z(\lambda_2 z(s))|)ds \le \\ \le L_1 \textstyle\int_{x_0}^{t}(|y(s) - z(s)| + |\lambda_1| \cdot L \cdot |y(s) - z(s)| + |\lambda_2| \cdot L \cdot |y(s) - z(s)|)ds \le \\ L_1 \cdot [1 + L(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot |t - x_0| \cdot \|y - z\| \le [1 + L(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot C_{x_0} \cdot \|y - z\| \end{gathered}$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \le L_1 \cdot [1 + L(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot C_{x_0} \cdot \|y - z\|$$

care în baza conţiei (v), demonstrează faptul că F este operator neexpansiv, deci continuu.

Aplicând teorema de punct fix a lui Browder-Ghöde-Kirk 1.1.29 obţinem prima parte a concluziei, iar Corolarul 1.1.38 sau Corolarul 1.1.39 ne asigură a doua parte a concluziei. □

Exemplul 2.1.4. Considerăm următoarea problemă asociată ecuaţiei diferenţiale extra-iterative

$$\begin{cases} y'(x) = -3y(x) + y(\frac{1}{2}y(x)) + y(\frac{1}{2}y(x)) \\ \qquad\qquad y(\frac{1}{2}) = 1 \end{cases} \tag{2.1.19}$$

unde $x \in [0,1], y \in C^1([0,1],[0,1])$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Vom studia existenţa soluţiilor $y \in C^1([0,1],[0,1])$ în mulţimea

$$C_1 = \{y \in C([0,1],[0,1]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq |t_1 - t_2|\},$$

pentru orice $t_1, t_2 \in [0,1]$ care, în baza notaţiilor Teoremei 2.1.48, înseamnă că $L = 1$. Avem

$$a = 0, b = 1, x_0 = \frac{1}{2} \text{ ceea ce înseamnă că } C_{x_0} = \max\{x_0 - a, b - x_0\} = \frac{1}{2}.$$

Funcţia $f(x,u,v,w) = -3 + u + v + w$ este Lipschitziană în sensul dat de relaţia (**) în raport cu u, v şi w, cu constanta Lipschitz $L_1 = 1$. Ceea ce ne conduce la faptul că $L_1 [1 + L(\lambda_1 + \lambda_2)] \cdot C_{x_0} = 1$, deci condiţia (v) din Teorema 2.1.48 este satisfăcută. În plus, $y(x) = 1, x \in [0,1]$ este soluţie a problemei (2.1.19). Din Teorema 2.1.48 rezultă că problema (2.1.19) are cel puţin o soluţie în C_1 care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskji,

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= (1-\mu) \cdot y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} \left[-3 + y_n(s) + 2 \cdot y_n(\frac{1}{2} y_n(s))\right] ds, \\ t &\in [0,1], n \geq 1 \end{aligned}$$

unde $\mu \in (0,1)$ şi $y_1 \in C_1$ este arbitrar ales.

Caz particular

Dacă $f(t,u,v,w) = f(t,u,v)$, regăsim ecuaţia diferenţială studiată în [**115**].

2. Tehnica operatorilor neexpansivi pentru ecuaţii diferenţiale fracţionare

Existenţa şi unicitatea soluţiilor problemelor bilocale pentru ecuaţii diferenţiale de ordin fracţional cu derivate fracţionale de tip Caputo au fost studiate în ultimii ani în lucrări precum [**13**], [**16**], [**15**], [**17**], [**12**], [**38**], [**40**], [**84**], [**142**], [**152**], [**153**], [**154**]. Ecuaţiile diferenţiale de ordin fractional s-au dovedit recent că sunt instrumente valoroase în modelarea mai multor fenomene din diferite domenii ale ştiinţei şi ingineriei. Într-adevăr putem găsi numeroase aplicaţii în vâscoelasticitate, electrochimie, probleme de control, electromagnetism, etc., aşa cum se regăsesc în lucrări precum: [**41**], [**60**], [**62**], [**73**], [**120**], [**125**], [**142**], [**152**]. A fost un progres semnificativ în studiul ecuaţiilor diferenţiale fracţionale şi a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale din ultimii ani, aşa cum apare în monografia lui Kilbas et al. [**84**], Miller şi Ross [**128**] şi în articolele următorilor autori Delbosco şi Rodino [**38**], Diethelm et al. [**41**], [**40**], [**42**], El-Sayed [**57**], [**58**], [**59**], Kilbas şi Marzan [**83**], Mainardi [**120**], Momani şi Hadid [**130**], Momani et al [**131**], Yu şi Gao [**200**] şi Zhang [**203**]. Foarte recent, câteva teoreme de bază pentru problema bilocală a ecuaţiilor diferenţiale de ordin fracţional cu derivate fracţionale care implică operatorul diferenţial Riemann-Liouville de ordin $0 < \alpha \leq 1$

au fost aduse în discuţie de către Lakshmikantham şi Vatsala [**102**], [**101**], [**103**]. În o serie de lucrări ([**13**], [**12**], [**17**]) autorii consideră anumite clase de probleme bilocale ce implică derivate fracţionale de tip Caputo sau Riemann-Liouville de ordin $0 < \alpha \leq 1$, care apar în aplicaţii cu condiţii iniţiale fizice ce conţin $y(0), y'(0), ...$ etc.
În acest paragraf vom studia existenţa soluţiilor problemelor bilocale pentru ecuaţii diferenţiale de ordin fracţional cu condiţii integrale neliniare de forma:

(1) ${}^cD^\alpha y(t) = f(t, y)$, pentru orice $t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha \leq 2$;

(2) $y(0) = \int_0^T g(s, y)ds$;

(3) $y(T) = \int_0^T h(s, y)ds$,

unde ${}^cD^\alpha$ este derivata de ordin fracţional de tip Caputo şi $f, g, h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue date.

Ecuaţiile diferenţiale de ordin fracţional au prezentat un interes considerabil în ultimii ani, atât în diferite domenii din inginerie cât şi matematică şi aplicaţiile ei. Numeroase aplicaţii din vâscoelasticitate, electrochimie, electromagnetism, etc pot fi găsite în lucrări precum [**94**],[**60**], [**62**].

Folosind tehnica operatorilor de tip Picard în [**16**] a fost stabilit următorul rezultat privind existenţa soluţiilor problemei cu condiţii iniţiale (1)-(3):

TEOREMA 2.2.49. ([**16**]) *Presupunem că:*
(H_1) Există constanta $k > 0$ astfel încât

$$|f(t, u) - f(t, \overline{u})| \leq k \cdot |u - \overline{u}|\,,\ \forall\ t \in [0, T],\ u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_2) Există constanta $k^* > 0$ astfel încât

$$|g(t, u) - g(t, \overline{u})| \leq k^* \cdot |u - \overline{u}|\,,\ \forall\ t \in [0, T],\ u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_3) Există constanta $k^{**} > 0$ astfel încât

$$|h(t, u) - h(t, \overline{u})| \leq k^{**} \cdot |u - \overline{u}|\,,\ \forall\ t \in [0, T],\ u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_4) Dacă

$$\frac{2kT}{\Gamma(\alpha + 1)} + T(k^* + k^{**}) < 1$$

atunci problema cu condiţii iniţiale (1)-(3) are cel puţin o soluţie în $[0, T]$.

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe principiul contracţiei a lui Banach 1.1.2. Pornind de la acest rezultat, ne-am propus obţinerea unui rezultat mai general, folosind tehnica operatorilor neexpansivi ca în lucrarea [**19**] faţă de teorema de punct fix a lui Banach folosită în [**16**].
Aceeaşi tehnică a fost folosita în lucrări precum [**19**], [**62**]. Problemele cu condiţii iniţiale integrale constituie o clasă interesantă şi importantă de probleme deoarece condiţiile integrale iniţiale apar în probleme de dinamica populaţiei şi sisteme celulare

[**60**], [**62**].

Reamintim câteva din notaţiile uzuale pe care le-am definit şi în capitolul 1. Prin $C(J, \mathbb{R})$ vom nota spaţiul Banach al tuturor funcţiilor continue pe J cu valori în $\mathbb{R}$ cu norma:

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : t \in J\}.$$

Definiţia 2.2.1. ([**16**]) Integrala de ordin fracţional a funcţiei $h \in L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$ de ordin $\alpha \in \mathbb{R}_+$ este definită prin:

$$I_a^\alpha h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot h(s)ds, \tag{2.2.1}$$

unde Γ este funcţia Gama şi $L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$ este spaţiul funcţiilor integrabile $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$. Pentru $a = 0$, putem scrie $I^\alpha h(t) = [h * \varphi_\alpha](t)$ unde $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pentru $t > 0$ şi $\varphi_\alpha(t) = 0$ pentru $t \leq 0$.

Definiţia 2.2.2. ([**16**]) Pentru o funcţie h dată în intervalul $[a,b]$, derivata fracţională Riemann-Liouville de ordin α a funcţiei este definită prin:

$$\left(D_{a_+}^\alpha h\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s)ds. \tag{2.2.2}$$

Aici $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ reprezintă partea întreagă a lui α.

Definiţia 2.2.3. ([**16**]) Pentru o funcţie h dată în intervalul $[a,b]$, *derivata fracţionala Caputo* de ordin α a funcţiei este definită prin:

$$\left({}^c D_{a_+}^\alpha h\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \cdot h^{(n)}(s)ds. \tag{2.2.3}$$

unde $n = [\alpha] + 1$.

Observaţia 2.2.1. Pentru $\alpha = 0 \Rightarrow n = 1$ obţinem derivata fracţională Caputo de ordin 0 de forma:

$$\left({}^c D_{a_+}^0 h\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt}\right) \int_a^t h'(s)ds.$$

Definiţia 2.2.4. ([**18**]) Fie K o submulţime nevidă a unui spaţiu real liniar normat E şi aplicaţia $T : K \to K$. Un punct $x \in K$ se numeşte punct fix a lui T dacă $Tx = x$. În aceste condiţii, T este neexpansiv dacă

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \text{ pentru orice } x, y \in K.$$

Aplicaţiile neexpansive, deşi sunt generalizări ale contracţiilor nu posedă mai multe proprietăţi faţă de aplicaţiile contractive.

2.1. Existenţa soluţiilor problemei cu condiţii iniţiale integrale

Prin soluţie a problemei cu condiţii iniţiale integrale (1)-(3) înţelegem funcţia $y \in C^2(J, \mathbb{R})$ care satisface ecuaţiile (1)-(3).

Pentru existenţa soluţiilor problemei (1)-(3), avem nevoie de următoarea lemă auxiliară:

LEMA 2.2.50. ([**16**]) *Fie* $\alpha > 0$, *atunci*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_{n-1}t^{n-1}$$

pentru anumiţi $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Ca o consecinţă a lemei anterioare, Benchohra M. şi Hamani S. în [**16**] au obţinut următorul rezultat.

LEMA 2.2.51. ([**16**]) *Fie* $1 < \alpha \leq 2$ *şi* $\sigma, \rho_1, \rho_2 : J \to \mathbb{R}$ *funcţii continue. O funcţie* y *este soluţie a ecuaţiei integrale fractionale*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sigma(s)ds - \frac{t}{T \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sigma(s)ds -$$

$$- \left(\frac{t}{T} - 1\right) \int_0^T \rho_1(s)ds + \frac{t}{T} \int_0^T \rho_2(s)ds \tag{2.1.4}$$

dacă şi numai dacă y *este soluţie a următoarei probleme fracţionale cu condiţii iniţiale integrale*

$$^cD^{\alpha}y(t) = \sigma(t), \;\; t \in J \tag{2.1.5}$$

$$y(0) = \int_0^T \rho_1(s)ds \tag{2.1.6}$$

$$y(T) = \int_0^T \rho_2(s)ds \tag{2.1.7}$$

Următorul rezultat, stabilit în [**16**], se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach 1.1.2.

TEOREMA 2.2.52. ([**16**]) *Presupunem că*

(H_1) Există o constantă $k > 0$ *astfel încât*

$$|f(t,u) - f(t,\overline{u})| \leq k \cdot |u - \overline{u}|, \; \forall \; t \in [0,T], \; u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_2) Există o constantă $k^* > 0$ *astfel încât*

$$|g(t,u) - g(t,\overline{u})| \leq k^* \cdot |u - \overline{u}|, \; \forall \; t \in [0,T], \; u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_3) Există o constantă $k^{**} > 0$ *astfel încât*

$$|h(t,u) - h(t,\overline{u})| \leq k^{**} \cdot |u - \overline{u}|, \; \forall \; t \in [0,T], \; u, \overline{u} \in \mathbb{R}.$$

(H_4) Dacă

$$\frac{2kT}{\Gamma(\alpha+1)}+T(k^*+k^{**})<1$$

atunci problema cu condiţii integrale (1)-(3) are cel puţin o soluţie în $[0,T]$.

Pornind de la teorema anterioară, ne propunem să dăm un rezultat mai general, folosind tehnica operatorilor neexpansivi în locul teoremei de punct fix a lui Banach 1.1.2.

Pentru o constantă $L>0$, vom nota mulţimea

$$C_L=\{y\in C(J,J):|y(t_1)-y(t_2)|\leq L\cdot|t_1-t_2|,\forall t_1,t_2\in J\}$$

În baza Lemei 1 din [**25**] sau totodată ca o consecinţă a teoremei Arzelá-Ascoli 1.1.28, mulţimea C_L este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a,b],\|\cdot\|)$, unde $\|\cdot\|$ este norma Cebîsev (norma supremum). Existenţa soluţiilor problemei cu condiţii integrale (1)-(3) este dată de următorul rezultat.

Teorema 2.2.53. (**M. Lauran**, [**118**]) *Presupunem că pentru problema (1)-(3), ipotezele* $(H_1)-(H_3)$ *sunt satisfăcute şi:*
(H_4') $f,g,h\in C(J,J)$;
(H_5) Fie

$$\begin{aligned}M&=\max\{|f(t,u)|:(t,u)\in J\times J\}\leq L,\\N&=\max\{|g(t,u)|:(t,u)\in J\times J\}\leq L,\\Q&=\max\{|h(t,u)|:(t,u)\in J\times J\}\leq L\end{aligned}$$

(H_6) $\dfrac{M\cdot T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+N+Q\leq L$;
(H_7) $\dfrac{2\cdot T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+1\leq\dfrac{1}{L}$;
(H_8) $\dfrac{2\cdot k\cdot T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+T(k^*+k^{**})\leq 1$.
Atunci există cel puţin o soluţie $y^*\in C_L$ *a problemei (1)-(3).*

Demonstraţie: Vom considera operatorul integral $F:C_L\to C(J,\mathbb{R})$ definit prin

$$\begin{aligned}(Fy)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\cdot f(s,y(s))ds-\\-\frac{t}{T\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\\-\left(\frac{t}{T}-1\right)\int_0^T g(s,y(s))ds+\frac{t}{T}\int_0^T h(s,y(s))ds\end{aligned}$$

Este evident că $y\in C_L$ este soluţie a problemei (1)-(3) dacă şi numai dacă y este punct fix a operatorului F, ceea ce însemnă că $y=Fy$.

Vom demonstra mai întâi că C_L mulţime invariantă în raport cu F, adică, să avem $F(C_L) \subset C_L$.

$$\begin{gathered}0 \leq |(Fy)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |t-s|^{\alpha-1} \cdot |f(s, y(s))|\, ds + \\ + \frac{t}{T \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^T |T-s|^{\alpha-1} |f(s, y(s))|\, ds + \\ + \left(\frac{t}{T}-1\right) \int_0^T |g(s, y(s))|\, ds + \frac{t}{T} \int_0^T |h(s, y(s))|\, ds \leq \\ \leq \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} M \left.\frac{(t-s)^\alpha}{\alpha}\right|_0^t + \frac{tM}{T\Gamma(\alpha)} \cdot (-1) \cdot \left.\frac{(T-s)^\alpha}{\alpha}\right|_0^T + \\ \left(\frac{t}{T}-1\right) NT + \frac{t}{T} QT = \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} + \frac{tMT^\alpha}{T\Gamma(\alpha+1)} + \\ (t-T) \cdot N + t \cdot Q = \tfrac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t^\alpha + t \cdot T^{\alpha-1}) + t(N+Q) - TN \leq \\ \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}(t^\alpha + t \cdot T^{\alpha-1}) + T \cdot L \leq T \cdot L \left(\frac{2T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + 1\right) \leq T\end{gathered}$$

Deci, $Fy \in [0, T]$, pentru orice $y \in C_L$. Pentru $t_1, t_2 \in [0, T]$ avem că

$$\begin{gathered}|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} |f(s, y(s)| \cdot \left[|t_1 - s|^{\alpha-1} + |t_2 - s|^{\alpha-1}\right] ds + \\ + \frac{|t_1 - t_2|}{T\ \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))|\, ds + \frac{|t_1 - t_2|}{T} \int_0^T |g(s, y(s))|\, ds + \\ + \frac{|t_1 - t_2|}{T} \int_0^T |h(s, y(s))|\, ds \leq \frac{|t_1 - t_2| \cdot M}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot T^{\alpha-1} + |t_1 - t_2| \cdot (N+Q) = \\ = \left(\frac{M \cdot T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + N + Q\right) \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|.\end{gathered}$$

Deci, conform ipotezei (H_6) deducem că $Fy \in C_L$, pentru orice $y \in C_L$. Dacă inegalitatea este strict mai mică decât 1 atunci suntem în cazul Teoremei 3.5 din [**16**].

Considerăm $x, y \in C_L$, $t \in [0, T]$

$$\begin{gathered}|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \leq \\ \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \cdot |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\, ds + \\ + \int_0^T |g(s, x(s)) - g(s, y(s))|\, ds + \\ + \int_0^T |h(s, x(s)) - h(s, y(s))|\, ds \leq \frac{t^\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)} |x(s) - y(s)| + \\ + \frac{T^\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)} |x(s) - y(s)| + T(k^* + k^{**}) \cdot |x(s) - y(s)| \leq \\ \leq \left[\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + T(k^* + k^{**})\right] \cdot |x(s) - y(s)|.\end{gathered}$$

Aplicând supremumul în inegalitate, avem

$$\|Fx - Fy\|_\infty \leq \left[\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + T(k^* + k^{**})\right] \cdot \|x - y\|_\infty$$

care, în baza ipotezei (H_8), demonstrează că F operator neexpansiv, şi deci continuu. Aplicând teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30, obţinem concluzia teoremei. □

În baza ipotezelor Teoremei 3.5 din [**16**], se deduce că soluţia y^* problemei (1)-(3) poate fi aproximată cu ajutorul iterţiilor Picard $\{y_n\}$ definite prin $y_1 \in C_L$ şi

$$y_{n+1}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot f(s, y_n(s))ds -$$
$$-\frac{t}{T \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \cdot f(s, y_n(s))ds -$$
$$-\left(\frac{t}{T} - 1\right) \int_0^T g(s, y_n(s))ds + \frac{t}{T} \int_0^T h(s, y_n(s))ds.$$

Dacă condiţia (H_4) a teoremei 2.2.52 este înlocuită cu (H_8) din teorema 2.2.53, atunci putem aproxima soluţia (neunică) a problemei (1)-(3) prin iteraţia Krasnoselski-Mann.

Teorema 2.2.54. (**M. Lauran**, [**118**]) *Presupunem că toate condiţiile teoremei 2.2.53 sunt satisfacute. Atunci, soluţia $y^* \in C_L$ problemei cu condiţii integrale (1)-(3) poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij astfel*

$$y_{n+1}(t) = (1-\lambda)y_n(t) +$$
$$+\lambda \left[\left(\frac{t}{T} - 1\right) \int_0^T g(s, y_n(s))ds + \frac{t}{T} \int_0^T h(s, y_n(s))ds \right] +$$
$$+\lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \cdot f(s, y_n(s))ds - \frac{t}{T \cdot \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s))ds \right]$$

unde $\lambda \in (0,1)$ şi $y_1 \in C_L$ este arbitrar.

Demonstraţie: Aplicând Corolarul 1.1.38 şi Corolarul 1.1.39 obţinem concluzia teoremei. $\square$

2.2. Exemple numerice

Exemplul din această secţiune ilustrează efectiv că rezultatul teoremei 2.2.53 este mai general decât cel al teoremei 2.2.52 (sau Teoremei 3.5 din [**16**]).
Să considerăm următoarea problemă fractională cu condiţii iniţiale integrale:

$$(2.2.8) \qquad {}^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t} \cdot |y(t)|}{(17 + e^t)(1 + |y(t)|)}, \; t \in [0,1], \;\; 1 < \alpha \le 2$$

$$(2.2.9) \qquad y(0) = \int_0^1 \frac{4s^2 \cdot e^{-s}}{8 + e^s} \cdot y(s)ds$$

$$(2.2.10) \qquad y(1) = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^s} \cdot y(s)ds$$

Pentru $x, y \in [0, \infty)$ şi $t \in [0, 1]$ avem:

$$|f(t,x) - f(t,y)| =$$
$$= \frac{e^{-t}}{17+e^t} \cdot \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{e^{-t}}{17+e^t} \cdot |x-y| \leq \frac{1}{18} \cdot |x-y| \, .$$

Condiţia (H_1) a teoremei 2.2.53 are loc pentru $k = \dfrac{1}{18}$

$$|g(t,x) - g(t,y)| = \frac{4t^2 e^{-t}}{8+e^t} \cdot |x-y| \leq \frac{4}{9} \cdot |x-y|$$

$$|h(t,x) - h(t,y)| = \frac{1}{1+e^t} \cdot |x-y| \leq \frac{1}{2} \cdot |x-y|$$

Condiţiile (H_2) şi (H_3) a teoremei 2.2.53 sunt îndeplinite pentru $k^* = \dfrac{4}{9}$ şi $k^{**} = \dfrac{1}{2}$. Vom verifica dacă condiţia (H_8) este îndeplinită pentru $T = 1,\ k^* = \dfrac{4}{9}$ şi $k^{**} = \dfrac{1}{2}$.

Într-adevăr:

$$\frac{2k \cdot T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + T(k^* + k^{**}) = 2 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{17}{18} = 1 \Rightarrow \Gamma(\alpha+1) = 2$$

şi din ipoteza (H_7) obţinem $\Gamma(\alpha+1) \geq 1$, care este satisfăcută pentru $\alpha \in (1, 2]$.

Ipotezele teoremei 2.2.52 (Teorema 3.5 din [**16**]) nu sunt îndeplinite, dar teorema 2.2.53 poate fi aplicată şi problema (2.2.8)-(2.2.10) are cel puţin o soluţie în C_L pentru $L = \dfrac{1}{3}$.

Pornind de la $y_0(t) = e^t$ şi considerând $\lambda = \dfrac{1}{2}$ obţinem prima iteraţie a şirului aproximaţiilor succesive

$$y_1(t) = \frac{1}{2} y_0(t) + \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{t}{T} - 1\right) \int_0^t g(s, y_0(s))ds + \frac{t}{T} \int_0^T h(s, y_0(s))ds +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} - f(s, y_0(s))ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \cdot f(s, y_0(s))ds\Bigg]$$

adică

$$y_1(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{t}{T} - 1\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{t}{8+e^t} + \frac{t^2}{T} \cdot \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{1}{4} I^\alpha (17+e^s)^{-1}(t) +$$
$$+ \frac{1}{4} I^\alpha (1+e^s)^{-1}(t) - \frac{t}{T}\left(-\frac{1}{4} I^\alpha (17+e^s)^{-1}(T) + \frac{1}{4} I^\alpha (1+e^s)^{-1}(T)\right)\Bigg]$$

Aplicând Lema 2.2.50, prima iteraţie $y_1(t)$ pentru $T = 1$ şi $n = 3$ poate fi aproximată printr-un polinom astfel:

$$y_1(t) \approxeq \frac{1}{2} \cdot e^t + \frac{2}{3} \cdot \frac{(t-1)\, t^3}{8 + \mathrm{e}^t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 \mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t} + t^2 - 2\, t + t^3$$

iar reprezentarea grafică a primei iteraţii este dată în Figura 1.

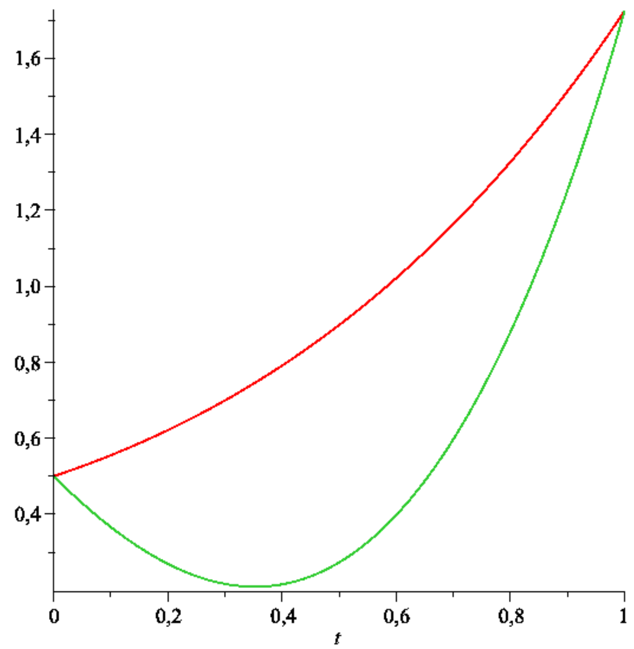

Figura 1. Graficul primei iteraţii cu o aproximare grosieră a integralelor I^α

Prima iteraţie pentru $T = 1$, $n = 3$ şi pentru o mai bună aproximare a integralelor fracţionale de ordin α sub forma $I^\alpha(17+e^s)^{-1}(t)+I^\alpha(1+e^s)^{-1}(t) = \frac{1}{4}\cdot t^2 - \frac{3}{8}\cdot t + \frac{1}{8}\cdot t^3$ poate fi scrisă astfel:

$$y_1(t) \approxeq \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^t + \frac{2}{3}\cdot \frac{(t-1)\,t^3}{8+\mathrm{e}^t} + \frac{1}{2}\cdot \frac{t^2\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} + \frac{1}{4}\cdot t^2 - \frac{3}{8}\cdot \frac{t+1}{8}\cdot t^3$$

iar în Figura 2 este reprezentarea grafică a acestei aproximări, iar în Figura 3 sunt reprezentate primele două aproximă ri ale şirului aproximaţiilor succesive.

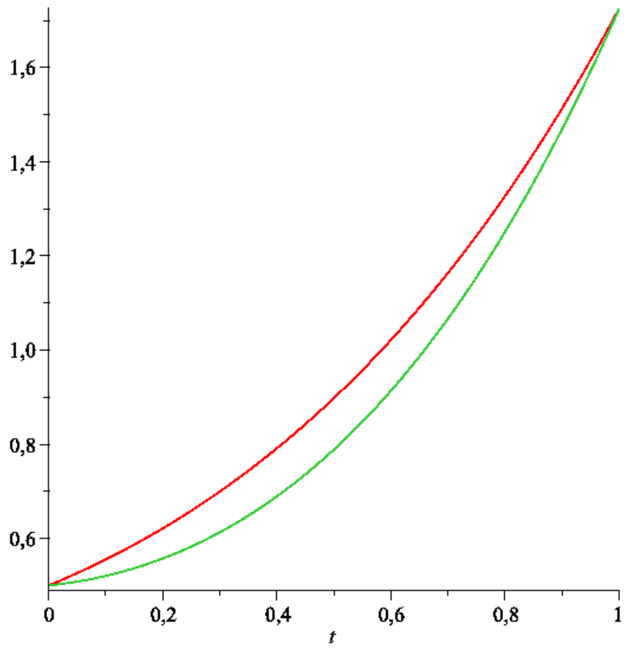

Figura 2. Graficul primei iteraţii

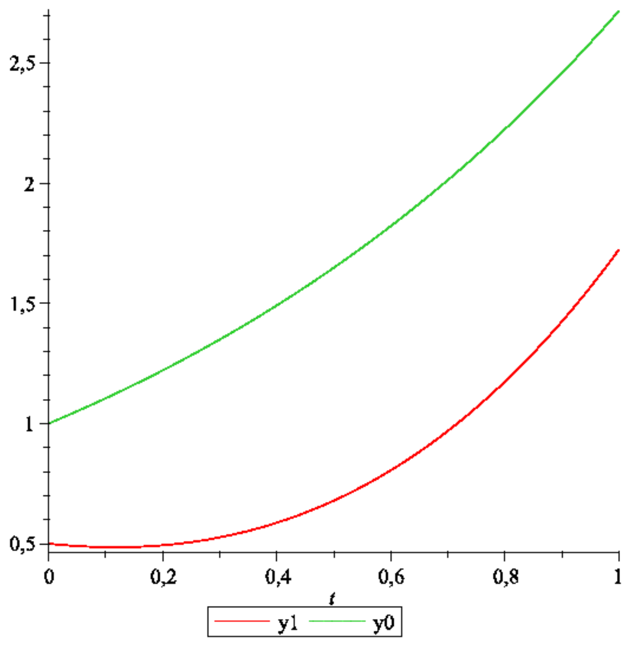

Figura 3. Reprezentarea grafică a lui y_0 şi y_1

CAPITOLUL 3

Rezolvarea ecuaţiilor integrale cu argument modificat folosind tehnica operatorilor neexpansivi

Ecuaţiile integrale cu argument modificat, mai precis existenţa şi/sau unicitatea soluţiilor, au fost studiate atât cu ajutorul principiului contracţiei, cât şi cu ajutorul tehnicii operatorilor neexpansivi.
Dintre tratatele de bază în care au fost studiate ecuaţiile integrale cu ajutorul principiului contracţiei, menţionăm: I.G. Perovskii [**150**], C. Corduneanu [**33**], S. Bernfeld şi V. Lakshmikantham [**20**], Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus şi I.A. Rus [**31**], I.A. Rus [**176**],[**171**],[**168**],[**171**],[**177**], D. Guo şi V. Lakshmikantham [**66**], R.P. Agarwal şi D. O'Regan [**2**], R. Precup [**160**], V. Mureşan [**138**], Sz. András [**5**], M. Dobriţoiu [**49**].
Menţionăm de asemenea câteva dintre articolele în care au fost studiate anumite ecuaţii integrale cu argument modificat folosind principiul contracţiei I.A. Rus [**170**], [**172**], [**173**], [**174**], [**175**], M. Dobriţoiu, I.A. Rus şi M.A. Şerban [**50**], M. Ambro [**3**], M. Dobriţoiu [**47**], [**43**], [**44**],[**45**],[**46**], [**50**], respectiv tehnica operatorilor neexpansivi: R. Precup [**159**], V. Mureşan [**139**], P. Soardi [**189**], M. Lauran [**111**]. Astfel de ecuaţii apar în multe tipuri de probleme şi aplicaţii practice (probleme periodice, ecuaţii funcţional diferenţiale). Pentru mai multe detalii se pot consulta lucrările lui: V. Dârzu [**36**], [**35**], J. Mallet-Paret [**122**], A. Rustichini [**182**], L.S. Schulmann [**186**].
În acest capitol, structurat pe 4 paragrafe, vom utiliza tehnica operatorilor neexpansivi pentru ecuaţii integrale, teorema lui Browder-Ghöde-Kirk, teorema lui Leray-Schauder. Rezultatele obţinute de către autor în acest capitol sunt publicate în lucrările [**113**],[**112**], [**111**], [**118**], [**116**].

În literatura de specialitate prin ecuaţia integrală înţelegem o ecuaţie în care funcţia necunoscută apare sub semnul integralei. Există o strânsă conexiune între ecuaţiile diferenţiale şi ecuaţiile integrale şi foarte multe probleme pot fi formulate în acest fel. În lucrările [**76**], [**82**], [**28**], [**160**], [**80**] autorii studiază existenţa şi unicitatea, proprietăţi ale soluţiilor diferitelor tipuri de ecuaţii integrale cu argument modificat folosind diferite tenhici ca principiul contracţiei [**176**],[**47**],[**51**], funcţionala în sens Lyapunov [**28**], principiul Leray-Schauder [**160**].

Una dintre cele mai cunoscute ecuaţii integrale este ecuaţia Fredholm de speţa I:

$$f(x) = \int_a^b K(x, s, \varphi(s))ds$$

unde

- φ este funcţia necunoscută;
- f este funcţia cunoscută;
- $K(x, s, z)$ este nucleul funcţiei integrale.

Dacă funcţia necunoscută se găseşte şi sub integrală şi în afara ei, atunci obţinem ecuaţia integrală neliniară de tip Fredholm de speţa a II-a.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s, \varphi(s))ds$$

Parametrul λ este un factor necunoscut, ce joacă un rol important în determinarea valorilor proprii din algebra liniară.

Dacă una din limitele de integrare este variabilă, obţinem ecuaţia integrală neliniară de tip Volterra de speţa I, respectiv speţa a II-a.

$$f(x) = \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds$$
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds.$$

În ambele cazuri dacă $f \equiv 0$ atunci ecuaţia se numeşte ecuaţie integrală omogenă. Dacă $f \neq 0$ ecuaţia se numeşte ecuaţie integrală neomogenă.

Ecuaţiile integrale au o importanţă deosebită în multe aplicaţii. Problemele în care apar ecuaţiile integrale includ: transfer de energie radioactivă şi coarda sau membrana vibrantă. Problemele de oscilaţii pot fi rezolvate cu ajutorul ecuaţiilor diferenţiale.

O ecuaţie integrală cu argument modificat este următoarea ecuaţie integrală cu întârziere ce apare în probleme de dinamica populaţiei, atunci când rata naşterilor variază

$$u(t) = \int_{t-\tau}^t f(s, u(s))ds$$

unde

- $f(t, u(t))-$ numărul de naşteri pe unitatea de timp;
-$u(t)-$ numărul de indivizi prezenţi la timpul t;
- $\tau-$ vârsta fiecărui individ până la moarte, $\tau > 0$.

În multe situaţii funcţia $f(s, u(0))$ este o funcţie periodică în τ, ceea ce înseamnă că $f(s + \tau, u(0)) = f(s, u(0))$.

1. Metoda aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea ecuaţiilor integrale

Să considerăm ecuaţia integrală de speţa a II a de tip Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{3.1.1}$$

Vom face următoarele ipoteze

(1) Funcţia $K(x, s)$, numită nucleul ecuaţiei integrale, este o funcţie reală continuă pe domeniul D;

(2) Funcţia $f(x)$, numită termenul liber al ecuaţiei integrale, este o funcţie reală, continuă pe intervalul $[a, b]$

(3) λ este un parametru, în general număr real.

Se caută soluţia $\varphi(x)$ a ecuaţiei (3.1.1) în mulţimea funcţiilor continue pe $[a, b]$, care se notează cu $C[a, b]$.

TEOREMA 3.1.55. **(teorema de existenţă şi unicitate, [76])** *În condiţiile (1)-(3) şi pentru* $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, *unde* M *este o margine superioară a modulului nucleului* $K(x, s)$ *pe domeniul* D, *ecuaţia integrală (3.1.1) are o soluţie unică în* $C[a, b]$, *ce poate fi obţinută cu metoda aproximării succesive.*

Demonstraţie: Se introduce operatorul

$$A\varphi \equiv f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

numit operatorul lui Fredholm. Ecuaţia (3.1.1) se scrie

$$A\varphi = \varphi. \tag{3.1.2}$$

Se observă că

$$A : C[a, b] \to C[a, b].$$

Se înzestrează mulţimea $C[a, b]$ cu metrica $\rho(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$. Se demonstrează că

$$|A\varphi - A\psi| \leq |\lambda| \cdot M(b - a) \cdot \rho(\varphi, \psi).$$

Prin urmare

$$\rho(A\varphi, A\psi) \leq \alpha \cdot \rho(\varphi, \psi)$$

unde $\alpha = |\lambda| \cdot M(b - a) < 1$

Deci aplicând principiul contracţiei ecuaţia (3.1.2) are o soluţie φ unică ce poate fi obţinută prin metoda aproximării succesive pornind de la orice element din $C[a, b]$.

Soluţia ecuaţiilor integrale (3.1.1) în cazul în care $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ se dezvoltă într-o serie după puterile lui λ. □

Demonstraţia completă se găseşte în D.V. Ionescu [**76**] pag. 354.

DEFINIŢIA 3.1.1. O ecuaţie de forma

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds + f(x) \tag{3.1.3}$$

se numeşte ecuaţia integrală a lui Volterra, unde $K(x, s, z)$ este un nucleu continuu pe pătratul $D : a \leq x \leq b,\ a \leq s \leq b$.

Cum ecuaţia integrală a lui Volterra este un caz particular al ecuaţiei integrale a lui Fredholm sunt valabile şi pentru ecuaţia integrală a lui Volterra ipotezele impuse asupra nucleului integral, respectiv asupra funcţiei $f(x)$. Ecuaţia (3.1.3) are o soluţie unică ce poate fi obţinută cu metoda aproximării succesive.

Ecuaţia integrală neliniară a lui Volterra de speţa a II-a este de forma

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s, y(s))ds,\ x \in [a, b] \tag{3.1.4.}$$

unde

(1) Funcţia $K(x, s, y(s))$, numită nucleul ecuaţiei integrale, este o funcţie reală continuă pe domeniul D;
(2) Funcţia $f(x)$, numită termenul liber al ecuaţiei integrale, este o funcţie reală, continuă pe intervalul $[a, b]$
(3) λ este un parametru, în general număr real.

Teorema 3.1.56. ([**76**]) *Dacă K este lipschitzian în raport cu al III-lea argument atunci ecuaţia (3.1.4) are soluţie unică în $C[a, b]$.*

Demonstraţie: Dacă notăm

$$(T\varphi)(x) = \lambda \int_a^x K(x, s, \varphi(s))ds + f(x),\ (\forall)\, x \in [a, b], \tag{3.1.5.}$$

atunci putem scrie ecuaţia (3.1.5) în forma echivalentă

$$\varphi = T\varphi. \tag{3.1.6.}$$

Considerăm $B[a, b] = \{y : [a, b] \to \mathbb{R},\ y \text{ continuă}\}$ spaţiul funcţiilor continue pe $[a, b]$ înzestrat cu metrica Bielecki

$$\delta(y, z) = \max_{x\in[a,b]}(|y(x) - z(x)| \cdot e^{-\tau(x-a)}),\ \ y, z \in B[a, b],\ \tau > 0.$$

Atunci operatorul $T : B[a, b] \to B[a, b]$ dat de ecuaţia (3.1.5) este strict contractiv. În plus

$$|(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x)| \le |\lambda| \cdot \int_a^x |K(x, s, \varphi_1(s)) - K(x, s, \varphi_2(s))|\, ds \le$$

$$\le |\lambda| \cdot L \cdot \int_a^x |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds = |\lambda| \cdot L \cdot \int_a^x |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \cdot e^{-\tau(s-a)} e^{\tau(s-a)} ds \le$$

$$\begin{aligned} &\le\ |\lambda| \cdot L \cdot \delta(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \int_a^x e^{\tau(s-a)} ds = |\lambda| \cdot L \cdot \delta(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{e^{\tau(x-a)} - 1}{\tau} < \\ &<\ |\lambda| \cdot L \cdot \delta(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{e^{\tau(x-a)}}{\tau}. \end{aligned}$$

Deci

$$|(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x)| \cdot e^{-\tau(s-a)} \le \frac{|\lambda| \cdot L}{\tau} \cdot \delta(\varphi_1, \varphi_2), (\forall)\varphi_1, \varphi_2 \in B[a, b], x \in [a, b]\tau > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \delta(T\varphi_1, T\varphi_2) \le \frac{|\lambda| \cdot L}{\tau} \cdot \delta(\varphi_1, \varphi_2),\ \ (\forall)\ \varphi_1, \varphi_2 \in B[a, b],\ x \in [a, b],\ \tau > 0.$$

Putem alege τ astfel încât $\tau > |\lambda| \cdot L$, de unde $\dfrac{|\lambda| \cdot L}{\tau} < 1$ şi în acest caz operatorul $T : B[a, b] \to B[a, b]$ este o contracţie strictă.

Aplicând principiul contracţiei, deducem că ecuaţia (3.1.4) are o soluţie unică $y^* \in B[a,b]$. Definim şirul de funcţii (y_n) inductiv alegând $y_0 \in B[a,b]$ şi obţinem

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s,y_n(s))ds, \; n \geq 0.$$

Şirul (y_n), converge uniform în $[a,b]$ către unica soluţie y^* a ecuaţiei. $\square$

2. Ecuaţii integrale de tip Fredholm şi Volterra cu argument modificat

În acest capitol vom studia existenţa soluţiilor ecuaţiei integrale

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s,x(s),x(g(s)))ds, \tag{3.2.1}$$

pentru $a, t \in [-T,T]$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, în spaţiul $C[-T,T]$ folosind principiul ϕ-contracţiei şi altor ecuaţii integrale folosind tehnica operatorilor neexpansivi pe mulţimi mărginite, închise şi compacte din $C[a,b]$.
O ecuaţie de tip Fredholm de forma

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_{-t}^t K(t,s,x(s),x(g(s)))ds$$

cu $t \in [-T,T]$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, a fost studiată în lucrările [**47**],[**51**] utilizând norma Cebîşev. Un rezultat asemănător se poate obţine pentru ecuaţia de tip Volterra (3.2.1) utilizând norma Bielecki pe spaţiul funcţiilor continue $C[-T,T]$ cu $T > 0$.

Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:

(i) $K \in C([-T,T] \times [-T,T] \times \mathbb{R}^2)$, $g : [-T,T] \to [-T,T]$;
(ii) $f \in C[-T,T]$;
(iii) $K(t,s,\bullet,\bullet) : [-T,T] \times [-T,T] \to \mathbb{R}$ crescătoare pentru orice $t, s \in [-T,T]$;
(iv) există funcţia de comparaţie $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ cu $\phi(\alpha t) \leq \alpha\phi(t)$ astfel încât pentru orice $t, s \in [-T,T]$, $\alpha \geq 1$ să avem

$$|K(t,s,u_1,v_1) - K(t,s,u_2,v_2)| \leq \phi(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$$

$(\forall)$ $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $u_i \leq v_i, i = 1, 2$.

Teorema 3.2.57. (**M. Lauran** [**111**]) *Presupunem că ipotezele* (i)-(iv) *sunt îndeplinite. Atunci ecuaţia integrală* (3.2.1) *are soluţia unică* x^* *în* $C[-T,T]$, *iar şirul aproximaţiilor succesive, definit prin*

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s,x_n(s),x_n(g(s)))ds$$

converge către x^*, *pentru orice* $x_0 \in C[-T,T]$,
si are loc estimarea

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\left(\frac{2\cdot|\lambda|}{\tau}\right)^n}{1-\frac{2\cdot|\lambda|}{\tau}} \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Demonstraţie: Ataşăm ecuaţiei integrale (3.2.1) operatorul $H : C[-T,T] \to C[-T,T]$, definit prin:

$$(Hx)(t) := f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s,x(s),x(g(s)))ds, \ \ a,t \in [-T,T].$$

Considerăm norma Bielecki $\|x\|_B = \max_{t\in[-T,T]} |x(t)|\, e^{-\tau(t-a)}$, $\tau > 0$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei integrale (3.2.1) coincide cu mulţimea punctelor fixe ale operatorului H.

Din (iv) avem:

$$|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| \leq |\lambda| \int_a^t |K(t,s,x_1(s),x_1(g(s))) - K(t,s,x_2(s),x_2(g(s)))|\, ds$$
$$= |\lambda| \int_a^t |K(t,s,x_1(s),x_1(g(s))) - K(t,s,x_2(s),x_2(g(s)))| \cdot e^{-\tau(t-a)} \cdot e^{\tau(t-a)} ds.$$

Atunci obţinem

$$\begin{aligned}|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| &\leq \tfrac{|\lambda|\cdot 2}{\tau} \cdot \phi(\|x_1 - x_2\|)(e^{\tau(t-a)} - e^{-\tau(t+a)})\\ &\leq \tfrac{|\lambda|\cdot 2}{\tau} \cdot \phi(\|x_1 - x_2\|) \cdot e^{\tau(t-a)}.\end{aligned}$$

Deci,

$$|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| \cdot e^{-\tau(t-a)} \leq \frac{|\lambda|\cdot 2}{\tau} \cdot \phi(\|x_1 - x_2\|).$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem:

$$\|Hx_1 - Hx_2\| \leq \frac{|\lambda|\cdot 2}{\tau} \cdot \phi(\|x_1 - x_2\|)$$

În acest caz H este un operator α- Lipschitzian cu $\alpha = \frac{2\cdot|\lambda|}{\tau}$. Daca alegem τ astfel încât $\frac{2\cdot|\lambda|}{\tau} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < \frac{\tau}{2}$, atunci H este α- contracţie si aplicând principiul contracţiei, ecuaţia (3.1.1) are soluţie unică în $C[-T,T]$. Definim şirul de funcţii (x_n) inductiv alegând orice $x_0 \in C[-T,T]$ şi obţinem

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s,x_n(s),x_n(g(s)))ds$$

Şirul (x_n), care este o iteraţie Picard asociată, converge uniform în $[-T,T]$ către unica soluţie x^* a ecuaţiei (3.2.1). □

Pornind de la o ecuaţie simplă de tip Fredholm

$$x(t) = f(t,x(t)) + \int_0^a K(t,s,x(s))ds, \ t \in [0,a] \tag{3.2.2}$$

am demonstrat existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei folosind tehnica operatorilor Picard, respectiv existenţa soluţiilor folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi

pe submulţimea C_L din $C[a,b]$.
Presupunem că au loc următoarele condiţii:

(i) $f:[0,a]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ K:[0,a]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue;

(ii) există funcţiile continue $a_1,a_2:[0,a]\to\mathbb{R}_+$ astfel încât:

$$|f(t,u_1)-f(t,u_2)|\leq\ a_1(t)\,|u_1-u_2|\,,\ \ \forall u_1,u_2\in\mathbb{R}$$

$$|K(t,s,u_1)-K(t,s,u_2)|\leq\ a_2(t)\,|u_1-u_2|\,,\ \ \forall u_1,u_2\in\mathbb{R};$$

(iii) există numerele reale k_1,k_2 astfel încât $a_1(t)\leq k_1, a_2(t)\leq k_2$, pentru $t\in[0,a]$;

(iv) $k_1+a\cdot k_2<1$.

TEOREMA 3.2.58. (**M. Lauran** [**111**]) *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile (i)-(iv). Atunci ecuaţia* (3.2.2) *are soluţie unică x^* în $C[0,a]$ şi şirul aproximaţiilor succesive asociat operatorului Fredholm, definit prin*

$$x_{n+1}(t)=f(t,x_n(t))+\int\limits_0^a K(t,s,x_n(s))ds,\ n\geq 0$$

converge către $x^*,\forall x_0\in C[0,a]$, şi avem estimarea

$$\|x_n-x^*\|\leq\frac{(k_1+a\cdot k_2)^n}{1-k_1-a\cdot k_2}\cdot\|x_1-x_0\|\,,n\geq 1.$$

Demonstraţie: Demonstraţia acestui rezultat are la bază principiul contracţiei. Definim operatorul H pe spaţiul $C[0,a]$, astfel: $H:C[0,a]\to C[0,a]$,

$$(Hx)(t)=f(t,x(t))+\int\limits_0^a K(t,s,x(s))ds,\ t\in[0,a].$$

Fixăm $x,y\in C[0,a]$, atunci folosind ipotezele teoremei pentru $t\in[0,a]$, avem:

$$|(Hx)(t)-(Hy)(t)|=\left|f(t,x(t))+\int\limits_0^a K(t,s,x(s))ds-f(t,y(t))-\int\limits_0^a K(t,s,y(s))ds\right|$$

$$\leq|f(t,x(t))-f(t,y(t))|+\int\limits_0^a|K(t,s,x(s))-K(t,s,y(s))|\,ds$$

$$\leq a_1(t)\cdot|x(t)-y(t)|+a_2(t)\cdot\int\limits_0^a|x(s)-y(s)|\,ds<k_1\cdot|x(t)-y(t)|+k_2\cdot\int\limits_0^a|x(s)-y(s)|\,ds$$

Trecând la normă în inegalitatea precedentă, obţinem

$$\|Hx-Hy\|<(k_1+a\cdot k_2)\,\|x-y\|\,.$$

În baza presupunerilor făcute, avem:

$$\|Hx-Hy\|<L\cdot\|x-y\|\,,\ L=k_1+a\cdot k_2<1,$$

şi deci operatorul H este o contracţie şi folosind principiul contracţie are loc concluzia teoremei. $\square$

Ca o aplicaţie a teoremei 3.2.58, vom considera o ecuaţie integrală clasică din analiza neliniară care este un caz particular al ecuaţiei (3.2.2).

Exemplul 3.2.1. Considerăm ecuaţia integrală

$$x(t) = \sin\frac{a}{a+t} + \int_0^a \frac{ats}{9}\sin x(s)ds \tag{3.2.3}$$

pentru $f : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t,x(t)) = \sin\frac{a}{a+t}$,
$K : [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definit prin $K(t,s,x(s)) = \dfrac{ats}{9}\cdot\sin x(s), a\in[0,1]$.

Aceste funcţii sunt continue şi satisfac condiţiile (i)-(iv) din teorema 3.2.58 cu $a_1 = 0, a_2 = \dfrac{a}{9}$, $\max\{a_1 + a\cdot a_2\} = \frac{1}{9} < 1$.
Aplicând rezultatul obţinut în Teoremele 3.2.57 şi 3.2.58, deducem că ecuaţia (3.2.3) are soluţie unică în $C[0,1]$ care poate fi obţinută cu ajutorul şirului aproximaţiilor succesive

$$x_{n+1}(t) = f(t,x_n(t)) + \int_0^a K(t,s,x_n(s))ds,\ n\geq 0$$

pornind de la $x_0\in C[0,1]$ oarecare. Pentru $x_0\equiv 0$, avem $K(t,s,x_0(s)) = 0$ şi $x_1 = f(t,0)$.

Propoziţia 3.2.1. (**M. Lauran** [**111**]) *Dacă în teorema 3.2.58 ipoteza (iv) se înlocuieşte cu*
(iv') $k_1 + a\cdot k_2 \leq 1$,
atunci ecuaţia (3.2.2) are cel puţin o soluţie în $C_L\subset C[0,a]$ care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$x_{n+1}(t) = (1-\mu)x_n(t) + \mu f(t,x_n(t)) + \mu\lambda\int_0^a K(t,s,x_n(s),x_n(g(s)))ds,\ \ n\geq 0$$

unde $\mu\in(0,1)$ şi $x_0\in C[0,a]$ arbitrar ales.

Demonstraţie: Dacă considerăm mulţimea C_L definită de relaţia (2.1.7), atunci operatorul $H : C_L\to C[0,a]$ dat de

$$(Hx)(t) = f(t,x(t)) + \int_0^a K(t,s,x(s))ds,\ t\in[0,a].$$

este bine definit pe C_L, submulţime nevidă şi compactă a spaţiului Banach $(C[0,a],\|\cdot\|)$, unde $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.
În baza ipotezei (iv'), operatorul H este neexpansiv şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder 1.1.32, H are cel puţin un punct fix în C_L. Cum punctele fixe ale operatorului H sunt soluţii ale ecuaţiei (3.2.2), deducem că ecuaţia (3.2.2) are cel puţin o soluţie în $C_L\subset C[0,a]$.
Partea a doua a propoziţiei este consecinţă directă a Corolarului 1.1.38 şi 1.1.39. □

TEOREMA 3.2.59. (**M. Lauran** [**111**]) *Dacă ipoteza (ii) din Teorema 3.2.58 este înlocuită cu*

(ii') există funcţiile continue $a_1, a_2 : [0,a] \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât pentru orice* $t, s \in [0,a]$ *şi orice* $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ *să avem*

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq \ a_1(t)\,|u_1 - u_2|$$
$$|K(t,s,u_1) - K(t,s,u_2)| \leq \ a_2(s)\,|u_1 - u_2|\,,$$

şi condiţia (iii) este înlocuită cu

(iii') există numărul real k, astfel încât

$$a_1(t) + \int_0^a a_2(s)ds \leq k < 1,$$

atunci ecuaţia (3.2.2) *are soluţie unică în* $C[0,a]$.

Demonstraţie: Definim operatorul integral H ca în demonstraţia teoremei 3.2.58, $H : C[0,a] \to C[0,a]$,

$$(Hx)(t) = f(t, x(t)) + \int_0^a K(t,s,x(s))ds,\ \ t \in [0,a].$$

Pentru $x, y \in C[0,a]$ avem

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| = \left| f(t,x(t)) + \int_0^a K(t,s,x(s))ds - f(t,y(t)) - \int_0^a K(t,s,y(s))ds \right|$$
$$\leq |f(t,x(t)) - f(t,y(t))| + \int_0^a |K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))|\,ds$$
$$\leq a_1(t) \cdot |x(t) - y(t)| + \int_0^a a_2(s)\,|x(s)) - y(s)|\,ds$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate şi aplicând ipoteza (iii'), avem:

$$\|Hx - Hy\| \leq \left(a_1(t) + \int_0^a a_2(s)ds \right) \cdot \|x - y\| \leq k \cdot \|x - y\|$$

Atunci H este un operator contractiv şi aplicând din nou principiul contracţiei obţinem concluzia teoremei. □

OBSERVAŢIA 3.2.1. Similar cu teorema 3.2.58 şirul aproximaţiilor succesive, dat de

$$x_{n+1}(t) = f(t, x_n(t)) + \int_0^a K(t,s,x_n(s))ds,\ \ n \geq 0,$$

converge către unicul punct fix x^*, pornind de la un $x_0 \in C[0,a]$, şi avem estimarea

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot \|x_1 - x_0\|\,, n \geq 1.$$

PROPOZIŢIA 3.2.2. (**M. Lauran** [**111**]) *Dacă în teorema 3.2.59 ipoteza (iii') se înlocuieşte cu*

(iii") $\max\limits_{t,s\in[0,a]}\{a_1(t)+\int\limits_0^a a_2(s)ds\}\leq 1,$

atunci ecuaţia (3.2.2) are cel puţin o soluţie în $C_L \subset C[0,a]$.

Demonstraţie: Reamintim că C_L este mulţimea

$$C_L = \{y \in C([a,b],[a,b]) : |y(t_1)-y(t_2)| \leq L\cdot|t_1-t_2|\,, t_1,t_2\in[a,b]\}\,, \tag{2.1.7}$$

Din Lema 1 din [**25**] sau ca şi o consecinţă a teoremei Arzelá-Ascoli 1.1.28, mulţimea C_L definită în relaţia (2.1.7) este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[0,a],\|\cdot\|)$, unde $\|x\| = \sup\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.
În baza ipotezei (iii") operatorul H este neexpansiv, deci continuu şi folosind teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30, H are cel puţin un punct fix în C_L. Deci ecuaţia (3.2.2) are cel puţin o soluţie în C_L. $\square$

3. Existenţa soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat în $\overline{B}(f,r)\subset L^2(\Omega)$

Fie $\Omega\subset\mathbb{R}$ o mulţime măsurabilă. O funcţie $f:\Omega\to\mathbb{R}$ măsurabilă Lebesgue se numeşte de pătrat sumabilă dacă

$$\int\limits_\Omega f^2(x)dx<\infty.$$

Notăm prin $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ mulţimea funcţiilor reale de pătrat sumabile. Se ştie că spaţiul $L^2(\Omega,\mathbb{R})$ inzestrat cu norma $\|y\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega f^2(x)dx\right)^{1/2}$ este spaţiu Banach uniform convex.
Spunem despre un operator $K:\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ că satisface condiţia Caratheodory, dacă:

(a) $K(\bullet,\bullet,u)$ este măsurabilă în $\Omega\times\Omega$, pentru orice $u\in\mathbb{R}$;
(b) $K(t,s,\bullet)$ este continuă în $\mathbb{R}$, aproape peste tot pentru $t\in\Omega$ şi $s\in\Omega$.

În lucrarea [**168**] autorul studiază existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei

$$y(x) = f(x)+\lambda\int\limits_\Omega K(x,s,y(s))ds, \tag{3.3.1}$$

folosind principiul contracţiei şi bazându-se pe următoarea teoremă

TEOREMA 3.3.60. (I.A.Rus, [**168**]) *Presupunem că*

(i) $f\in L^2(\Omega)$ *şi există* $L\in L^2(\Omega\times\Omega)$ *astfel încât*
$|K(x,s,u)-K(x,s,v)|\leq L(x,s)\cdot|u-v|$ *pentru orice* $x,s\in\Omega$ *şi* $u,v\in\mathbb{R}$;
(ii) $\int\limits_\Omega K(\bullet,s,0)\,ds\in L^2(\Omega)$;

(iii) $|\lambda| < \frac{1}{\|L\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}}$;

În aceste condiţii, ecuaţia (3.3.1) *are soluţie unică în* $L^2(\Omega)$ *care poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la orice element din* $L^2(\Omega)$.

În acest paragraf ne propunem să extindem teorema de mai sus folosind tehnica operatorilor neexpansivi. În acest scop vom studia ecuaţia integrală de tip Fredholm cu argument modificat în $L^2(\Omega)$:

$$x(t) = f(t) + \int_\Omega K(t,s,x(s),x(g(s)))ds, \tag{3.3.2}$$

unde

$$K : \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};$$

$$f : \overline{\Omega}\to\mathbb{R};$$

$$g : \overline{\Omega}\to\overline{\Omega}.$$

Notăm $\overline{B}(f,r) = \{x\in L^2(\Omega)/\ \|x-f\|_{L^2(\Omega)} \le r, r>0\} \subset L^2(\Omega)$

TEOREMA 3.3.61. **(M. Lauran [113])** *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *$K(t,s,u,v)$ satisface condiţia Caratheodory, ceea ce înseamnă că:*

(a) *$K(t,s,\bullet,\bullet)$ este continuă a.p.t. pe $\mathbb{R}^2$ pentru $t\in\Omega$ şi $s\in\Omega$;*

(b) *$K(\bullet,\bullet,u,v)$ este măsurabilă în $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$, pentru orice $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ fixat.*

(ii) *$f\in L^2(\Omega)$ şi există $L\in L^2(\Omega\times\Omega)$ astfel încât*

$$|K(t,s,u_1,u_2)-K(t,s,v_1,v_2)| \le L(t,s)\cdot(|u_1-v_1|+|u_2-v_2|),$$

pentru orice $t,s\in\Omega$ şi $u_i,v_i\in\mathbb{R}, i=1,2$.

(iii) *$g\in C^1(\Omega,\Omega)$ este bijectivă şi $g^{-1}\in C^1(\Omega,\Omega)$ cu $|g^{-1}(\xi)| < M', M'>0, \xi\in\Omega$;*

(iv) *$\|L\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot mes(\Omega) \le \frac{1}{1+M'}$;*

(v) *$M\cdot mes(\Omega)\le r$, unde M este o constană pozitivă pentru care*

$$\|K(t,s,u_1,u_2)\|_{L^2(\Omega)} \le M,$$

pentru orice $t,s\in\Omega$ şi $u_1,u_2\in\mathbb{R}$.

Atunci ecuaţia (3.3.2) *are soluţie în $\overline{B}(f,r)\subset L^2(\Omega)$.*

Demonstraţie: Notăm

$$\left(\widetilde{H}x\right)(t) = \int_\Omega K(t,s,x(s),x(g(s)))ds,$$

$$(Hx)(t) = f(t) + \left(\widetilde{H}x\right)(t).$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei integrale (3.3.2) coincide cu mulţimea punctelor fixe ale operatorului H în $L^2(\Omega)$.

Arătăm că $H : \overline{B}(f,r)\to\overline{B}(f,r)$. Alegem $x\in\overline{B}(f,r)$ şi demonstrăm că $Hx\in$

$\overline{B}\,(f,r)$.

Pentru $x \in \overline{B}\,(f,r) \Leftrightarrow \|x-f\|_{L^2(\Omega)} \leq r$

$(Hx)\,(t) - f(t) = \left(\widetilde{H}x\right)(t) = \int\limits_{\Omega} K(t,s,x(s),x(g(s)))ds.$

Trecând la normă, obţinem că $\|Hx-f\|_{L^2(\Omega)} \leq M \cdot mes(\Omega) \leq r$, deci $Hx \in \overline{B}(f,r)$, H este bine definit şi

$$H\left(\overline{B}\,(f,r)\right) \subset \overline{B}\,(f,r)\,.$$

Arătăm că H este operator neexpansiv.

$$|(Hx)(t)-(Hy)(t)| = \left|\int\limits_{\Omega}(K(t,s,x(s),x(g(s))) - K(t,s,y(s),y(g(s)))ds)\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega}|K(t,s,x(s),x(g(s))) - K(t,s,y(s),y(g(s)))|\,ds \leq \int\limits_{\Omega} L(t,s)\cdot(|x(s)-y(s)|+$$
$$+|x(g(s))-y(g(s))|)ds$$

Dacă funcţia g este bijectivă, deci inversabilă cu inversa derivabilă şi mărginită, atunci folosind substituţia $g(s)=\xi$ obţinem

$$|(Hx)(t)-(Hy)(t)| \leq \int\limits_{\Omega} L(t,s)\cdot|x(s)-y(s)|\,ds + \int\limits_{\Omega} L(t,g^{-1}(\xi)\cdot|x(\xi)-y(\xi)|\,(g^{-1}(\xi))'d\xi$$

Folosind norma din $L^2(\Omega)$ în ultima inegalitate, obţinem:

$$\|Hx-Hy\|_{L^2(\Omega)} \leq \|L\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\cdot(1+M')\cdot\|x-y\|_{L^2(\Omega)}\cdot mes(\Omega)$$

Pentru $\|L\|_{L^2(\Omega)}\cdot mes(\Omega) \leq \frac{1}{1+M'}$ obţinem:

$$\|Hx-Hy\|_{L^2(\Omega)} \leq \|x-y\|_{L^2(\Omega)}\,.$$

În cazul în care $\|L\|_{L^2(\Omega)}\cdot mes(\Omega) < \frac{1}{2}$, obţinem rezultatul din (Theorem 3.1.16, [**20**]) care foloseşte tehnica operatorilor Picard. În cazul inegalităţii nestricte, operatorul H este operator neexpansiv şi folosind teorema Browder-Ghöde-Kirk 1.1.29 pentru $H:\overline{B}\,(f,r)\to\overline{B}\,(f,r)$, rezultă că operatorul H are cel puţin un punct fix. Se ştie că $\overline{B}\,(f,r)$ este submulţime nevidă, mărginită, convexă şi închisă a spaţiului $L^2(\Omega)$.
Ecuaţia integrală (3.3.2) are soluţie în $B\,(f,r)\subset L^2(\Omega)$, dar acestă soluţie nu este unică. □

OBSERVAŢIA 3.3.1. Dacă $\Omega=[a,b]$ atunci folosind teorema 3.3.60 se obţine un rezultat similar pentru (3.3.2), aşa cum se poate vedea în lucrarea [**20**].

Generalizare

Considerăm acum ecuaţia integrală cu argument modificat

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,s,x(g_1(s)),...,x(g_m(s)))ds \tag{3.3.3}$$

unde:

$$K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R};$$

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R};$$

$$g_k : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}, \ \ k = \overline{1, m}.$$

TEOREMA 3.3.62. (**M. Lauran** [**113**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele ipoteze:*
(i) *$K(t, s, x(g_1), ..., x(g_m))$ satisface condiţia Caratheodory, ceea ce inseamnă*
(a) *$K(t, s, \bullet, \bullet, ..., \bullet)$ este continuă a.p.t. pe $\mathbb{R}^m$ pentru $t \in \Omega$ şi $s \in \Omega$;*
(b) *$K(\bullet, \bullet, x(g_1), ..., x(g_m))$ este măsurabilă în $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, pentru orice $x(g_i) \in \mathbb{R}, \ i = \overline{1, m}$ fixat.*
(ii) *$f \in L^2(\Omega)$ şi există $L \in L^2(\Omega \times \Omega)$ astfel încât*

$$|K(t, s, u_1, u_2, ..., u_m) - K(t, s, v_1, v_2, ..., v_m)| \leq L(t, s) \cdot \sum_{i=1}^{m} \|u_i - v_i\|_{L^2(\Omega)},$$

pentru orice $t, s \in \Omega$ şi $u_i, v_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, m}$.
(iii) *$g_i \in C^1(\Omega, \Omega)$, $i = \overline{1, m}$ bijective cu $g_i^{-1} \in C^1(\Omega, \Omega)$ şi $\left|g_i^{-1}\right| \leq M_i'$*
(iv) *$\|L\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \cdot mess(\Omega) \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} M_i'}$;*
(v) *$M \cdot mes\,(\Omega) \leq r$, unde M este o constană pozitivă pentru care*

$$\|K(t, s, u_1, u_2, ..., u_m)\|_{L^2(\Omega)} \leq M,$$

pentru orice $t, s \in \Omega$ şi $u_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m}$.
Atunci ecuaţia (3.3.3) *are soluţie în $\overline{B}(f, r) \subset L^2(\Omega)$.*

Demonstraţie: Similar, definim operatorul

$$(Hx)\,(t) = f(t) + \int_{\Omega} K(t, s, x(g_1(s)), ..., x(g_m(s)))ds, \ \ x \in \overline{B}(f, r).$$

În mod asemănător demonstraţiei teoremei 3.3.61, operatorul H aplică $\overline{B}(f, r) \subset L^2(\Omega)$ în ea insăşi. Obţinem

$$\|Hx - Hy\|_{L^2(\Omega)} \leq \|L\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \cdot \sum_{i=1}^{m} M_i' \cdot mess(\Omega) \cdot \|x - y\|_{L^2(\Omega)}$$

Asemănător demonstraţiei date la teorema 3.3.61, se arată că în cazul în care inegalitatea nu este strictă, operatorul H este operator neexpansiv şi are cel puţin un punct fix. Punctele fixe ale operatorului H sunt soluţii ale ecuaţiei integrale (3.3.3). □

3.1. Exemple

EXEMPLUL 3.3.1. Considerăm ecuaţia integrală cu argument modificat:

$$x(t) = t^2 + \int_1^a e^{-t} \cdot s^2 \cdot x(s) \cdot x(s - e^{-s}) ds \tag{3.3.4}$$

Această ecuaţie reprezintă un caz special a ecuaţiei (3.3.2) unde

$$f(t) = t^2, \quad K(t, s, x(s), x(g(s))) = e^{-t} \cdot s^2 \cdot x(s) \cdot x(s - e^{-s}).$$

$$\overline{B}(t^2, r) = \left\{ x \in L^2(\Omega) / \left\| x - t^2 \right\|_{L^2(\Omega)} \leq r \right\},$$

unde $\Omega = [1, a]$. Se observă că pentru ecuaţia (3.3.4), ipoteza (ii) a teoremei 3.3.61 este satisfăcută pentru $L(t, s) = e^{-t} \cdot s^2$.
În acest caz presupunerea (iv) este satisfăcută pentru constanta $M = a^2 \cdot r^2$ şi $r \leq \frac{1}{a^2(a-1)}$. În plus ipoteza (iii) a teoremei 3.3.61 este îndeplinită pentru

$$(a - 1) \cdot \sqrt{\int_1^a \int_1^a (e^{-t} \cdot s^2)^2 \cdot dsdt} = \sqrt{\frac{-e^{-2a} + e^{-2}}{2} \cdot \frac{a^5 - 1}{5}} \cdot (a - 1) \leq \frac{1}{2}.$$

Obţinem pentru a o valoare aproximativă $a \approx 1.29$.
Pentru o mai bună aproximare a lui M alegem $M = \dfrac{a^2}{e}$ şi obţinem din (iii) şi (iv)

$$r \leq \frac{e}{a^2 \cdot (a - 1)} \text{ şi } a^2(a - 1) \leq \frac{e}{2}$$

, cu soluţia inecuaţiei, $a \approx 1.559$.
Deci, pentru $\Omega = [1; a]$ ecuaţia (3.3.4) are soluţie în $\overline{B}(t^2, r) \subset L^2(\Omega)$.

EXEMPLUL 3.3.2. Considerăm ecuaţia integrală cu argument modificat::

$$x(t) = t + \int_1^a \left[e^{-t} \cdot x(s) + s \cdot x(s - e^{-s}) \right] ds \tag{3.3.5}$$

În acest caz $f(t) = t$, $K(t, s, x(s), x(g(s))) = e^{-t} \cdot x(s) + s \cdot x(s - e^{-s})$ şi

$$\overline{B}(t, r) = \left\{ x \in L^2(\Omega) / \| x - t \|_{L^2(\Omega)} \leq r \right\},$$

unde $\Omega = [1, a]$.
Ipoteza (ii) a teoremei 3.3.61 este satisfăcută pentru $L(t, s) = \max\{e^{-t}, s\}$ pentru $t, s \in [1, a]$. Din ipotezele (iii) şi (iv) şi o bună aproximare a lui $L(t, s)$ şi $M = a^2(r+1)^2$, obţinem inegalitatea

$$(a - 1)^2 \cdot \sqrt{\frac{a^2 + a + 1}{3}} \leq (a - 1)^2 \cdot a \leq \frac{1}{2}$$

cu soluţia $a = 1,565$ şi $a^2 \cdot (r + 1)^2 \cdot (a - 1) \leq r$. În acest caz, pentru inegalitatea nestrictă, teorema 3.1.16 din [**20**] nu poate fi aplicată.
Ecuaţia (3.3.5) are soluţie în $\overline{B}(t, r) \subset L^2(\Omega)$.

4. Existenţa soluţiilor ecuaţiilor integrale cu argument modificat în $C_L \subset C[a,b]$

Rezultatele din acest paragraf sunt precedate de următorul rezultat, apărut în lucrarea [**19**]. Pentru problema cu condiţii iniţiale, studiată în capitolul 2,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(y(x))), \quad x \in [a,b] \\ \qquad y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

unde $x_0, \quad y_0 \in [a,b]$ şi $f \in C([a,b]^2; [a,b])$ a fost stabilit următorul rezultat privind existenţa soluţiilor în $C_L \subset C[a,b]$, unde notăm

$$c_x = \max\{x - a, b - x\}, \ \ \forall x \in [a,b],$$

şi pentru $L > 0$ definim mulţimea

$$C_L = \{y \in C([a,b],[a,b]) : |y(t_1) - y(t_2)| \leq L \cdot |t_1 - t_2|\,, \forall t_1, t_2 \in [a,b]\}; \tag{2.1.7}$$

Teorema 3.4.63. (V. Berinde, [**19**]) *Presupunem că au loc ipotezele (i)-(iv) din teorema 2.1.42 şi în plus are loc*
(v) $L_1 \cdot C_{x_0} \cdot (L+1) \leq 1$.
Atunci problema (2.1.6) are cel puţin o soluţie în C_L, care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij

$$y_{n+1}(t) = (1-\mu)y_n(t) + \mu y_0 + \mu \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(y_n(s)))ds, \ t \in [a,b], n \geq 1$$

unde $\mu \in (0,1)$ şi $y_1 \in C_L$ arbitrar ales.

Considerăm următoarea ecuaţie integrală cu argument modificat:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{t} K(x, y(y(x)))dx, \tag{3.4.1}$$

unde $x_0, t \in [a,b]$, $y, f \in C[a,b]$, $K \in C([a,b] \times [a,b])$.

Pentru problema (3.4.1) vom demonstra un rezultat de existenţă a soluţiilor în mulţimea C_L din $C[a,b]$.

Teorema 3.4.64. (**M. Lauran**, [**112**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*
(i) $K \in C([a,b] \times [a,b])$;
(ii) $\exists L_1 > 0, L_2 > 0$ *astfel încât*

$$|K(s,u) - K(s,v)| \leq L_1 \cdot |u - v|\,, \ \ \forall s, u, v \in [a,b],$$

şi

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2|\,, \ \ \forall t_1, t_2 \in [a,b].$$

(iii) *Dacă L este constanta Lipschitz introdusă în relaţia (2.1.7), atunci*

$$M = \max\{|K(s,u)| : s,u \in [a,b]\}, \text{ şi } M + L_2 \leq L$$

(iv) *Presupunem că* $|f(x)| \leq f(x_0)$, $\forall x \in [a,b]$ *şi are loc una din condiţiile:*

(a) $M \cdot c_{x_0} \leq c_{y_0}$, $\ y_0 = f(x_0)$; *sau*

(b) $x_0 = a$, $M \cdot (b-a) \leq b - y_0$, $K(s,u) \geq 0$, $\forall s,u \in [a,b]$; *sau*

(c) $x_0 = b$, $M \cdot (b-a) \leq y_0 - a$, $K(s,u) \geq 0$, $\forall s,u \in [a,b]$.

(v) $L_1 \cdot (L+1) \cdot c_{x_0} \leq 1$.

Atunci ecuaţia (3.4.1) *are cel puţin o soluţie în* C_L *care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij*

$$y_{n+1} = (1-\lambda) \cdot y_n + \lambda f(x) + \lambda \int_{x_0}^{t} K(x, y_n(y_n(x)))dx, t \in [a,b], n \geq 1$$

unde $\lambda \in (0,1)$ *şi* $y_1 \in C_L$ *arbitrar.*

Demonstraţie: Tehnica de bază a demonstraţiei a fost introdusă în [**19**]. Considerăm operatorul integral $H : C_L \to C[a,b]$

$$(Hy)(t) = f(t) + \int_{x_0}^{t} K(s, y(y(s)))ds, \ \ x_0, t \in [a,b].$$

Este clar că $y \in C_L$ este soluţie a ecuaţiei (3.4.1) dacă şi numai dacă y este punct fix a lui H, ceea ce înseamnă că $y = Hy$. Vom demonstra că C_L este mulţime invariantă în raport cu H, ceea ce inseamnă că avem $H(C_L) \subset C_L$.

Dacă condiţia (a) are loc, atunci pentru orice $y \in C_L$ şi $t \in [a,b]$ avem:

$$|(Hy)(t)| = \left| f(t) + \int_{x_0}^{t} K(s, y(y(s)))ds \right| \leq |f(t)| + \int_{x_0}^{t} |K(s, y(y(s)))| \, ds$$

$$\leq f(x_0) + M \cdot |t - x_0| = f(x_0) + M \cdot c_{x_0} \leq f(x_0) + c_{y_0} \leq b$$

$$|(Hy)(t)| \geq |f(t)| - \left| \int_{x_0}^{t} K(s, y(y(s)))ds \right| \geq -f(x_0) - M \cdot |t - x_0|$$

$$\geq -f(x_0) - c_{y_0} \geq a$$

Deci, $\forall y \in C_L$ obţinem $(Hy)(t) \in C[a,b]$. Ară tăm că $Hy \in C_L$, $\forall y \in C_L$.
Pentru $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ avem

$$|(Hy)(t_1) - (Hy)(t_2)| \leq |f(t_1) - f(t_2)| + \left| \int_{x_0}^{t_1} K(s, y(y(s)))ds - \int_{x_0}^{t_2} K(s, y(y(s)))ds \right|$$

$$\leq |f(t_1) - f(t_2)| + \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, y(y(s)))ds \right| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2| + \int_{t_1}^{t_2} |K(s, y(y(s)))| \, ds$$

$$\leq L_2 \cdot |t_1 - t_2| + M \cdot |t_1 - t_2| = (L_2 + M) \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

Deci, $(Hy) \in C_L$, $\forall y \in C_L$. În mod similar se tratează cazurile (b) şi (c).
Fie $y, z \in C_L$ şi $t \in [a, b]$. Atunci

$$|(Hy)(t) - (Hy)(z)| = \left| \int_{x_0}^{t} K(s, y(y(s)))ds - \int_{x_0}^{t} K(s, z(z(s)))ds \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{t} |K(s, y(y(s))) - K(s, z(z(s)))| \, ds \leq \int_{x_0}^{t} L_1 \cdot |y(y(s)) - z(z(s))| \, ds =$$

$$= L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} |y(y(s)) - y(z(s)) + y(z(s)) - z(z(s))| \, ds \leq L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(y(s)) - y(z(s))| +$$

$$+ |y(z(s)) - z(z(s))|)ds \leq L_1 \cdot \left[L \cdot \int_{x_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds + \max_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)| \cdot (t - x_0) \right]$$

Trecând la normă în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Hy - Hz\|_{C[a,b]} \leq L_1 \cdot (L + 1) \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|_{C[a,b]}$$

ceea ce, în baza ipotezei (vi), demonstrează că H este neexpansiv, deci continuu. Aplicând teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30 obţinem că H are cel puţin un punct fix. Partea a doua a concluziei este dată de Corolarul 1.1.38 [**29**] şi Corolarul 1.1.39 [**29**]. □

Considerăm acum o ecuaţia iterativă de forma

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^{t} K(x, y(x), y(y(x)))dx, \tag{3.4.2}$$

unde $y, f \in C[a, b]$ and $K \in C([a, b] \times [a, b] \times [a, b])$ sunt date.
Vom enunţa o teoremă de existenţa pentru ecuaţia integrală (3.4.2).

TEOREMA 3.4.65. (**M. Lauran,** [**112**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) $K \in C([a, b] \times [a, b] \times [a, b])$;

(ii) $\exists L_1 > 0, L_2 > 0$ *astfel încât*

$$|K(s, u_1, u_2) - K(s, v_1, v_2)| \leq L_1 \cdot (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|), \ \ \forall s, u_i, v_i \in [a, b], i = 1, 2$$

şi

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2| \, , \ \ \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

(iii) *Dacă L este constanta Lipschitz introdusă în relaţia (2.1.7), atunci*

$$M = \max\{|K(s, u, v)| : s, u, v \in [a, b]\}, \ \ \text{şi } M + L_2 \leq L$$

(iv) *Presupunem că* $|f(x)| \leq f(x_0)$, $\forall x \in [a, b]$ *şi are loc una din condiţiile:*

(a) $M \cdot c_{x_0} \leq c_{y_0}, \ \ y_0 = f(x_0)$; *sau*

(b) $x_0 = a$, $M \cdot (b - a) \leq b - y_0$, $K(s, u) \geq 0$, $\forall s, u \in [a, b]$;*sau*

(c) $x_0 = b$, $M \cdot (b - a) \leq y_0 - a$, $K(s, u) \geq 0$, $\forall s, u \in [a, b]$;

(v) $L_1 \cdot (L+2) \cdot c_{x_0} \leq 1$.

Atunci există cel puţin o soluţie a ecuaţiei (3.4.2) *în* C_L.

Demonstraţie: Aşa cum se ştie din Lema 1 din [**25**] C_L este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a,b], \|\cdot\|)$, unde $\|\cdot\|$ este norma supremum. Considerăm operatorul integral

$$H : C_L \to C[a,b],$$

$$(Hy)(t) = f(t) + \int_{x_0}^{t} K(s, y(s), y(y(s)))ds, \quad x_0, t \in [a,b], y \in C_L.$$

Soluţiile ecuaţiei (3.4.2) sunt punctele fixe ale operatorului integral H.

Vom arăta că $H(C_L) \subset C_L$. În cazul (a), avem

$$|(Hy)(t)| = \left| f(t) + \int_{x_0}^{t} K(s, y(s), y(y(s)))ds \right| \leq |f(t)| + \int_{x_0}^{t} |K(s, y(s), y(y(s)))| \, ds \leq$$

$$\leq |f(x_0)| + M \cdot |t - x_0| \leq f(x_0) + M \cdot c_{x_0} \leq f(x_0) + c_{y_0} \leq b$$

$$|(Hy)(t)| \geq |f(t)| - \int_{x_0}^{t} |K(s, y(s), y(y(s)))| \, ds \geq |f(t)| - M \cdot |t - x_0| \geq -f(x_0) - c_{y_0} \geq a$$

Deci,$Hy \in [a,b]$. Vom arăta că $Hy \in C_L, \ \forall y \in C_L$.

Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$.

$$|(Hy)(t_1) - (Hy)(t_2)| \leq |f(t_1) - f(t_2)| + \left| \int_{t_1}^{t_2} K(s, y(s), y(y(s)))ds \right| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2| +$$

$$+ M \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2| .$$

Deci, $Hy \in C_L, \ \forall y \in C_L$.

Pentru orice $y, z \in C[a,b]$ obţinem

$$|(Hy)(t) - (Hz)(t)| \leq \int_{x_0}^{t} |K(s, y(s), y(y(s))) - K(s, z(s), z(z(s)))| \, ds \leq$$

$$\leq L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - z(z(s))|)ds =$$

$$= L_1 \cdot \int_{x_0}^{t} (|y(s) - z(s)| + |y(y(s)) - y(z(s)) + y(z(s)) - z(z(s))|)ds \leq$$

$$L_1 \cdot \left[\int_{x_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds + \int_{x_0}^{t} (|y(y(s)) - y(z(s))| + |y(z(s)) - z(z(s))|)ds \right]$$

$$\leq L_1 \left[\int_{x_0}^{t} |y(s) - z(s)| + L \cdot \int_{x_0}^{t} |y(s) - z(s)| \, ds + \int_{x_0}^{t} \max_{t \in [a,b]} |y(t) - z(t)| \, ds \right].$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Hy - Hz\|_{C[a,b]} \leq L_1 \cdot (L+2) \cdot c_{x_0} \cdot \|y - z\|_{C[a,b]},$$

ceea ce, în baza ipotezei (v), demonstrează că H este operator neexpansiv, deci continuu. Aplicând teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30 obţinem concluzia teoremei. □

Caz particular

Dacă $f(x) \equiv y_0(const.)$, din Teorema 3.4.65 obţinem rezultatul din [**19**].

Pornind de la ecuaţia

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s), x(a), x(b))ds, \quad t \in [a, b], \tag{3.4.3}$$

studiată în lucrarea [**47**] şi [**46**] vom demonstra că această ecuaţie admite soluţie pe submulţimea C_L a spatiului $C[a, b]$ care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij.

TEOREMA 3.4.66. (**M. Lauran,** [**108**]) *Dacă au loc condiţiile:*

(i) $f \in C[a, b]$ *şi* $K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^3)$*;*

(ii) $\exists L_1 > 0, L_1' > 0$ *astfel încât*

$$|K(t, s, u_1, v_1, w_1) - K(t, s, u_2, v_2, w_2)| \leq L_1 \cdot (|u_1 - u_2| + |v_2 - v_2| + |w_1 - w_2|),$$

$\forall t, s \in [a, b],\ u_i, v_i, w_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ *şi*

$$|K(t_1, s, u, v, w) - K(t_2, s, u, v, w)| \leq L_1' \cdot (|t_1 - t_2|),\ \forall t_1, t_2, s \in [a, b],\ u, v, w \in \mathbb{R},$$

(iii) $\exists L_2 > 0$ *astfel încât*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2|,\ \forall t_1, t_2 \in [a, b].$$

(iv) *Dacă L este constanta definită în relaţia (2.1.7), atunci avem*

$$L_2 + L_1' \cdot (b - a) \leq L;$$

(v) $3 \cdot L_1(b - a) \leq 1$.

Atunci ecuaţia integrală (3.4.3) *are cel puţin o soluţie în* C_L *care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij*

$$x_{n+1}(t) = (1 - \lambda) \cdot x_n(t) + \lambda f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s, x_n(s), x_n(a), x_n(b))ds, t \in [a, b], n \geq 1$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ *şi* $x_1 \in C_L$ *arbitrar.*

Demonstraţie: Definim operatorul integral $H : C_L \to C[a,b]$ prin

$$(Hx)(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s,x(s),x(a),x(b))ds, \quad t \in [a,b]$$

Vom arăta că C_L este submulţime invariantă în raport cu H, adică $H(C_L) \subset C_L$.
Fie $t_1, t_2 \in [a,b]$, atunci avem

$$|(Hx)(t_1) - (Hx)(t_2)| \leq |f(t_1) - f(t_2)| +$$

$$+ \int_a^b |K(t_1,s,x(s),x(a),x(b)) - K(t_2,s,x(s),x(a),x(b))| \, ds \leq$$

$$\leq (L_2 + L_1' \cdot (b-a)) \cdot |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2| \, .$$

Deci, $Hx \in C_L$, $\forall x \in C_L$.
Vom arăta că H este operator neexpansiv. Pentru orice $x, y \in C[a,b]$ avem

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| \leq \int_a^b |K(t,s,x(s),x(a),x(b)) - K(t,s,y(s),y(a),y(b))| \, ds \leq$$

$$\leq L_1 \cdot \int_a^b (|x(s) - y(s)| + |x(a) - y(a)| + |x(b) - y(b)|) \, ds.$$

Trecând la normă în ultima inegalitate, obţinem:

$$\|Hx - Hy\| \leq 3 \cdot L_1 \cdot \|x - y\| \, .$$

În baza ipotezei (v) obţinem că $\|Hx - Hy\| \leq \|x - y\|$, deci operatorul H este neexpansiv, iar folosind teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30, rezultă că H are cel puţin un punct fix în C_L, care este soluţie a ecuaţiei (3.4.3).
Din Corolarul 1.1.38 [**29**] sau Corolarul 1.1.39 [**29**] are loc a doua parte a concluziei teoremei. □

Pornind de la ecuaţia (3.4.3), printr-o modificare a argumentului obţinem o ecuaţie integrală de tip Fredholm cu argument modificat a cărui argument nu depinde de capetele intervalului de integrare.

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s,x(s),x(g(s)))ds, \quad t \in [a,b] \tag{3.4.4}$$

Are loc următoare teoremă de existenţă a soluţiei în $C_L \subset C[a,b]$ precum şi aproximarea soluţiei folosind iteraţia Krasnoselskij.

Teorema 3.4.67. (**M. Lauran,** [**108**]) *Dacă au loc condiţiile:*
(i) $f \in C[a,b]$*,* $g : [a,b] \to [a,b]$ *şi* $K \in C([a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^2)$*;*
(ii) $\exists L_1 > 0$ *astfel încât*

$$|K(t_1,s,u,v) - K(t_2,s,u,v)| \leq L_1 \cdot |t_1 - t_2| \, , \ \forall t_1, t_2, s \in [a,b], \ u, v \in \mathbb{R},$$

(iii) $\exists L_2 > 0$ *astfel încât*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq L_2 \cdot |t_1 - t_2|\,, \;\; t_1, t_2 \in [a, b]$$

(iv) $\exists m > 0,\ M > 0$ *astfel încât* $|f(t)| \leq m,\ |K(t, s, u, v)| \leq M,\ \forall t, s \in [a, b], u, v \in \mathbb{R}$

Dacă

(v)

$$L_2 + L_1 \cdot (b - a) \leq L,$$

atunci ecuaţia integrală (3.4.4) *are cel puţin o soluţie în* C_L *care poate fi aproximată cu ajutorul iteraţiei Krasnoselskij*

$$x_{n+1}(t) = (1 - \lambda) \cdot x_n(t) + \lambda f(t) + \lambda \int_a^b K(t, s, x_n(s), x_n(g(s)))ds, t \in [a, b], n \geq 1$$

unde $\lambda \in (0, 1)$ *şi* $x_1 \in C_L$ *arbitrar.*

Demonstraţie: Este binecunoscut faptul că C_L este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a, b], \|\bullet\|)$, unde $\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$ este norma Cebîşev.

Considerăm operatorul integral $H : C_L \to C[a, b]$ definit prin

$$(Hx)(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s, x(s), x(g(s)))ds, \quad t \in [a, b].$$

Punctele fixe ale operatorului H sunt soluţiile ecuaţiei (3.4.4). În acest sens vom folosi teorema de punct fix a lui Schaefer 1.1.34.

Pasul 1 Arătăm că operatorul H este continuu.

Fie $\{x_n\}$ un şir astfel încât $x_n \to x$ în $C[a, b]$. Atunci pentru orice $t \in [a, b]$ avem

$$|(Hx_n)(t) - (Hx)(t)| \leq \int_a^b |K(t, s, x_n(s), x_n(g(s))) - K(t, s, x(s), x(g(s)))|\, ds$$

Cum K este funcţie continuă, obţinem că

$$\|Hx_n - Hx\| \to 0 \quad \text{când} \quad n \to \infty$$

Pasul 2 Arătăm că H transformă mulţimi mărginite din C_L în mulţimi mărginite din $C[a, b]$. Este suficient să arătăm că pentru orice $\eta > 0$, există o constantă pozitivă l astfel încât pentru orice $x \in B_\eta = \{x \in C_L : \|x\| \leq \eta\}$ să avem $\|Hx\| \leq l$.

$$|(Hx)(t)| \leq |f(t)| + \int_a^b |K(t, s, x(s), x(g(s)))|\, ds \leq m + M(b - a)$$

Deci, $\|Hx\| \leq m + M(b - a) := l$

Pasul 3 Arătăm că H transformă mulţimi mărginite în mulţimi echicontinue din C_L.

$$|(Hx)(t_1)-(Hx)(t_2)| \leq |f(t_1)-f(t_2)|+\int_a^b |K(t_1,s,x(s),x(g(s)))-K(t_2,s,x(s),x(g(s)))|\,ds \leq$$

$$\leq L_2\cdot|t_1-t_2|+L_1\cdot(b-a)\,|t_1-t_2| = (L_2+L_1\cdot(b-a))\cdot|t_1-t_2| \leq L\cdot|t_1-t_2|$$

Deci $Hx\in C_L$, $\forall x\in C_L$, ceea ce înseamnă $H: C_L\to C_L$.
Dacă $t_1\to t_2$ atunci membrul drept tinde la 0. Ca urmare a primilor trei paşi şi împreună cu teorema Arzelá-Ascoli 1.1.28 putem concluziona că $H: C_L\to C_L$ este complet continuu.

Pasul 4 Estimarea a priori
Trebuie să arătăm că mulţimea

$$\varepsilon=\{x\in C_L : x=\lambda Hx \text{ pentru } 0\leq\lambda\leq 1\}, \quad \text{este mărginită.}$$

Fie $x\in\varepsilon$ atunci $x=\lambda Hx$ pentru un $\lambda\in[0,1]$

$$|x(t)|\leq|\lambda\cdot f(t)|+\lambda\int_a^b|K(t,s,x(s),x(g(s)))|\,ds\leq\lambda\cdot(m+M):=R$$

În baza teoremei de punct fix a lui Schaefer 1.1.34 deducem că H are puncte fixe care sunt soluţii ale ecuaţiei integrale (3.4.4), iar folosind Corolarul 1.1.38 sau Corolarul 1.1.39 din [**29**] acestea pot fi aproximate cu ajutorul iterţiei Krasnoselskij. □

Ca o consecinţă a teoremei 3.4.67 se poate formula următorul rezultat folosindu-ne de teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30.

TEOREMA 3.4.68. (**M. Lauran,** [**108**]) *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile (i),(ii),(iii) din teorema 3.4.67 şi*
(iv) $\exists L_1'>0$ *astfel încât*

$$|K(t,s,u_1,v_1)-K(t,s,u_2,v_2)|\leq L_1'\cdot(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)\,,\quad \forall t_1,t_2,s\in[a,b],u,v\in\mathbb{R}$$

Dacă
(v) $2\cdot L_1'(b-a)\leq 1$
atunci ecuaţia integrală (3.4.4) *admite cel puţin o soluţie în* C_L.

Demonstraţie: Vom demonstra că operatorul $H: C_L\to C[a,b]$ definit prin

$$(Hx)(t)=f(t)+\int_a^b K(t,s,x(s),x(g(s)))ds,\quad t\in[a,b]$$

este operator neexpansiv.
Continuitatea operatorului şi faptul că e bine definit pe C_L rezultă din demonstraţia teoremei anterioare.
Din ipoteza (iv) avem

$$|(Hx)(t)-(Hy)(t)|\leq\int_a^b|K(t,s,x(s),x(g(s)))-K(t,s,y(s),y(g(s)))|\,ds\leq$$

$$\leq L_1' \int_a^b (|x(s) - y(s)| + |x(g(s)) - y(g(s))|)\, ds$$

Trecând la normă în inegalitate, obţinem

$$\|Hx - Hy\| \leq 2 \cdot L_1'(b-a) \cdot \|x - y\|$$

Dacă $2 \cdot L_1'(b-a) \leq 1$ atunci operatorul $H : C_L \to C_L$ este neexpansiv şi folosind teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.30 obţinem concluzia teoremei.

□

4.1. Existenţa soluţiilor ecuaţiilor integrale neliniare

Teoremele de punct fix din analiza neliniară sunt folosite, în general, pentru obţinerea unor rezultate existenţă a soluţiilor ecuaţiilor operatoriale-funcţionale.
În acest paragraf vom studia existenţa şi existenţa şi unicitatea soluţiilor ecuaţiilor integrale neliniare de tip Volterra folosind principiul contracţiei, tehnica operatorilor neexpansivi şi teorema 1.1.34 de punct fix a lui Schaefer. Aceste rezultate generalizează teoremele studiate în lucrările [**9**], [**10**], [**19**], [**112**], [**64**].
Rezultatele originale au fost publicate în articolele [**112**] şi [**116**].

Considerăm următoarea ecuaţie integrală neliniară:

$$x(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t)) \int_0^T f(t, s, x(s))ds,\ T \geq 0. \tag{3.4.5}$$

Notăm $J = [0, T]$ şi pentru un $L > 0$ considerăm mulţimea

$$C_L = \{x \in C(J, J) \ :\ |x(t_1) - x(t_2)| \leq L \cdot |t_1 - t_2|\,, (\forall) t_1, t_2 \in J\}. \tag{3.4.6}$$

Primul rezultat se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach (Principiul contracţiei).

Teorema 3.4.69. (**M. Lauran**, [**116**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

(H_1) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g, h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue date.*
(H_2) Există constanta $L_1 > 0$ astfel încât

$$|g(t,u) - g(t,v)| \leq L_1 \cdot |u - v|\,, \quad (\forall)\, t \in J,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

(H_3) Există constanta $L_2 > 0$ astfel încât

$$|h(t,u) - h(t,v)| \leq L_2 \cdot |u - v|\,, \quad (\forall)\, t \in J,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

(H_4) Există constanta $L_3 > 0$ astfel încât

$$|f(t,s,u) - f(t,s,v)| \leq L_3 \cdot |u - v|\,, \quad (\forall)\, t, s \in J,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Dacă $M_1 = \max\limits_{t\in J, u\in\mathbb{R}} |h(t,u)|$, $|f(t,s,u)| \le M_2$, $\forall t,s \in J, u\in\mathbb{R}$ *şi*

$$L_1 + L_2 \cdot T \cdot M_2 + L_3 \cdot T \cdot M_1 < 1,\ (\forall) t \in J\ \ (*)$$

atunci ecuaţia (3.4.5) *are soluţie unică în* $C(J) = C[0,T]$.

Demonstraţie: Transformăm ecuaţia (3.4.5) într-o problemă de punct fix. Considerăm operatorul integral

$$H : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$$

definit prin

$$(Hx)(t) = g(t,x(t)) + h(t,x(t)) \int_0^T f(t,s,x(s))ds,\ \forall x \in C(J,\mathbb{R}),\ \forall t \in J.$$

Din condiţia (H_1) deducem că operatorul este bine definit. Punctele fixe ale operatorului H sunt soluţiile ecuaţiei integrale (3.4.5) Vom folosi principiul contracţiei a lui Banach pentru a demonstra că H are puncte fixe.

Fie $x, y \in C(J,\mathbb{R})$. Avem

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| \le |g(t,x(t)) - g(t,y(t))| + \Bigg| h(t,x(t)) \int_0^T f(t,s,x(s))ds -$$

$$-h(t,y(t)) \int_0^T f(t,s,y(s))ds + h(t,x(t)) \int_0^T f(t,s,y(s))ds - h(t,x(t)) \int_0^T f(t,s,y(s))ds \Bigg| \le$$

$$\le L_1 |x(t) - y(t)| + |h(t,x(t))| \cdot \int_0^T |f(t,s,x(s))ds - f(t,s,y(s))| \, ds + |h(t,x(t)) - h(t,y(t))| \cdot$$

$$\cdot \int_0^T f(t,s,y(s))ds \le L_1 |x(t) - y(t)| + L_3 \cdot |h(t,x(t))| \cdot \int_0^T |x(s) - y(s)| \, ds +$$

$$+L_2 \cdot |x(t) - y(t)| \cdot \int_0^T |f(t,s,y(s))| \, ds \le (L_1 + L_2 \cdot T \cdot M_2 + T \cdot L_3 \cdot M_1) \max_{t\in J} |x(t) - y(t)| .$$

Deci,

$$\|Hx - Hy\| \le k \cdot \|x - y\| .$$

Ca o consecinţă a relaţiei (*), H este o contracţie. Folosind teorema de punct fix a lui Banach, deducem că H are punct fix care este soluţie a ecuaţiei (3.4.5). □

Slăbind condiţiile impuse asupra funcţiilor f, g, h şi implicit asupra operatorului integral H, obţinem un rezultat de existenţă a soluţiilor ecuaţiei (3.4.5), care se bazează pe teorema 1.1.34 de punct fix a lui Schaefer.

TEOREMA 3.4.70. (**M. Lauran**, [**116**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(H_1). Funcţiile $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g, h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *sunt continue.*

(H_2). Dacă L este constanta Lipschitz considerată în (3.4.6), atunci

$$\int_0^T |f(t_1, s, x(s)) - f(t_2, s, x(s))ds| \le \frac{L}{T} \cdot |t_1 - t_2|\,,$$

pentru orice $(\forall)t_1, t_2, s \in J$, $x \in C_L$;

(H_3). Există constantele $m, M, p \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$|g(t, u) - g(t, v)| \le m \cdot |u - v| \ \text{ pentru orice } u, v \in \mathbb{R} \text{ şi } t \in J,$$

$$|g(t, u) - g(s, u)| \le M \cdot L \cdot |t - s| \ \text{ şi } (\forall)\ t, s \in J,\ u \in \mathbb{R},$$

$$|g(t, u)| \le p, (\forall)\ t, s \in J, u \in \mathbb{R}.$$

(H_4). Există constantele $n, N \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} |h(t, u) - h(t, v)| &\le n \cdot |u - v| \ (\forall)\ u, v \in \mathbb{R} \text{ şi } t \in J, \\ |h(t, u) - h(s, u)| &\le N \cdot L \cdot |t - s| \ (\forall)\ t, s \in J \text{ şi } u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(H_5). Avem

$$\{m + M + (n + N) \cdot T \cdot M_2 + M_1\} \le 1.$$

unde

$$M_1 = \max_{t \in J, u \in \mathbb{R}} |h(t, u)| \ \ , |f(t, s, u)| \le M_2, \forall t, s \in J \text{ şi } u \in \mathbb{R}.$$

Atunci ecuaţia (3.4.5) *are cel puţin o soluţie în* C_L.

Demonstraţie: Din Lemma 1 din [**25**] rezultă că C_L este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C[a, b], \|\cdot\|)$, unde $\|\cdot\|$ este norma supremum.

Transformăm ecuaţia (3.4.5) într-o problemă de punct fix.

Considerăm operatorul integral

$$H : C_L \to C(J, \mathbb{R})$$

$$(Hx)(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t)) \int_0^T f(t, s, x(s))ds.$$

Evident, punctele fixe ale operatorului H sunt soluţiile ecuaţiei (3.4.5). Vom folosi Teorema 1.1.34 de punct fix a lui Schaefer pentru a demonstra că H are puncte fixe.

Pasul 1. H este operator continuu

Fie $\{x_n\}$ un şir astfel încât $x_n \to x$ în $C(J, \mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $t \in J$

$$|H(x_n)(t) - H(x)(t)| \leq$$

$$\leq |g(t, x_n(t)) - g(t, x(t))| + |h(t, x_n(t))| \cdot \int_0^T |f(t, s, x_n(s)) - f(t, s, x(s))ds +$$

$$+ |h(t, x_n(t)) - h(t, x(t))| \cdot \int_0^T |f(t, s, x(s)|\, ds.$$

Cum f, g şi h sunt funcţii continue, avem

$$\|Hx_n - Hx\| \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Pasul 2. H aplică mulţimi mărginite din C_L în mulţimi mărginite din $C(J, \mathbb{R})$.

Este suficient să arătăm că pentru orice $\eta > 0$, există constanta pozitivă l astfel încât pentru orice $x \in B_\eta = \{x \in C_L : \|x\| \leq \eta\}$, să avem $\|Hx\| \leq l$.

Din (H_3) - (H_4) obţinem, pentru orice $t \in J$

$$|(Hx)(t)| \leq |g(t, x(t))| + \left| h(t, x(t)) \int_0^T f(t, s, x(s))ds \right| \leq p + M_1 \cdot M_2.$$

Deci,

$$\|Hx\| \leq p + M_1 \cdot M_2 := l.$$

Pasul 3. H aplică mulţimi mărginite în mulţimi echicontinue din C_L.

$$|(Hx)(t_1) - (Hx)(t_2)| \leq |g(t_1, x(t_1) - g(t_2, x(t_2))| +$$

$$+ \left| h(t_1, x(t_1)) \int_0^T f(t_1, s, x(s))ds - h(t_2, x(t_2)) \int_0^T f(t_2, s, x(s))ds \right| \leq$$

$$\leq |g(t_1, x(t_1)) - g(t_2, x(t_1))| + |g(t_2, x(t_1)) - g(t_2, x(t_2))| + |h(t_1, x(t_2)) - h(t_2, x(t_1))| \cdot$$

$$\cdot \int_0^T |f(t_1, s, x(s))|\, ds + |h(t_2, x(t_1))| \cdot \left| \int_0^T f(t_1, s, x(s))ds - \int_0^T f(t_2, s, x(s))ds \right| \leq$$

$$\leq M \cdot L \cdot |t_1 - t_2| + m \cdot |x(t_1) - x(t_2)| + |h(t_1, x(t_2) - h(t_1, x(t_1)| \cdot \int_0^T |f(t_1, s, x(s))|\, ds +$$

$$+ |h(t_1, x(t_1)) - h(t_2, x(t_1))| \cdot \int_0^T |f(t_1, s, x(s))|\, ds + |h(t_2, x(t_1))| \cdot$$

$$\cdot \left| \int_0^T f(t_1, s, x)ds - \int_0^T f(t_2, s, x)ds \right| \leq$$

$$\leq M \cdot L \cdot |t_1 - t_2| + m \cdot L \cdot |t_1 - t_2| + (N \cdot L + n \cdot L) \cdot M_2 T \cdot |t_1 - t_2| \cdot$$

$$\cdot + M_1 \cdot L \cdot |t_1 - t_2| =$$

$$= L \cdot |t_1 - t_2| \left[m + M + (n + N)TM_2 + M_1 \right] \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

Deci, $Hx \in C_L$, $(\forall)\, x \in C_L$. În plus, $H : C_L \to C_L$.

Când $t_1 \to t_2$, atunci membrul drept al inegalităţii anterioare, tinde la zero. Ca o consecinţa a paşilor 1 - 3, împreună cu teorema Arzelá-Ascoli 1.1.28, obţinem că $H : C_L \to C_L$ este continuu şi complet continuu.

Pasul 4. Estimarea a priori. Trebuie să arătăm că mulţimea

$$\mathcal{E} = \{x \in C_L : x = \lambda Fx \text{ pentru } 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

este mărginită.

Fie $x \in \mathcal{E}$ atunci $x = \lambda Hx$ pentru un $\lambda \in [0, 1]$

$$|x(t)| \leq |g(t, x(t))| + \left| h(t, x(t)) \int_0^T f(t, s, x(s))ds \right| \leq p + Q := R.$$

În baza teoremei 1.1.34 de punct fix a lui Schaefer, deducem că H are puncte fixe care sunt soluţiile ecuaţiei (3.4.5). □

Aplicând teorema de punct fix a lui Schauder 1.1.32, vom obţine o teoremă de existenţă a soluţiilor ecuaţiei (3.4.5) în mulţimea C_L dată de relaţia (3.4.6).

TEOREMA 3.4.71. (**M. Lauran**, [**116**]) *Presupunem că sunt îndeplinite ipotezele (H_1), (H_3), (H_4) din teorema 3.4.70 şi (H_2) se înlocuieşte cu*

(H_2') Există constanta L' astfel încât

$$|f(t, s, u) - f(t, s, v)| \leq L' \cdot |u - v|\,, \textit{ pentru orice } t, s \in J,\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Dacă

$$m + n \cdot T \cdot M_2 + T \cdot L' \cdot M_1 \leq 1$$

sau

$$\lim_{t \to \infty} t \cdot |h(t, x(t))| = 0 \textit{ uniform în raport cu } x \in C_L,$$

atunci ecuaţia (3.4.5) are cel puţin o soluţie în C_L.

Demonstraţie: Folosind primii paşi din demonstraţia Teoremei 3.4.69 şi ai Teoremei 3.4.70, arătăm că operatorul integral

$$H : C_L \to C(J, \mathbb{R})$$

definit prin

$$(Hx)(t) = g(t, x(t)) + h(t, x(t)) \int_0^T f(t, s, x(s))ds,$$

este neexpansiv. Aplicând Teorema 1.1.32 de punct fix a lui Schauder, deducem că H are cel puţin un punct fix, care este soluţie a ecuaţiei (3.4.5). □

Considerăm următorul exemplu pentru a ilustra aplicarea rezultatelor anterioare.

EXEMPLUL 3.4.1. Fie ecuaţia integrală neliniară, de forma

$$x(t) = \frac{1}{t^2+9} \cdot x(t) + \cos(tx(t)) \int_0^T \frac{e^{-t}}{1+e^t} \cdot \frac{|x(s)|}{1+|x(s)|} ds, t \in J = [0,T] \tag{3.4.7}$$

În acest caz, avem

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ \ g(t,x(t)) = \frac{1}{t^2+9} \cdot x(t), \text{ pentru orice } t \in J,$$

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ \ h(t,x(t)) = \cos(tx(t)), \text{ pentru orice } t \in J,$$

şi

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(t,s,x(s)) = \frac{e^{-t}}{1+e^t} \cdot \frac{|x(s)|}{1+|x(s)|}, \text{ pentru orice } t,s \in J.$$

Suntem interesaţi să studiem existenţa soluţiei $x(t)$ în mulţimea

$$C_1 = \{x \in C(J,J) : |x(t_1) - x(t_2)| \le |t_1 - t_2|\ , (\forall)\ t_1, t_2 \in J\},$$

ceea ce înseamnă că $L = 1$. Obţinem valorile constantelor $L_1 = \frac{1}{9}, L_2 = \frac{1}{2}, L_3 = \frac{1}{2}$, $M_1 = 1, M_2 = \frac{1}{2}$ din Teorema 3.4.69.

Pentru un T convenabil ales (T=1), obţinem $L_1 + L_2 \cdot T \cdot M_2 + L_3 \cdot T \cdot M_1 = \frac{31}{36} < 1$ din Teorema 3.4.69, iar ecuaţia (3.4.7) are soluţie unică în $C(J) = C[0,T]$.

Pentru un T convenabil ales ($T = \frac{32}{27}$), obţinem valorile constantelor $m = \frac{1}{9}$, $M = \frac{1}{36}$, $n = \frac{1}{2}$, $N = \frac{1}{2}$, $L' = \frac{1}{2}$ şi $M_1 = 1, M_2 = \frac{1}{2}$ din teorema 3.4.71 şi se obţine relaţia $m + n \cdot T \cdot M_2 + T \cdot L' \cdot M_1 = 1$. În acest caz ecuaţia (3.4.7) are cel puţin o soluţie în C_1.

OBSERVAŢIA 3.4.1. Clasa operatorilor neexpansivi este o submulţime strictă a clasei operatorilor demicontractivi, introdusă indepenent de către Şt. Măruşter în [**134**] şi Hicks şi Kubicek în [**72**]. Reamintim că un operator $T : C \to C$, unde C este o submulţime închisă şi convexă a unui spaţiu Hilbert, se numeşte *demicontractiv* (sau *k-demicontractiv*) dacă există $k \in (0,1)$ astfel încât

$$\|Tx - p\|^2 \le \|x - p\|^2 + k \cdot \|Tx - x\|^2, \forall x \in C \text{ şi } p \in F_T.$$

În lucrarea [**121**], Maingé şi Măruşter au obţinut teoreme de convergenţă pentru iteraţia Krasnoselskij - Mann modificată asociată unor operatori demicontractivi. În [**30**] se extind rezultatele lui Şt. Măruşter din [**134**] şi T. L. Hicks şi J.R. Kubicek din [**72**] la un spaţiu real înzestrat cu anumite proprietăţi geometrice. În aceste condiţii în lucrarea [**133**] se obţine convergenţa tare a sirului aproximaţiilor succesive pentru itaraţia Mann modificată.

Avem în studiu cercetarea posibilităţii de a extinde rezultatele obţinute în această teză pentru cazul operatorilor neexpansivi, la clasa mai cuprinzătoare a operatorilor k - demicontractivi.

CAPITOLUL 4

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat folosind tehnica operatorilor neexpansivi

1. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat folosind tehnica operatorilor neexpansivi

Existenţa şi unicitatea soluţiei sistemelor de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat, precum şi proprietăţi ale acestora au fost studiate în monografii precum: R.D. Driver [**52**], V. Kolmanovskii şi V.R. Nosov [**91**], O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel şi H.O. Walther [**39**], I.A.Rus [**171**], V. Kolmanovskii şi A. Myshkis [**90**], Y. Hino, S. Murakami şi T Naito, [**74**], J.K. Hale [**71**], S. Mirica [**129**], V. Mureşan [**137**], T.A. Burton [**27**], V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar şi T.D. Vasundhara [**98**], V. Lakshmikantham, L. Wen and B. Zhang [**104**], N.V. Azbelev, V.P. Maksimov şi L.F. Rakhmatullina [**7**], A. Bellen şi M. Zennaro [**14**], E. Egri [**55**].

Menţionăm câteva dintre articolele în care a fost studiate existenţa şi unicitatea soluţiei unor sisteme de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat: G. Karakostas et al. [**81**], T. Kusano [**95**], E. Eder [**53**], D.D. Bainov et al. [**8**], C. Baotong [**11**], L.Skóra [**188**], G. Micula [**126**], J. Poleszczuk [**155**], L.A. Safonov et al [**184**], J. Jankowski [**79**], T. Jankovskyi [**78**], D. Otrocol [**145**]. Rezultatele originale din acest capitol vor fi publicate în lucrarea [**109**].

Pornind de la ecuaţia diferenţială cu argument modificat (2.1.2) studiată în Capitolul 2,

$$y'(x) = f(x, y(x), y(\lambda x))$$

pentru $f \in C([a, b] \times [a, b] \times [a, b]), \lambda \in (0, 1)$, în acest capitol vom studia existenţa soluţiilor unui sistem de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat folosind tehnica operatorilor neexpansivi definiţi pe submulţimea C_L. Fără a pierde din generalitate vom considera un sistem de două ecuaţii diferenţiale cu argument modificat, de forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_1(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(\lambda y_2(x))) \\ \qquad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

cu $x, x_0, y_{1_0}, y_{2_0} \in [a,b], f \in C([a,b]^4; \mathbb{R}^2), \lambda \in (0,1]$.
Pentru orice $L > 0$, definim mulţimea

$$C_L([a,b],[a,b]^2) = \{(y_1,y_2) \in C([a,b],[a,b]) : |y_1(t_1) - y_1(t_2)| \leq L\,|t_1 - t_2|\,,$$
$$|y_2(t_1) - y_2(t_2)| \leq L \cdot |t_1 - t_2|\,,\ \forall t_1, t_2 \in [a,b]\}$$

şi notăm

$$C_x = \max\{x-a, b-x\},\ \forall x \in [a,b].$$

Considerăm spaţiul $(C([a,b],\mathbb{R}^2); \|\cdot\|)$ înzestrat cu norma Cebîşev $\|x\| = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, $\|x_i\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_i(t)|$, $i = 1,2$. Obţinem astfel un spaţiu Banach.

TEOREMA 4.1.72. (**M. Lauran**, [**109**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

(i) $f \in C([a,b]^4; \mathbb{R}^2)$;

(ii) $\exists L_f > 0$, $L_f = \max L_{f_i}$ *cu* $L_{f_i} > 0, i = 1,2$ *astfel încât*

$$|f_i(s,u_1,v_1,w_1) - f_i(s,u_2,v_2,w_2)| \leq L_{f_i}(|u_1-u_2| + |v_1-v_2| + |w_1-w_2|),$$

pentru orice $s, u_i, v_i, w_i \in [a,b], i = 1,2$;

(iii) Dacă $M = \max\limits_{1\leq i\leq 2} \max\{|f_i(s,u_i,v_i,w_i)| : s,u_i,v_i,w_i \in [a,b]\}$ *atunci* $M \leq L$;

(iv) Are loc una din condiţiile:

a) $M \cdot C_{x_0} \leq C_{y_{i_0}}, i = 1,2$;

b) $x_0 = a, M\cdot(b-a) \leq b - C_{y_{i_0}}, f(s,u,v,w) \geq 0, \forall s,u,v,w \in [a,b]$;

b) $x_0 = b, M\cdot(b-a) \leq C_{y_{i_0}} - a, f(s,u,v,w) \geq 0, \forall s,u,v,w \in [a,b]$;

(v) $L_f \cdot (1+\lambda L) \cdot C_{x_0} \leq 1$;

Atunci sistemul (4.1.1) *are cel puţin o soluţie* $y = (y_1,y_2)$ *în* $C_L([a,b],[a,b]^2)$.

Demonstraţie: În mod analog cu Teorema 2.1.44, se arată că submulţimea $C_L([a,b],[a,b]^2)$ este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C([a,b];\mathbb{R}^2); \|\cdot\|_C)$, înzestrat cu norma $\|x\|_C = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, unde $\|x_i\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x_i(t)|$, $i = 1,2$, este norma Cebîşev. Transformăm sistemul (4.1.1) într-un sistem de ecuaţii integrale cu argument modificat de forma:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{1_0} + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(\lambda y_1(s)))ds \\ y_2(x) = y_{2_0} + \int_{x_0}^x f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(\lambda y_2(s)))ds \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Soluţia sistemului (4.1.2) este o funcţie $y \in C_L([a,b];[a,b]^2), y = (y_1,y_2)$.
Definim operatorul $F : C_L([a,b],[a,b]^2) \to C([a,b],[a,b]^2)$ prin

$$(Fy)(t) = ((F_1y)(t), (F_2y)(t)) =$$
$$\Big(y_{1_0} + \int_{x_0}^t f(s,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda y_1(s)))ds, y_{2_0} + \int_{x_0}^t f(s,y_1(s),y_2(s),y_2(\lambda y_2(s)))ds\Big)\,,\ t \in [a,b].$$

Mulţimea punctelor fixe ale operatorului F coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (4.1.2). Arătăm că $C_L([a,b],[a,b]^2)$ este mulţime invariantă în raport cu F, ceea ce înseamnă că $F(C_L([a,b],[a,b]^2)) \subset C_L([a,b],[a,b]^2)$. Vom arăta mai întâi că pentru orice $y=(y_1,y_2) \in C([a,b],[a,b])$ avem $Fy \in C([a,b],[a,b]^2)$, adică $(F_i y(t)) \in C([a,b],[a,b])$, $\forall t \in [a,b], i=1,2$. Prin $x \leq y$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ vom înţelege $x_i \leq y_i$, $\forall \ \ i=1,2$.
Considerăm

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \leq$$

$$\leq \left(|y_{1_0}| + \int_{x_0}^t |f(s,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda y_1(s)))|\, ds, |y_{2_0}| + \int_{x_0}^t |f(s,y_1(s),y_2(s),y_2(\lambda y_2(s)))|\, ds\right)$$

$$\leq (|y_{1_0}| + M \cdot |t-x_0|, |y_{2_0}| + M \cdot |t-x_0|)$$

şi

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \geq$$

$$\geq \left(|y_{1_0}| - \int_{x_0}^t |f(s,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda y_1(s)))|\, ds, |y_{2_0}| - \int_{x_0}^t |f(s,y_1(s),y_2(s),y_2(\lambda y_2(s)))|\, ds\right)$$

$$\geq (|y_{1_0}| - M \cdot |t-x_0|, |y_{2_0}| - M \cdot |t-x_0|)$$

$$\geq \left(\left|y_{1_0} - C_{y_{1_0}}\right|, |y_{1_0}| - C_{y_{2_0}}\right)$$

În baza ipotezei (iv) fiecare componentă a vectorului $|(Fy)(t)|$ este cuprinsă în intervalul $[a,b]$, deci $Fy \in C([a,b],[a,b]^2)$.
Arătăm acum că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y=(y_1,y_2) \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Pentru orice $t_1,t_2 \in [a,b]$ avem

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| = (|(F_1y)(t_1) - (F_1y)(t_2)|, |(F_2y)(t_1) - (F_2y)(t_2)|) \leq$$
$$\left(\int_{t_1}^{t_2} |f(s,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda y_1(s)))|\, ds, \int_{t_1}^{t_2} |f(s,y_1(s),y_2(s),y_2(\lambda y_2(s)))|\, ds\right) \leq$$
$$(M \cdot |t_1-t_2|, M \cdot |t_1-t_2|)$$

ceea ce în baza ipotezei (iii) demonstrează faptul că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y = (y_1,y_2) \in C_L([a,b],[a,b]^2)$.

Pentru orice $y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ avem

$$|(Fy)(t) - (Fz)(t)| = (|(F_1y)(t) - (F_1z)(t)|, |(F_2y)(t) - (F_2z)(t)|) \leq$$
$$\Big(\int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(\lambda y_1(s))) - f(s, z_1(s), z_2(s), z_1(\lambda z_1(s)))|\, ds,$$
$$\int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(\lambda y_2(s))) - f(s, z_1(s), z_2(s), z_2(\lambda z_2(s)))|\, ds\Big) \leq$$
$$\Big(L_{f_1} \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)| + |y_1(\lambda y_1(s)) - z_1(\lambda z_1(s))|)\, ds,$$
$$L_{f_2} \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)| + |y_2(\lambda y_2(s)) - z_2(\lambda z_2(s))|)\, ds\Big) \leq$$
$$\Big(L_{f_1} \int_{x_0}^{t} [(1 + \lambda L_1)\, |y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|]\, ds,$$
$$L_{f_2} \int_{x_0}^{t} [(1 + \lambda L_2)\, |y_2(s) - z_2(s)| + |y_1(s) - z_1(s)|]\, ds\Big) \leq$$
$$\Big(L_{f_1}(1 + \lambda L_1) \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|) ds,$$
$$L_{f_2}(1 + \lambda L_2) \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|) ds\Big)$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq L_f(1 + \lambda L) \cdot C_{x_0} \|y - z\|.$$

ceea ce, din ipoteza (v), conduce la faptul că operatorul F este neexpansiv, deci continuu. Submulţimea $C_L([a,b],[a,b]^2)$ este submulţime închisă, mărginită şi convexă a spaţiului $(C([a,b],\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_C)$ şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder, F are cel puţin un punct fix în $C_L([a,b];[a,b]^2)$. Deci sistemul (4.1.1) are cel puţin o soluţie $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$. □

Observaţia 4.1.1. *Pentru $\lambda = 1$ din sistemul (4.1.1), obţinem un sistem de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat, de tip iterativ, de forma:*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(y_1(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(y_2(x))) \\ \quad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{array}\right. \tag{4.1.3}$$

cu $x, x_0, y_{i_0} \in [a,b], i = 1,2, f \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$.

Următorul rezultat este un rezultat de existenţă a soluţiilor sistemului (4.1.3) în mulţimea $C_L([a,b];[a,b]^2)$.

Teorema 4.1.73. (**M. Lauran**, [**109**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

(i) $f \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$;

(ii) $\exists L_f > 0$, $L_f = \max L_{f_i}$ cu $L_{f_i} > 0, i = 1,2$ astfel încât

$$|f_i(s, u_1, v_1, w_1) - f_i(s, u_2, v_2, w_2)| \leq L_{f_i}(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|),$$

pentru orice $s, u_i, v_i, w_i \in [a, b], i = 1, 2;$

(iii) Dacă $M = \max_{1\le i\le 2}\{|f_i(s, u_i, v_i, w_i)| : s, u_i, v_i, w_i \in [a, b]\}$ *atunci* $M \le L$;

(iv) Are loc una din condiţiile:

a) $M \cdot C_{x_0} \le C_{y_{i_0}}, i = 1, 2;$

b) $x_0 = a, M \cdot (b - a) \le b - C_{y_{i_0}}, f(s, u, v, w) \ge 0, \forall s, u, v, w \in [a, b];$

b) $x_0 = b, M \cdot (b - a) \le C_{y_{i_0}} - a, f(s, u, v, w) \ge 0, \forall s, u, v, w \in [a, b];$

(v) $L_f \cdot (1 + L) \cdot C_{x_0} \le 1$;

Atunci sistemul (4.1.3) *are cel puţin o soluţie* $y = (y_1, y_2)$ *în* $C_L([a, b], [a, b]^2)$.

Demonstraţie: Submulţimea $C_L([a, b]; [a, b]^2)$ este submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C([a, b]; \mathbb{R}^2); \|\cdot\|_C)$ înzestrat cu norma $\|x\|_C = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, $\|x_i\| = \max_{t\in[a,b]} |x_i(t)|$, $i = 1, 2$, fiind norma Cebîşev. Transformăm sistemul (4.1.3) într-un sistem de ecuaţii integrale cu argument modificat de forma:

$$\text{(4.1.4)}\qquad \begin{cases} y_1(x) = y_{1_0} + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = y_{2_0} + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds \end{cases}$$

Soluţia sistemului (4.1.4) este $y = (y_1, y_2) \in C_L([a, b]; [a, b]^2)$. Definim operatorul $F : C_L([a, b], [a, b]^2) \to C([a, b], [a, b]^2)$ prin

$$(Fy)(t) = ((F_1y)(t), (F_2y)(t)) =$$
$$\left(y_{1_0} + \int_{x_0}^{t} f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds, y_{2_0} + \int_{x_0}^{t} f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds\right), \ t \in [a, b].$$

Mulţimea punctelor fixe ale operatorului F coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (4.1.4). Arătăm că $C_L([a, b], [a, b]^2)$ este mulţime invariantă în raport cu F, ceea ce în seamnă că $F(C_L([a, b], [a, b]^2)) \subset C_L([a, b], [a, b]^2)$. Prin $x \le y,\ x, y \in \mathbb{R}^2$ vom înţelege $x_i \le y_i, \forall \ \ i = 1, 2.$

Considerăm

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \le$$
$$\le \left(|y_{1_0}| + \int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds, |y_{2_0}| + \int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\le (|y_{1_0}| + M \cdot |t - x_0|, |y_{2_0}| + M \cdot |t - x_0|)$$

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \ge$$
$$\ge \left(|y_{1_0}| - \int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds, |y_{2_0}| - \int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\ge (|y_{1_0}| - M \cdot |t - x_0|, |y_{2_0}| - M \cdot |t - x_0|)$$
$$\ge \left(\left|y_{1_0} - C_{y_{1_0}}\right|, |y_{1_0}| - C_{y_{2_0}}\right)$$

În baza ipotezei (iv) fiecare componentă a vectorului $|(Fy)(t)|$ este cuprinsă în intervalul $[a, b]$. Deci $Fy \in C([a, b], [a, b]^2)$.

Arătăm că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, pentru orice $y \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Pentru orice $t_1, t_2 \in [a,b]$ avem

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| = (|(F_1y)(t_1) - (F_1y)(t_2)|, |(F_2y)(t_1) - (F_2y)(t_2)|) \leq$$
$$\left(\int_{t_1}^{t_2} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds, \int_{t_1}^{t_2} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds\right) \leq$$
$$(M \cdot |t_1 - t_2|, M \cdot |t_1 - t_2|)$$

ceea ce în baza ipotezei (iii) demonstrează faptul că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Pentru orice $y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ avem

$$|(Fy)(t) - (Fz)(t)| = (|(F_1y)(t) - (F_1z)(t)|, |(F_2y)(t) - (F_2z)(t)|) \leq$$
$$\left(\int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s))) - f(s, z_1(s), z_2(s), z_1(z_1(s)))|\, ds,\right.$$
$$\left.\int_{x_0}^{t} |f(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s))) - f(s, z_1(s), z_2(s), z_2(z_2(s)))|\, ds\right) \leq$$
$$\leq \left(L_{f_1} \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)| + |y_1(y_1(s)) - z_1(z_1(s))|)\, ds,\right.$$
$$\left.L_{f_2} \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)| + |y_2(y_2(s)) - z_2(z_2(s))|)\, ds\right) \leq$$
$$\leq \left(L_{f_1} \int_{x_0}^{t} [(1 + L_1)|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|]\, ds,\right.$$
$$\left.L_{f_2} \int_{x_0}^{t} [(1 + L_2)|y_2(s) - z_2(s)| + |y_1(s) - z_1(s)|]\, ds\right) \leq$$
$$\leq \left(L_{f_1}(1 + L_1) \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|)ds,\right.$$
$$\left.L_{f_2}(1 + L_2) \int_{x_0}^{t} (|y_1(s) - z_1(s)| + |y_2(s) - z_2(s)|)ds\right)$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq L_f(1 + L) \cdot C_{x_0} \|y - z\|.$$

ceea ce, în baza ipotezei (v), conduce la faptul că operatorul F este definit pe o submulţime nevidă, convexă şi compactă a spaţiului Banach $(C([a,b];\mathbb{R}^2); \|\cdot\|_C)$, este neexpansiv, deci continuu şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder, F are cel puţin un punct fix în $C_L([a,b];[a,b]^2)$. Deci sistemul (4.1.3) are cel puţin o soluţie $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$. □

Observaţia 4.1.2. În mod analog se pot trata următoarele sisteme de ecuaţii differenţiale cu argument modificat, de tip iterativ

$$\left\{\begin{array}{c} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_1(x)), y_1(\lambda y_2(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(\lambda y_1(x)), y_2(\lambda y_2(x))) \\ y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{array}\right. \tag{4.1.5}$$

sau

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_2(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_2(\lambda y_1(x))) \\ \qquad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{array}\right. \tag{4.1.6}$$

sau

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_1(x)), y_1(\lambda y_2(x)), y_2(\lambda y_1(x)), y_2(\lambda y_2(x))) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), y_1(\lambda y_1(x)), y_1(\lambda y_2(x)), y_2(\lambda y_1(x)), y_2(\lambda y_2(x))) \\ \qquad y_1(x_0) = y_{1_0},\ y_2(x_0) = y_{2_0} \end{array}\right. \tag{4.1.7}$$

cu $x, x_0, y_{i_0} \in [a, b], i = 1, 2, f \in C([a, b]^4; \mathbb{R}^2), \lambda \in (0, 1)$.

Generalizând aceste sisteme se poate obţine sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\lambda y_1(x)), \dots, y_1(\lambda y_n(x)), \dots, y_n(\lambda y_1(x)), \dots, y_n(\lambda y_n(x))) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1(\lambda y_1(x)), \dots, y_1(\lambda y_n(x)), \dots, y_n(\lambda y_1(x)), \dots, y_n(\lambda y_n(x))) \\ \qquad y_k(x_0) = y_{k_0},\ k = \overline{1, n} \end{array}\right. \tag{4.1.8}$$

cu $x, x_0, y_{i_0} \in [a, b], i = \overline{1, n}, f \in C([a, b]^{n^2+n+1}; \mathbb{R}^n), \lambda \in (0, 1)$.

Exemplul 4.1.1. Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale cu argument modificat

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = -3 + \frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{3}y_2(x) + y_1(\frac{1}{2}y_1(x)) \\ y_2'(x) = -3 + \frac{1}{3}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) + y_2(\frac{1}{2}y_2(x)) \\ \qquad y_1(\frac{1}{3}) = y_2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \end{array}\right. \tag{4.1.9}$$

În acest caz $x \in [0, 1], y_1, y_2 \in C([0, 1], [0, 1]), \lambda = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{3}$. Căutăm soluţiile problemei (4.1.9) în mulţimea:

$$C_1 = \{(y_1, y_2) \in C([0, 1], [0, 1]) : |y_1(t_1) - y_1(t_2)| \le |t_1 - t_2|, \\ |y_2(t_1) - y_2(t_2)| \le |t_1 - t_2|, \forall t_1, t_2 \in [0, 1]\}.$$

Avem $L = 1,\ a = 0,\ b = 1,\ x_0 = \frac{1}{3}$ şi $C_{x_0} = \max\{x_0 - a,\ b - x_0\} = \frac{2}{3}$. Funcţia $f_1(s, u, v, w) = -3 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{3}v + w$ este lipschitziană în sensul ipotezei (ii) a Teoremei 4.1.72, cu constanta $L_{f_1} = 1$, respectiv $f_2(s, u, v, w) = -3 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}v + w$ este lipschitziană cu cu constanta $L_{f_2} = 1$, de unde avem $L_f = 1$.

În condiţiile date avem $L_f[1 + \lambda \cdot L] \cdot C_{x_0} = 1$ deci conform Teoremei 4.1.72 problema (4.1.9) are cel puţin o soluţie $y = (y_1, y_2)$ cu $y_1, y_2 \in C_1[0, 1]$.

Exemplul 4.1.2. Considerăm sistemul de ecuaţii deferenţiale iterative:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(x) = -\dfrac{3}{2} + y_1(x) + y_1(y_1(x)) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -\dfrac{3}{2} + y_1(x) + y_2(x) + y_2(y_2(x)) \\ \qquad y_1\left(\frac{1}{2}\right) = y_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \tag{4.1.10}$$

Considerăm $x \in [0,1], y_1, y_2 \in C([0,1],[0,1]), x_0 = \dfrac{1}{2}$ şi căutăm soluţii în mulţimea

$$C_1 = \{(y_1, y_2) \in C([0,1],[0,1]) : |y_1(t_1) - y_1(t_2)| \le |t_1 - t_2|\,, \\ |y_2(t_1) - y_2(t_2)| \le |t_1 - t_2|\,, \forall t_1, t_2 \in [0,1]\}.$$

În acest caz avem $L = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $C_{x_0} = \dfrac{1}{2}$.

Funcţiile $f_1(s,u,v,w) = -\dfrac{3}{2} + u + v + w$, respectiv $f_2(s,u,v,w) = -\dfrac{3}{2} + u + v + w$ sunt lipschitziane în sensul ipotezei (ii) a Teoremei 4.1.73, cu constantele $L_{f_1} = L_{f_2} = 1$ şi $L_f = 1$.

Ipoteza (v) devine $L_f \cdot (1 + L) \cdot C_{x_0} = 1$. Atunci, în baza Teoremei 4.1.73 problema (4.1.10) are cel puţin o soluţie $y = (y_1, y_2)$ cu $y_1, y_2 \in C_1[0,1]$. În plus, $y = (y_1, y_2) \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\forall x \in [0,1]$ este soluţie pentru problema (4.1.10).

CAPITOLUL 5

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat folosind tehnica operatorilor neexpansivi

Dintre tratatele de bază, având ca tematică sistemele de ecuaţii integrale, menţionăm: T. Lalescu [**105**], I.G. Petrovskii [**150**], K.Yosida [**198**] şi Gh. Marinescu [**124**], A. Haimovici [**69**], C. Corduneanu [**34**],şi [**32**] , Gh. Coman, I.Rus, G. Pavel şi I.A.Rus [**31**], W. Walter [**195**], D.Guo, V. Lakshmikantham şi X. Liu [**66**], W. Hackbusch [**68**], D.V. Ionescu [**76**], R. Precup [**160**], M. Väth [**194**], A. Krasnoselskij [**92**].

Existenţa şi unicitatea soluţiilor unor sisteme de ecuaţii integrale au fost studiate, folosind principiul contracţiei, în diferite lucrări, dintre care menţionăm câteva: M. Dobriţoiu [**48**], E. Brestovanská [**22**], Nguyen L. [**119**], R.Precup [**163**],[]. Teoremele de existentă din paragraful întâi completează rezultatele obţinute de I. Naroşi [**141**], A. Petruşel [**151**], B.G. Pachpatte [**146**], D. Gou [**65**], V.M. Mamedov şi Ja. D. Musaev [**123**], I. Bihari ([**21**]), J. Kwapisz şi M. Turo ([**96**] şi [**97**]), R.K. Nohel, J.A. Wong şi J.S.W. Miller [**196**], şi C. Corduneanu [**33**], [**34**]. În condiţiile acestor teoreme se pot obţine ca şi cazuri particulare teoreme de existenţă referitoare la ecuaţiile integrale cu argument modificat (3.4.1) şi (3.4.2). O parte a rezultatelor originale din acest capitol sunt în curs de publicare, [**110**], [**114**].

1. Existenţa soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat în mulţimea $C_L([a,b],[a,b]^2)$

În acest paragraf, folosind tehnica operatorilor neexpansivi, vom studia existenţa soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat de tip iterativ, de tip Volterra

$$\text{(5.1.1)}\qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_1(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K_2(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds \end{cases}$$

şi, respectiv, de tip Fredholm,

$$\text{(5.1.2)}\qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_{a}^{b} K_1(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_{a}^{b} K_2(x, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds. \end{cases}$$

Lucrăm aici pe mulţimea $C_L([a,b];[a,b]^2)$ din spaţiul Banach $(C([a,b],\mathbb{R}^2);\|\cdot\|_C)$, înzestrat cu norma $\|x\|_C = (\|x_1\|, \|x_2\|)$, unde $\|x_i\| = \max_{t\in[a,b]} |x_i(t)|, i = 1,2$.

Pentru orice $L > 0$, definim mulţimea

$$C_L([a,b],[a,b]^2) = \{(y_1,y_2) \in C([a,b],[a,b]) : |y_i(t_1) - y_i(t_2)| \leq \\ \leq L \cdot |t_1 - t_2|, \ \forall t_1,t_2 \in [a,b], i = 1,2\}$$

şi notăm

$$C_x = \max\{x-a, b-x\}, \ \forall x \in [a,b].$$

TEOREMA 5.1.74. (**M. Lauran**) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

(i) $f \in C([a,b];[a,b]^2)$

(ii) $K \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$

(iii) $\exists L_k > 0,\ L_k = \max\{L_{k_i}\}$ *cu* $L_{k_i} > 0, i = 1,2$ *astfel încât*

$$|K_i(s,u_1,v_1,w_1) - K_i(s,u_2,v_2,w_2)| \leq L_k \cdot (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|),$$

$\forall\, s,u_i,v_i,w_i \in [a,b], i = 1,2;$ *şi*

$\exists L' > 0,\ L' = \max\{L'_i\},\ L'_i > 0, i = 1,2$ *astfel încât*

$$|f_i(t_1) - f_i(t_2)| \leq L' \cdot |t_1 - t_2| \quad i = 1,2 \ \forall t_1,t_2 \in [a,b];$$

(iv) $M + L' \leq L$, *unde am notat*

$$M = \max_{1\leq i\leq 2}\{|K_i(s,u_i,v_i,w_i)| : s,u_i,v_i,w_i \in [a,b]\}$$

(v) Avem $|f_i(x)| \leq f_i(x_0), \forall x \in [a,b],\ i = 1,2$ *şi are loc una din următoarele condiţii*

a) $M \cdot C_{x_0} \leq C_{y_0},\ y_0 = \max(f_1(x_0), f_2(x_0))$;

b) $x_0 = a,\ M(b-a) \leq b - C_{y_0},\ K(s,u_i,v_i,w_i) \geq 0, \forall s,u_i,v_i,w_i \in [a,b], i = 1,2$;

c) $x_0 = b,\ M(b-a) \leq C_{y_0} - a,\ K(s,u_i,v_i,w_i) \geq 0, \forall s,u_i,v_i,w_i \in [a,b], i = 1,2$;

(vi) $L_k \cdot (L+1) \cdot C_{x_0} \leq 1$.

Atunci sistemul (5.1.1) are cel puţin o soluţie în $C_L([a,b];[a,b]^2)$.

Demonstraţie: Considerăm operatorul integral $F : C_L([a,b];[a,b]^2) \to C([a,b];[a,b]^2)$ definit prin

$$(Fy)(t) = ((F_1y)(t),(F_2y)(t)) = (f_1(t) + \int_{x_0}^{t} K(s,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s)))ds, \\ f_2(t) + \int_{x_0}^{t} K(s,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s)))ds)$$

pentru orice $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$ şi $t \in [a,b]$.

Mulţimea punctelor fixe ale operatorului F coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (5.1.1). Arătăm că $C_L([a,b],[a,b]^2)$ este o mulţime invariantă în raport cu F, ceea ce înseamnă că $F(C_L([a,b],[a,b]^2)) \subset C_L([a,b],[a,b]^2)$. Prin $x \le y$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ vom înţelege $x_i \le y_i$, $\forall \ \ i = 1, 2$. Considerăm

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \le$$
$$\le \left(|f_1(t)| + \int_{x_0}^t |K_1(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds, |f_2(t)| + \int_{x_0}^t |K_2(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\le (|f_1(x_0)| + M \cdot |t - x_0|, |f_2(x_0)| + M \cdot |t - x_0|)$$
$$\le (|f_1(x_0)| + M \cdot C_{x_0}, |f_2(x_0)| + M \cdot C_{x_0})$$

şi

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \ge$$
$$\ge \left(|f_1(t)| - \int_{x_0}^t |K_1(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds, |f_2(t)| - \int_{x_0}^t |K_2(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\ge (|f_1(x_0)| - M \cdot |t - x_0|, |f_2(x_0)| - M \cdot |t - x_0|)$$
$$\ge (|f_1(x_0)| - C_{y_0}, |f_2(x_0)| - C_{y_0})$$

Din ipoteza (iv) deducem că fiecare componentă a vectorului $|(Fy)(t)|$ este cuprinsă în intervalul $[a, b]$. Deci $Fy \in C([a,b],[a,b]^2)$.
Arătăm acum că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y = (y_1, y_2) \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Pentru orice $t_1, t_2 \in [a, b]$ avem

$$|(Fy)(t_1) - (Fy)(t_2)| = (|(F_1y)(t_1) - (F_1y)(t_2)|, |(F_2y)(t_1) - (F_2y)(t_2)|) \le$$
$$(|f_1(t_1) - f_1(t_2)| + \textstyle\int_{t_1}^{t_2} |K_1(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))|\, ds,$$
$$|f_2(t_1) - f_2(t_2)| + \textstyle\int_{t_1}^{t_2} |K_2(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))|\, ds) \le$$
$$((L_1' + M) \cdot |t_1 - t_2|, (L_2' + M) \cdot |t_1 - t_2|) \le (L \cdot |t_1 - t_2|, L \cdot |t_1 - t_2|).$$

ceea ce în baza ipotezei (iii) demonstrează faptul că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y \in C_L([a,b],[a,b]^2)$.

Pentru orice $y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)$ avem

$$
\begin{aligned}
&|(Fy)(t)-(Fz)(t)| = (|(F_1y)(t)-(F_1z)(t)|\,,|(F_2y)(t)-(F_2z)(t)|) \leq \\
&\Big(\int_{x_0}^t |K_1(s,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s))) - K_1(s,z_1(s),z_2(s),z_1(z_1(s)))|\,ds, \\
&\int_{x_0}^t |K_2(s,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s))) - K_2(s,z_1(s),z_2(s),z_2(z_2(s)))|\,ds\Big) \leq \\
&\Big(L_{k_1}\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)| + |y_1(y_1(s)) - z_1(z_1(s))|)\,ds, \\
&L_{k_2}\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)| + |y_2(y_2(s)) - z_2(z_2(s))|)\,ds\Big) \leq \\
&\Big(L_{k_1}\int_{x_0}^t [(1+L_1)\,|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|]\,ds, \\
&L_{k_2}\int_{x_0}^t [(1+L_2)\,|y_2(s)-z_2(s)| + |y_1(s)-z_1(s)|]\,ds\Big) \leq \\
&\Big(L_{k_1}(1+L_1)\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|)ds, \\
&L_{k_2}(1+L_2)\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|)ds\Big)
\end{aligned}
$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq L_f(1+L)\cdot C_{x_0}\,\|y-z\|\,.$$

ceea ce, din ipoteza (v), conduce la faptul că operatorul F este neexpansiv, deci continuu, definit pe submulţimea $C_L([a,b],[a,b]^2)$ închisă, mărginită şi convexă din spaţiului Banach $(C([a,b],\mathbb{R}^2),\|\cdot\|_C)$ şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder, F are cel puţin un punct fix în $C_L([a,b];[a,b]^2)$. Aşadar sistemul (5.1.1) are cel puţin o soluţie $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$. □

Dacă sistemul studiat este un sistem de ecuaţii integrale cu argument modificat de tip iterativ de tip Fredholm, atunci se impun condiţii suplimentare asupra nucleului. Considerăm sistemul de ecuaţii integrale de tip Fredholm cu argument modificat, de tip iterativ:

$$
\text{(5.1.2)}\qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_a^b K_1(x,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_a^b K_2(x,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s)))ds, \end{cases}
$$

unde $x,s \in [a,b], y \in C([a,b];[a,b]^2), f \in C([a,b];\mathbb{R}^2), K \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$.

Teorema 5.1.75. (**M. Lauran** [**110**]) *Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii*

(i) $K \in C([a,b]^4;\mathbb{R}^2)$ *şi* $f \in C([a,b];[a,b]^2)$;

(ii) $\exists L_k > 0,\ L_k = \max\{L_{k_i}\}$ *cu* $L_{k_i} > 0, i=1,2$ *astfel încât*

$$|K_i(t_1,u,v,w) - K_i(t_2,u,v,w)| \leq L_k\cdot|t_1-t_2|\,,$$

$\forall\, t_1, t_2 \in [a,b], i = 1,2$ *şi*

$\exists L' > 0,\ L' = \max\{L'_i\},\ L'_i > 0, i = 1,2$ *astfel încât*

$$|f_i(t_1) - f_i(t_2)| \le L' \cdot |t_1 - t_2| \quad i = 1,2,\ \forall t_1, t_2 \in [a,b];$$

(iii) $\exists L'_k > 0,\ L'_k = \max\{L'_{k_i}\}$ *cu* $L'_{k_i} > 0, i = 1,2$ *astfel încât*

$$|K_i(s,u_1,v_1,w_1) - K_2(s,u_2,v_2,w_2)| \le L'_k \cdot (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|),$$

$\forall\, s, u_i, v_i, w_i \in [a,b], i = 1,2;$

(iv) $L' + L_k(b-a) \le L$, *unde*

$$M = \max_{1\le i\le 2}\{|K_i(s,u_i,v_i,w_i)| : s, u_i, v_i, w_i \in [a,b]\}.$$

(v) Avem $|f_i(x)| \le f_i(x_0), \forall x \in [a,b],\ i = 1,2$ *şi are loc una din următoarele con diţii*

a) $M \cdot C_{x_0} \le C_{y_0},\ y_0 = \max(f_1(x_0), f_2(x_0))$*;*

b) $x_0 = a,\ M(b-a) \le b - C_{y_0},\ K(s,u_i,v_i,w_i) \ge 0, \forall s, u_i, v_i, w_i \in [a,b], i = 1,2$*;*

c) $x_0 = b,\ M(b-a) \le C_{y_0} - a,\ K(s,u_i,v_i,w_i) \ge 0, \forall s, u_i, v_i, w_i \in [a,b], i = 1,2$*;*

(vi) $L'_k \cdot (L+1) \cdot (b-a) \le 1$.

Atunci sistemul (5.1.2) are cel puţin o soluţie în $C_L([a,b];[a,b]^2)$.

Demonstraţie: Considerăm operatorul integral $F : C_L([a,b];[a,b]^2) \to C([a,b];[a,b]^2)$ definit prin

$$(Fy)(t) = ((F_1y)(t), (F_2y)(t)) = (f_1(t) + \int_a^b K(s, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)))ds,$$
$$f_2(t) + \int_a^b K(s, y_1(s), y_2(s), y_2(y_2(s)))ds)$$

pentru orice $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$ şi $t \in [a,b]$.

Mulţimea punctelor fixe ale operatorului F coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (5.1.1). Arătăm că $C_L([a,b],[a,b]^2)$ este mulţime invariantă în raport cu F, ceea ce în seamnă că $F(C_L([a,b],[a,b]^2)) \subset C_L([a,b],[a,b]^2)$. Prin $x \le y,\ x, y \in \mathbb{R}^2$ vom înţelege $x_i \le y_i, \forall\ \ i = 1,2$.

Considerăm

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \le$$
$$\le \left(|f_1(t)| + \textstyle\int_a^b |K_1(s,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s)))|\, ds, |f_2(t)| + \int_a^b |K_2(s,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\le (|f_1(x_0)| + M\cdot(b-a), |f_2(x_0)| + M\cdot(b-a))$$

şi

$$|(Fy)(t)| = (|(F_1y)(t)|, |(F_2y)(t)|) \ge$$
$$\ge \left(|f_1(t)| - \textstyle\int_a^b |K_1(s,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s)))|\, ds, |f_2(t)| - \int_a^b |K_2(s,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s)))|\, ds\right)$$
$$\ge (|f_1(x_0)| - M\cdot(b-a), |f_2(x_0)| - M\cdot(b-a))$$
$$\ge (|f_1(x_0)| - C_{y_0}, |f_2(x_0)| - C_{y_0})$$

Din ipoteza (iv) deducem că fiecare componentă a vectorului $|(Fy)(t)|$ este cuprinsă în intervalul $[a,b]$. Deci $Fy \in C([a,b],[a,b]^2)$.
Arătăm că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Pentru orice $t_1,t_2 \in [a,b]$ avem

$$\begin{gathered}
|(Fy)(t_1)-(Fy)(t_2)| = (|(F_1y)(t_1)-(F_1y)(t_2)|\,,|(F_2y)(t_1)-(F_2y)(t_2)|) \leq \\
(|f_1(t_1)-f_1(t_2)| + \textstyle\int_a^b |K_1(t_1,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s))) - K_1(t_2,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s)))|\,ds, \\
|f_2(t_1)-f_2(t_2)| + \textstyle\int_a^b |K_2(t_1,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s))) - K_2(t_2,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s)))|\,ds) \leq \\
((L_1' + L_{k_1}(b-a))\cdot|t_1-t_2|\,,(L_2'+L_{k_2}(b-a))\cdot|t_1-t_2|)
\end{gathered}$$

ceea ce în baza ipotezei (iv) demonstrează faptul că $Fy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $\forall y \in C_L([a,b],[a,b]^2)$.
Pentru orice $y,z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, $y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)$ avem

$$\begin{gathered}
|(Fy)(t)-(Fz)(t)| = (|(F_1y)(t)-(F_1z)(t)|\,,|(F_2y)(t)-(F_2z)(t)|) \leq \\
(\textstyle\int_a^b |K_1(t,y_1(s),y_2(s),y_1(y_1(s))) - K_1(t,z_1(s),z_2(s),z_1(z_1(s)))|\,ds, \\
\textstyle\int_a^b |K_2(t,y_1(s),y_2(s),y_2(y_2(s))) - K_2(t,z_1(s),z_2(s),z_2(z_2(s)))|\,ds) \leq \\
(L_{k_1}' \textstyle\int_a^b (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)| + |y_1(y_1(s)) - z_1(z_1(s))|)\,ds, \\
L_{k_2}' \textstyle\int_a^b (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)| + |y_2(y_2(s)) - z_2(z_2(s))|)\,ds) \leq \\
(L_{k_1}' \textstyle\int_a^b [(1+L_1)\,|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|]\,ds, \\
L_{k_2}' \textstyle\int_a^b [(1+L_2)\,|y_2(s)-z_2(s)| + |y_1(s)-z_1(s)|]\,ds) \leq \\
(L_{k_1}'(1+L_1) \textstyle\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|)ds, \\
L_{k_2}'(1+L_2) \textstyle\int_{x_0}^t (|y_1(s)-z_1(s)| + |y_2(s)-z_2(s)|)ds)
\end{gathered}$$

Trecând la maximum în ultima inegalitate, obţinem

$$\|Fy - Fz\| \leq L_k'(1+L)\cdot(b-a)\,\|y-z\|\,.$$

ceea ce, în baza ipotezei (vi), demonstrează faptul că operatorul F, definit pe submulţimea $C_L([a,b],[a,b]^2)$ închisă, mărginită şi convexă din spaţiului Banach $(C([a,b],\mathbb{R}^2),\|\cdot\|_C)$ este neexpansiv, deci continuu şi conform teoremei de punct fix a lui Schauder, F are cel puţin un punct fix în $C_L([a,b];[a,b]^2)$. Deci sistemul (5.1.2) are cel puţin o soluţie $y \in C_L([a,b];[a,b]^2)$. □

Observaţia 5.1.1. *Se pot extinde rezultatele de existenţă a soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat, la un sistem de forma:*

$$\left\{\begin{aligned}
y_1(x) &= f_1(x) + \int_0^b K_1(x,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda s),y_2(\lambda s)))ds \\
y_2(x) &= f_2(x) + \int_0^b K_2(x,y_1(s),y_2(s),y_1(\lambda s),y_2(\lambda s)))ds
\end{aligned}\right. \tag{5.1.3}$$

unde $x,s \in [0,b],\ y,f \in C([0,b];[0,b]^2), K \in C([0,b]^5;\mathbb{R}^2), \lambda \in (0,1)$.

2. Existenţa şi unicitatea soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale cu argument modificat în $C_L([a,b],[a,b]^2)$

Considerăm sistemul de ecuaţii integrale de tip Fredholm de forma

$$\begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_a^b K_1(x, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_a^b K_2(x, y_1(y_2(s)), y_2(y_2(s)))ds \end{cases} \tag{5.2.1}$$

unde $x \in [a,b], y_i : [a,b] \to [a,b], f_i \in C([a,b],[a,b]^2), i = \overline{1,2}, K_i \in C([a,b]^3;[a,b]^2)$.

Vom demonstra, folosind teorema de punct fix a lui Perov, un rezultat privind existenţa şi unicitatea soluţiei sistemului de ecuaţii integrale cu argument modificat (5.2.1).

Pentru $L > 0$ considerăm mulţimea

$$C_L([a,b],[a,b]^2) = \{(y_1,y_2) \in C([a,b],[a,b]) : |y_i(t_1) - y_i(t_2)| \leq \\ \leq L \cdot |t_1 - t_2|\,,\ \forall t_1,t_2 \in [a,b], i = 1,2\}$$

Spaţiul $(C_L([a,b],[a,b]^2), d_C)$ este spaţiu metric complet, unde
$d_C : C_L([a,b],[a,b]^2) \times C_L([a,b],[a,b]^2) \to \mathbb{R}^2$ este dfinită prin

$$d_C((y_1,y_2),(z_1,z_2)) = \begin{pmatrix} \|y_1 - z_1\|_C \\ \|y_2 - z_2\|_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\limits_{t\in[a,b]} |y_1(t) - z_1(t)| \\ \max\limits_{t\in[a,b]} |y_2(t) - z_2(t)| \end{pmatrix}$$

pentru $(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in C_L([a,b],[a,b]^2)$. Ca de obicei, notăm
$C_x = \max\{x-a, b-x\}$, $\forall x \in [a,b]$.

Teorema 5.2.76. (**M. Lauran** [**110**]) *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile*

i) $f \in C([a,b],[a,b]^2)$, $K \in C([a,b]^3,[a,b]^2)$,

ii) $\exists\ L_{1j}, L_{2j} > 0$, $j = 1,2$ *astfel încât*

$$|K_1(t,u_1,u_2) - K_1(t,v_1,v_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} L_{1j}\,|u_j - v_j|,$$

$$|K_2(t,u_1,u_2) - K_2(t,v_1,v_2)| \leq \sum_{j=1}^{2} L_{2j}\,|u_j - v_j|$$

pentru orice $t, u_i, v_i \in [a,b]$, $i = 1,2$;

şi

$\exists\ L_K > 0$ *astfel încât* $|K_i(t_1,u,v) - K_i(t,u,v)| \leq L_K \cdot |t_1 - t_2|$, $\forall t_1,t_2 \in [a,b]$, $i = 1,2$

iii) $\exists\ L_f > 0$ *astfel încât* $|f_i(t_1) - f_i(t_2)| \leq L_f \cdot |t_1 - t_2|$, $\forall t_1,t_2 \in [a,b]$, $i = 1,2$,

iv) $L_f + L_K \cdot (b-a) \leq L$;

v) Pentru $x_0 \in [a,b]$ *pentru care* $|f_i(x)| \leq f_i(x_0), \forall x \in [a,b]$, $i = 1,2$, *are loc una din următoarele condiţii* *a)* $M \cdot C_{x_0} \leq C_{y_0}$, $y_0 = \max(f_1(x_0), f_2(x_0))$ *şi* $M = \max\{|K_i(t,u,v)| : t,u,v \in [a,b]\}$*;*

b) $x_0 = a$, $M(b-a) \leq b - C_{y_0}$, $K(t,u_i,v_i) \geq 0$, $\forall s, u_i, v_i \in [a,b], i = 1,2$*;*

c) $x_0 = b$, $M(b-a) \leq C_{y_0} - a$, $K(s,u_i,v_i) \geq 0$, $\forall s, u_i, v_i \in [a,b], i = 1,2$*;*

vi) valorile proprii ale matricii

$$Q = \begin{pmatrix} (b-a)(L_{11} + L_{12} \cdot L) & (b-a)L_{12} \\ (b-a)L_{21} & (b-a)(L_{21} \cdot L + L_{22}) \end{pmatrix}$$

se găsesc în discul unitate deschis din plan complex.
Atunci sistemul (5.2.1) admite soluţie unică în $C([a,b],[a,b]^2)$*.*

Demonstraţie: Definim operatorul integral $H : C_L([a,b],[a,b]^2) \to C([a,b],[a,b]^2)$ prin

$$(Hy)(t) = \begin{pmatrix} (H_1y)(t) \\ (H_2y)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) + \int\limits_a^b K_1(t, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))ds \\ f_2(t) + \int\limits_a^b K_2(t, y_1(y_2(s)), y_2(y_2(s)))ds \end{pmatrix}, \quad t \in [a,b]$$

Vom demonstra că are loc proprietatea de invarianţă: $H(C([a,b],[a,b]^2)) \subset C([a,b],[a,b]^2)$, ceea ce înseamnă că pentru orice $y \in C([a,b],[a,b]^2)$ trebuie să avem $Hy \in C([a,b],[a,b]^2)$, adică $(H_iy)(t) \in C([a,b],[a,b]^2)$, $\forall t \in [a,b]$, $i = 1,2$.
Pentru $t \in [a,b]$ obţinem

$$|(H_1y)(t)| \leq |f_1(t)| + \int\limits_a^b |K_1(t, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))|\, ds \leq f_1(x_0) + M(b-a) \leq b$$
$$|(H_1y)(t)| \geq |f_1(t)| - \int\limits_a^b |K_1(t, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))|\, ds \geq f_1(x_0) - C_{y_0} \geq a$$

Deci $(H_1y)(y) \in [a,b]$ şi în mod identic se domstrează că $(H_2y)(y) \in [a,b]$ şi din ipoteza (i) avem $Hy \in C([a,b],[a,b]^2)$. Pentru $t_1, t_2 \in [a,b], t_1 \leq t_2$ demonstrăm că $H(C_L([a,b],[a,b]^2)) \subset C_L([a,b],[a,b]^2)$.

$$\|(Hy)(t_1) - (Hy)(t_2)\|_{\mathbb{R}^2} = \|((H_1y)(t_1) - (H_1y)(t_2), (H_2y)(t_1) - (H_2y)(t_2))\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$|(H_1y)(t_1) - (H_1y)(t_2)| \leq |f_1(t_1) - f_1(t_2)| +$$
$$+ \int\limits_a^b |K_1(t_1, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s))) - K_1(t_2, y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))|\, ds \leq$$
$$\leq [L_f + L_K(b-a)]\, |t_1 - t_2| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$$

Analog $|(H_2y)(t_1) - (H_2y)(t_2)| \leq L \cdot |t_1 - t_2|$. Obţinem astfel că

$$\|(Hy)(t_1) - (Hy)(t_2)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|(L \cdot |t_1 - t_2|\,, L \cdot |t_1 - t_2|)\|_{\mathbb{R}^2} = L \cdot |t_1 - t_2|$$

De unde obţinem că operatorul H este L-Lipschitz, ceea ce înseamnă că $Hy \in C_L([a,b],[a,b]^2)$.
Verificăm condiţiile din Teorema lui Perov. Pentru orice $t \in [a,b]$ şi $y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$ avem:

$$d_C(Hy, Hz) \;\; = \;\; \begin{pmatrix} \|H_1y - H_1z\|_C \\ \|H_2y - H_2z\|_C \end{pmatrix}$$

$$|(H_1y)(t)-(H_1z)(t)| \leq \int_a^b |K_1(t,y_1(y_1(s)),y_2(y_1(s)))-K_1(t,z_1(z_1(s)),z_2(z_1(s)))|\,ds \leq$$
$$\leq \int_a^b [L_{11}\,|y_1(y_1(s))-z_1(z_1(s))|+L_{12}\,|y_2(y_1(s))-z_2(z_1(s))|]ds \leq$$
$$\leq \int_a^b [L_{11}\,|y_1(y_1(s))-z_1(z_1(s))|+L_{12}\,|y_2(y_1(s))-y_2(z_1(s))|+L_{12}\,|y_2(z_1(s))-z_2(z_1(s))|]ds$$
$$\leq \int_a^b [L_{11}\,\|y_1-z_1\|+L_{12}\cdot L\,|y_1(s)-z_1(s)|+L_{12}\,|y_2(z_1(s))-z_2(z_1(s))|]ds$$
$$\leq (b-a)(L_{11}+L_{12}L)\cdot\|y_1-z_1\|_C+(b-a)L_{12}\cdot\|y_2-z_2\|_C$$

În mod similar se obţine:

$$|(H_2y)(t)-(H_2z)(t)| \leq (b-a)L_{21}\cdot\|y_1-z_1\|_C+(b-a)(L_{21}L+L_{22})\cdot\|y_2-z_2\|_C$$

Obţinem astfel $d_C(Hy,Hz)\leq Qd_C(y,z)$, $\forall y,z\in C_L([a,b],[a,b]^2)$, unde

$$Q=\begin{pmatrix} (b-a)(L_{11}+L_{12}\cdot L) & (b-a)L_{12} \\ (b-a)L_{21} & (b-a)(L_{21}\cdot L+L_{22}) \end{pmatrix}$$

Din ipoteza (vi) valorile proprii ale matricii Q se găsesc în discul unitar deschis din planul complex şi în acest caz $Q^k\to 0$, când $k\to\infty$. Din teorema de punct fix a lui Perov avem că operatorul $H: C_L([a,b],[a,b]^2)\to C_L([a,b],[a,b]^2)$ are un punct fix unic care este soluţia sistemului (5.2.1) în $C_L([a,b],[a,b]^2)$. $\square$

Exemplul 5.2.1. Fie sistemul de ecuaţii integrale

$$\left\{\begin{array}{l} y_1(x)=\frac{x}{2}+\int_0^1\left[\dfrac{x+1}{3}\cdot y_1(y_1(x))+\dfrac{2x+1}{6}y_2(y_1(x))\right]dx \\ y_2(x)=\frac{x^2}{4}+\int_0^1\left[\dfrac{x+1}{7}\cdot y_1(y_2(x))+\dfrac{3x+1}{14}y_2(y_2(x))\right]dx \end{array}\right. \tag{5.2.2}$$

În acest caz avem $a=0,b=1$, $K\in C([0,1]^3,[0,1]^2)$, $K=(K_1(x,u_1,u_2);K_2(x,u_1,u_2))$,

$$K_1(x,u_1,u_2)=\frac{x+1}{3}\cdot u_1+\frac{2x+1}{6}\cdot u_2;\ K_2(x,u_1,u_2)=\frac{x+1}{7}\cdot u_1+\frac{3x+1}{14}\cdot u_2.$$

$f\in C([0,1],[0,1]^2)$, $f=(f_1(x),f_2(x))$, $f_1(x)=\dfrac{x}{2}$, $f_2(x)=\dfrac{x^2}{4}$. Constantele Lipschitz sunt $L_{11}=\frac{2}{3}$, $L_{12}=\frac{1}{2}$, $L_{21}=L_{22}=\frac{2}{7}$, iar $L_K=\frac{1}{3}$, $L_f=\frac{1}{2}$, $M=\frac{2}{3}$. Din condiţia (iv) obţinem $L\geq\frac{5}{6}$ şi

$$Q=\begin{pmatrix} \dfrac{4+3L}{6} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{7} & \dfrac{2L+2}{7} \end{pmatrix}.$$

cu valorile proprii

$$r_1:=\frac{1}{84}(33L+40+\sqrt{1599L^2+288L+1264}),$$
$$r_2:=\frac{1}{84}(33L+40-\sqrt{1599L^2+288L+1264})$$

Pentru a avea $r_1,r_2\in(-1,1)$ trebuie ca $1\leq L<17,6394$, caz în care sistemul (5.2.2) are soluţie unică.

Fie sistemul

$$(5.2.3)\qquad \begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int\limits_a^b K_1(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_2(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int\limits_a^b K_2(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_2(s)))ds \end{cases}$$

$x \in [a,b]$, $f \in C([a,b],[a,b]^2)$, $y_1, y_2 \in C([a,b],[a,b])$,

TEOREMA 5.2.77. (**M. Lauran** [**110**]) *Presupunem că sunt îndeplinite condiţiile*

i) $f \in C([a,b],[a,b]^2)$; $K \in C([a,b]^5,[a,b]^2)$;

ii) $\exists\ L_{1j}, L_{2j} > 0,\ j = 1,2$ *astfel încât*

$$|K_1(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - K_1(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \le \sum_{j=1}^{4} L_{1j}\,|u_j - v_j|,$$

$$|K_2(t,u_1,u_2,u_3,u_4) - K_2(t,v_1,v_2,v_3,v_4)| \le \sum_{j=1}^{4} L_{2j}\,|u_j - v_j|$$

pentru orice $t, u_i, v_i \in [a,b]$, $i = \overline{1,4}$;

şi

$\exists\ L_K > 0$ *astfel încât* $|K_i(t_1,u_1,u_2,u_3,u_4) - K_i(t_2,u_1,u_2,u_3,u_4)| \le L_K \cdot |t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \in [a,b],\ i = 1,2$

iii) $\exists\ L_f > 0$ *astfel încât* $|f_i(t_1) - f_i(t_2)| \le L_f \cdot |t_1 - t_2|$, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$, $i = 1,2,$

iv) $L_f + L_K \cdot (b-a) \le L$;

v) Pentru $x_0 \in [a,b]$ *pentru care* $|f_i(x)| \le f_i(x_0), \forall x \in [a,b]$, $i = 1,2$, *are loc una din următoarele con diţii*

a) $M \cdot C_{x_0} \le C_{y_0}$, $y_0 = \max(f_1(x_0), f_2(x_0))$ *şi* $M = \max\{|K_i(t,u_1,u_2,u_3,u_4)| : t, u_j \in [a,b], j = \overline{1,4}\}$;

b) $x_0 = a$, $M(b-a) \le b - C_{y_0}$, $K(t,u_1,u_2,u_3,u_4) \ge 0$, $\forall s, u_j \in [a,b], j = \overline{1,4}$;

c) $x_0 = b$, $M(b-a) \le C_{y_0} - a$, $K(t,u_1,u_2,u_3,u_4) \ge 0$, $\forall s, u_j \in [a,b], j = \overline{1,4}$;

vi) valorile proprii ale matricii

$$Q = \begin{pmatrix} (b-a)(L_{11} + L_{13}(L+1)) & (b-a)(L_{12} + L_{14}(L+1)) \\ (b-a)(L_{21} + L_{23}(L+1)) & (b-a)(L_{22} + L_{24}(L+1)) \end{pmatrix}$$

se găsesc în discul unitate deschis din plan complex.
Atunci sistemul (5.2.3) admite soluţie unică în $C([a,b],[a,b]^2)$.

Demonstraţie: Considerăm operatorul $H : C_L([a,b],[a,b]^2) \to C([a,b],[a,b]^2)$ definit prin

$$(Hy)(t) = ((H_1y)(t), (H_2y)(t)),\ \ t \in [a,b],$$

$$(H_1y)(t) = f_1(t) + \int\limits_a^b K_1(t, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_2(s)))ds$$

$$(H_2y)(t) = f_2(2) + \int\limits_a^b K_2(t, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_2(s)))ds$$

Din condiţiile (i)-(v) deducem că operatorul este bine definit şi în mod similar demonstraţiei teoremei 5.2.76 obţinem că operatorul este L-Lipschitzian, deci $H(C_L([a,b],[a,b]^2)) \subset C_L([a,b],[a,b]^2)$.
Demostrăm că operatorul este Q-Lipschitzian. Pentru $t \in [a,b]$ şi $y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$ avem:

$$d_C(Hy, Hz) \;=\; \begin{pmatrix} \|H_1y - H_1z\|_C \\ \|H_2y - H_2z\|_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&|(H_1y)(t) - (H_1z)(t)| \leq \\
&\leq \int_a^b |K_1(t, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_2(s))) - K_1(t, z_1(s), z_2(s), z_1(z_1(s)), z_2(z_2(s)))|\, ds \leq \\
&\leq \int_a^b [L_{11}\,|y_1(s) - z_1(s)| + L_{12}\,|y_2(s) - z_2(s)| + L_{13}\,|y_1(y_1(s)) - z_1(z_1(s))| + \\
&+ L_{14}\,|y_2(y_2(s)) - z_2(z_2(s))|]ds \leq \\
&\leq \int_a^b [L_{11}\,|y_1(s) - z_1(s)| + L_{12}\,|y_2(s) - z_2(s)| + L_{13}\,|y_1(y_1(s)) - y_1(z_1(s))| \\
&+ L_{13}\,|y_1(z_1(s)) - z_1(z_1(s))| + L_{14}\,|y_2(y_2(s)) - y_2(z_2(s))| + L_{14}\,|y_2(z_2(s)) - z_2(z_2(s))|]ds \\
&\leq (b-a)[L_{11} + L_{13}(L+1)] \cdot \|y_1 - z_1\|_C + (b-a)[L_{12} + L_{14}(L+1)] \cdot \|y_2 - z_2\|_C
\end{aligned}$$

În mod identic se obţine

$$|(H_2y)(t) - (H_2z)(t)| \leq (b-a)[L_{21}+L_{23}(L+1)]\cdot\|y_1 - z_1\|_C + (b-a)[L_{22}+L_{24}(L+1)]\cdot\|y_2 - z_2\|_C$$

Obţinem astfel $d_C(Hy, Hz) \leq Q \cdot d_C(y, z)$, $\forall y, z \in C_L([a,b],[a,b]^2)$, unde

$$Q = \begin{pmatrix} (b-a)[L_{11} + L_{13}(L+1)] & (b-a)[L_{12} + L_{14}(L+1)] \\ (b-a)[L_{21} + L_{23}(L+1)] & (b-a)[L_{22} + L_{24}(L+1)] \end{pmatrix}$$

Din ipoteza (vi) valorile proprii ale matricii Q se găsesc în discul unitar deschis din planul complex şi în acest caz $Q^k \to 0$, când $k \to \infty$. Din teorema de punct fix a lui Perov avem că operatorul $H : C_L([a,b],[a,b]^2) \to C_L([a,b],[a,b]^2)$ are un punct fix unic care este soluţia sistemului (5.2.1) în $C_L([a,b],[a,b]^2)$. □

Exemplul 5.2.2.

$$\left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= \tfrac{x}{3} + \int_0^1 \left[\frac{x}{10}\cdot(y_1(x) + y_2(x)) + \frac{x+1}{20}(y_1(y_1(x)) + y_2(y_2(x)))\right] dx \\ y_2(x) &= \tfrac{x^2}{9} + \int_0^1 \left[\frac{x+1}{9}(y_1(x) + y_2(x)) + \frac{3x+1}{18}(y_1(y_1(x)) + y_2(y_2(x)))\right] dx \end{aligned} \right. \tag{5.2.4}$$

În acest caz avem $a = 0, b = 1$, $K \in C([0,1]^5, [0,1]^2)$,
$K = (K_1(x, u_1, u_2, u_3, u_4), K_2(x, u_1, u_2, u_3, u_4))$;

$K_1(x, u_1, u_2, u_3, u_4) = \dfrac{x}{10} \cdot (u_1 + u_2) + \dfrac{x+1}{20} \cdot (u_3 + u_4)$

$K_2(x, u_1, u_2, u_3, u_4) = \dfrac{x+1}{9} \cdot (u_1 + u_2) + \dfrac{3x+1}{18} \cdot (u_3 + u_4)$

$f \in C([0,1],[0,1]^2)$, $f = (f_1(x), f_2(x))$, $f_1(x) = \frac{x}{3}$, $f_2(x) = \frac{x^2}{9}$.

Constantele Lipschitz sunt $L_{11} = L_{12} = L_{13} = L_{14} = \dfrac{1}{10}$, $L_{21} = L_{22} = L_{23} = L_{24} = \dfrac{2}{9}$,

$L_K = \frac{1}{10}$, $L_f = \frac{1}{3}$, iar $M = \frac{4}{5}$. Matricea

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2+L}{10} & \frac{2+L}{10} \\ \frac{4+L}{9} & \frac{4+L}{9} \end{pmatrix},$$

are valorile proprii

$$r_1 = 0,\ r_2 = \frac{19L+58}{90}.$$

Matricea Q este convergentă la 0 dacă $\frac{2+L}{10} + \frac{4+L}{9} < 1$. Obţinem astfel din (iv) $L \geq \frac{13}{30}$ şi din faptul că $r_1, r_2 \in (-1,1)$ deducem $\frac{13}{30} \leq L \leq \frac{32}{19}$. Pentru $L = 1$ sistemul (5.2.4) are soluţie unică în $C_1([0,1],[0,1]^2)$ şi această soluţie poate fi obţinută prin şirul aproximaţiilor succesive dat de

$$y_{k+1} = Hy_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

unde operatorul H este definit ca în teorema 5.2.77.

OBSERVAŢIA 5.2.1. *Rezultatele de existenţă şi unicitate a soluţiilor sistemelor de ecuaţii integrale pot fi extinse la alte tipuri de sisteme de ecuaţii integrale iterative, de forma:*

$$\begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int_a^b K_1(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int_a^b K_2(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_1(s)), y_2(y_1(s)))ds \end{cases} \tag{5.2.5}$$

$x \in [a,b],\ f \in C([a,b],[a,b]^2),\ y_1, y_2 \in C([a,b],[a,b]),$

sau

$$\begin{cases} y_1(x) = f_1(x) + \int_a^b K_1(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_2(s)), y_2(y_2(s)))ds \\ y_2(x) = f_2(x) + \int_a^b K_2(x, y_1(s), y_2(s), y_1(y_2(s)), y_2(y_2(s)))ds \end{cases} \tag{5.2.6}$$

$x \in [a,b],\ f \in C([a,b],[a,b]^2),\ y_1, y_2 \in C([a,b],[a,b]),$

Bibliografie

[1] R.P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 141, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2004.

[2] R.P. Agarwal and D. O'Regan, *Infinite interval problems for Differential, Difference and Integral equations*, Kluwer Accademic Publishers, Dordrecht, 2001.

[3] M. Ambro, *Aproximarea soluţiilor unei ecuaţii integrale cu argument modificat*, Studia Babeş-Bolyai,Cluj-Napoca, Mathematica, **2** (1978), 26–32.

[4] A. Ambrosetti, *Variational methods and nonlinear problems: classical results and recent advances. Topological Nonlinear Analysis*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1995.

[5] Sz. András, *Ecuaţii integrale Fredholm-Volterra*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2005.

[6] P.M. Anselone, *Nonlinear integral equations*, The University of Wisconsin Press, 1964.

[7] N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, and L.F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations: Methods and Applications*, Hindawi Publ. Corp., Cairo, 2007.

[8] D.D. Bainov, S.G. Hristova, S.G. Khristova, and D.D. Bajnov, *Monotone-iterative techniques of Lakshmikantham for a boundary value problem for system of differential equations with maxima*, J. Math Anal. Appl., **190 (2)** (1995), 391–401.

[9] K. Balachandran and M.D. Julie, *Asymptotic stability of solutions of nonlinear integral equations*, Nonlinear Functional Analysis and Appl., **13 (2)** (2008), 311–322.

[10] J. Banas, J. Rocha, and K.B. Sadarangani, *Solvability of nonlinear integral equation of Volterra type*, Journal of Comp. and Applied Math., **157** (2003), 31–48.

[11] C. Baotong, *Functional differential equations of mixed type in Banach spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **94** (1995), 47–54.

[12] A. Belarbi, M. Benchohra, S. Hamani, S., and K. Ntouyas, *Perturbed functional differential equations with fractional order*, Commun. Appl. Anal., **11 (3-4)** (2007), 429–440.

[13] A. Belarbi, M. Benchohra, and A. Ouahab, *Uniqueness results for fractional functional differential equations with infinite delay in Frechet spaces*, Appl. Anal., **85 (12)** (2006), 1459–1470.

[14] A. Bellen and M. Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*, Oxford University Press, New York, 2003.

[15] M. Benchohra and M. A. Darwish, *On unique solvability of quadratic integral equations with linear modification of the argument*, Miskolc Math. Notes, **10 (1)** (2009), 3–10.

[16] M. Benchohra and S. Hamani, *Boundary value problems for differential equation with fractional order and nonlinear integral equation*, Commentationes Mathematicae, **49 (2)** (2009), 147–159.

[17] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas, and A. Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Anal. Appl., **338 (2)** (2008), 1340–1350.

[18] V. Berinde, *Iterative Approximation of fixed point*, 2-nd Ed.Springer Verlag, New York, 2007.

[19] V. Berinde, *Existence theorems and approximation of solutions of some first order iterative differential equations*, Miskolc Math. Notes, **11 (1)** (2011), 13–26.

[20] S.R. Bernfeld and V. Lakshmikantham, *An introduction to nonlinear boundary value problem*, Ed. Academic Press. Inc, 1974.

[21] I. Bihari, *Notes on a nonlinear integral equation*, Stud. Sci. Math. Hung., **2 (1,2)** (1967), 1–6.

[22] E. Brestovanska, *Qualitative behaviour of an integral equation related to some epidemic model*, Demonstratio Mathematica, **36 (3)** (2003), 603–610.

[23] H. Brezis, *Analyse fonctionelle, théorie et applications*, Masson, Paris-Milan-Barcelone-Bonn, 1992.

[24] R.E. Bruck, *Properties of fixed point sets of nonexpansive mappins in Banach spaces*, Trans.Amer. Math. Soc., **179** (1973), 251–262.

[25] A. Buică, *Existence and continuous dependence of solutions of some functional-differential equation*, Seminar of Fixed Point Theory, **3** (1995), 1–14.

[26] T.A. Burton, *Volterra integral and differential equations*, Accademic Press, New York, 1983.

[27] T.A. Burton, *Stability by fixed point theory for functional differential equations*, Dover Publications, Inc, 2006.

[28] T.A. Burton, *Liapunov functionals for integral equations*, Springer, 2008.

[29] C. O. Chidume, *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations*, Springer Verlag, New York, 2009.

[30] C.E. Chidume and Şt. Măruşter, *Iterative methods for the computation of fixed points of demicontractive mappings*, J. Comput. and Applied Math, **234** (2010), 861–882.

[31] G. Coman, G. Pavel, I. Rus, and I.A. Rus, *Introducere în teoria ecuaţiilor operatoriale*, Dacia, 1976.

[32] C. Corduneanu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Univ. Iaşi, 1971.

[33] C. Corduneanu, *Integral equations and stability of feedback systems*, Academic Press, New York, 1973.

[34] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1991.

[35] V. Dârzu, *Functional differential equation of mixed type, via weakly Picard operators*, Proc. 6th Conf. of the Romanian Math. Soc., **1** (2003), 276–284.

[36] V.A. Dârzu, *Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu modificarea mixtă a argumentului*, Presa Universitară Clujeană, Cluj, 2006.

[37] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.

[38] D. Delbosco and L. Rodino, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation.*, J. Math. Anal. Appl., **204 (2)** (1996), 609–525.

[39] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, and H.O. Walther, *Delay equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[40] K. Diethelm and N. J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **262 (2)** (2002), 229–248.

[41] K. Diethelm and A. D. Freed, *On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. In: Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[42] K. Diethelm and G. Walz, *Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation*, Numer. Algorithms, **16 (3-4)** (1997), 231–253.

[43] M. Dobriţoiu, *The solution to a Fredholm implicit integral equation in the $\overline{B}(0;R)$ sphere*, Bulletins for Applied&Computer Mathematics, Budapest, **BAM CV, 2162** (2003), 27–32.

[44] M. Dobriţoiu, *Existence and continuous dependence on data of the solution of an integral equation*, Bulletins for Applied&Computer Mathematics, Budapest, **BAM CVI** (2005), 285–292, ISSN 0133-3526.

[45] M. Dobriţoiu, *Analysis of an integral equation with modified argument*, Studia Babes-Balyai,Cluj-Napoca, Mathematica, **51 (1)** (2006), 81–94.

[46] M. Dobriţoiu, *A Fredholm-Volterra integral equation with modified argument*, Analele Universităţii din Oradea, Fascicola Mathematica, **XIII** (2006), 133–138.

[47] M. DOBRIŢOIU, *On integral equation with modified argument*, Acta Universitatis Apulensis, Alba-Iulia, Mathematics-Informatics, **11** (2006), 387–391.

[48] M. DOBRIŢOIU, *System of integral equations with modified argument*, Carpathian J. Math., **24** (2008), 26–36.

[49] M. DOBRIŢOIU, *Ecuaţii integrale cu argument modificat*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009.

[50] M. DOBRIŢOIU, I.A. RUS, and M.A. SERBAN, *An integral equation arising from infectious diseases, via Picard operator*, Studia Babeş-Bolyai, Mathematica, Cluj-Napoca, **LII (3)** (2007), 81–94.

[51] M. DODRIŢOIU, *An integral equation with modified argument*, Studia Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Mathematica, **XLIX, nr 3** (2003), 27–33.

[52] R.D. DRIVER, *Ordinary and delay differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[53] E. EDDER, *The functional differential equation $x' = x(x(t))$*, J. Differ. Equations, **54** (1984), 390–400.

[54] E. EGRI, *A boundary value problem for a system of iterative functional-differential equations*, Carpathian J. Math., **24 (1)** (2008), 23–36.

[55] E. EGRI, *On first and second order iterative functional-differential equations and systems*, Cluj University Press, Cluj, 2008.

[56] E. EGRI and I.A. RUS, *First order iterative functional-differential equation with parameter*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **52 (4)** (2007), 67–80.

[57] A. M. A. EL-SAYED, *Fractional order evolution equation*, J. Fract. Calc., **7** (1995), 89–100.

[58] A. M. A. EL-SAYED, *Fractional-order diffusion-wave equation*, Internat. J. Theoret. Phys., **35 (2)** (1996), 311–322.

[59] A. M. A. EL-SAYED, *Nonlinear functional-differential equations of arbitrary orders*, Nonlinear Anal., **33 (2)** (1998), 181–186.

[60] L. GAUL, P. KLEIN, and S. KEMPE, *Damping description involving fractional operators*, Mech. Systems Signal Processing, **5** (1991), 81–88.

[61] C.I. GHEORGHIU, *A constructive introduction to finite element method*, Quo Vadis, Cluj-Napoca, 1999.

[62] W.G. GLOCKLE and T.F. NONNENMACHER, *A fractional calculus approch of selfsimilar protein dynamics*, Biophys. J., **68** (1995), 46–53.

[63] K. GOEBEL and W.A. KIRK, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, 1990.

[64] A. GRANAS and J. DUGUNDJI, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathemetics, Springer, 2002.

[65] D. Guo, *Solutions of nonlinear integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces*, Journal of Applied Mathematics and Simulation, **2 (1)** (1989), 1–11.

[66] D. Guo, V. Lakshmikantham, and X. Liu, *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1996.

[67] Yingxin Guo, *A generalization of Banach's contraction principle for some non-obviously contractive operators in a cone metric space*, Turk Journal Math, **35** (2011), 1–8.

[68] W. Hackbusch, *Integral equations*, Birkhauser, Berlin, 1995.

[69] A. Haimovici, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[70] A. Halanay and J. Yorke, *Some new results and problems in theory of differential-delay equations*, SIAM Rev., **13** (1971), 55–80.

[71] J. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[72] T.L. Hicks and J.R. Kubicek, *On the Mann iteration process in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., **59** (1977), 498–504.

[73] R. (ED.) Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, World Scientific Publishing Co.,Inc., 2000.

[74] Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional-differential equations with infinite delay*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[75] L.G. Huang and X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **332** (2007), 1468–1476.

[76] D.V. Ionescu, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.

[77] V.I. Istrăţescu, *Fixed-point theory: An Introduction*, Kluwer, Boston, 1981.

[78] T. Jankovskyi, *System of differential equation with maxima*, Dopov. Akad. Nauk. Ukr., **8** (1997), 57–60.

[79] J. Jankowski, *Remarks on extremal solutions of differential equations with advanced argument*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, **55** (2006), 95–102.

[80] Soon Mo Jung, *A fixed point approach to the stability of Volterra Integral Equations,*, Fixed Point Theory and Applications, Hindawi publishing Corporation, **1** (2007).

[81] G. Karakostas, Y.G. Sficas, and V.A. Staikos, *On the basic theory of initial value problems for delay differential equations*, Bolettino U.M.I., **1-B** (1982), 1179–1198.

[82] Abderrazek Karoui, *Existence and approximative solutions of nonlinear integral equations*, Journal of Inequalities and Applications (2005).

[83] A. A. KILBAS and S. A. MARZAN, *Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions (Russian)*, Differ. Uravn., **41 (1)** (2005), 82–86, English transl.: Diff. Equ. nr. 41 (1), 2005,pp. 84-89.

[84] A. A. KILBAS, H.M. SRIVASTAVA, and J.J. TRUJILLO, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[85] SIMS B. KIRK, W.A., *Handbook of metric fixed point theory*, Kluwer Academic, 2001.

[86] W.A. KIRK, *An abstract fixed point theorem for nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., **82** (1981), 640–642.

[87] W.A. KIRK, *Fixed point theory for nonexpansive mappings*, no. 886, Fixed Point Theory (E. Fadell and G. Fournier, eds), Berlin, New York, 1981.

[88] W.A. KIRK, *Fixed point theory for nonexpansive mappings II*, vol. vol. 18, Fixed Points and Nonexpansive Mappings (R. C. Sine, ed), Contemporary Mathematics, 1983.

[89] W.A. KIRK and YANEZ C. MARTINEZ, *Approximate fixed points for nonexpansive mappings in uniformly convex spaces*, Ann. Polon. Math., **51** (1990), 189–193.

[90] V. KOLMANOVSKII and A. MYSHKIS, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[91] V. KOLMANOVSKII and V.R. NOSOV, *Stability of Functional-Differential Equations*, Academic Press, London, 1986.

[92] A.M. KRASNOSELSKIJ, *Positive Solutions of Operator Equations*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

[93] A.M. KRASNOSELSKIJ, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.

[94] M.A. KRASNOSELSKIJ, *Two remarks on the method of successive approximations (Russian)*, Uspehi Mat. Nauk., **10, No. 1 (63)** (1955), 123–127.

[95] T. KUSANO, *On even-order functional differential equations with advanced and retarded arguments*, J. Differ. Equations, **45** (1982), 75–84.

[96] J. KWAPISZ and M. TURO, *On the existence and convergence of succesive approximations for some functional equations in Banach spaces*, J. Differ. Equations, **16 (2)** (1974), 298–318.

[97] J. KWAPISZ and M. TURO, *Some integral-functional equations*, Funkc. Ekvacioj, **18 (2)** (1975), 107–162.

[98] V. LAKSHMIKANTHAM, T. GNANA BHASKAR, and D.J. VASUNDHARA, *Theory of set Differential equations in metric space*, Cambridge Sc. Publ., 2006.

[99] V. LAKSHMIKANTHAM and D. GUO, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, Boston, 1988.

[100] V. Lakshmikantham and S. Heikklä, *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.

[101] V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala, *Theory of fractional differential inequalities and applications*, Commun. Appl. Anal., **11 (3-4)** (2007), 395–402.

[102] V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations*, Nonlinear Anal., **69 (8)** (2008), 2677–2682.

[103] V. Lakshmikantham and A.S. Vatsala, *General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations*, Appl. Math. Lett., **21 (8)** (2008), 828–834.

[104] V. Lakshmikantham, L. Wen, and B. Zhang, *Theory of differential equations with unbounded delay*, Kluwer Acad. Publ., London, 1994.

[105] T Lalescu, *Introducere în teoria ecuaţiilor integrale*, Editura Academiei, Bucureşti, 1956.

[106] T. Landes, *Permanence properties of normal structure*, Pacific J. Math., **100** (1984), 125–143.

[107] T. Landes, *Normal structure and the sum property*, Pacific J. Math., **123** (1986), 127–147.

[108] M. Lauran, *A new version of existence results from some integral equation with modified argument.*

[109] M. Lauran, *Nonexpansive fixed point technique used to solve the system of differential equations with modified argument.*

[110] M. Lauran, *Nonexpansive fixed point technique used to solve the system of integral equations with modified argument.*

[111] M. Lauran, *On some existence and uniqueness theorems for Fredholm and Volterra equations with modified argument*, Creative Math.& Informatics, **17(3)** (2008), 432–438.

[112] M. Lauran, *Existence results from some integral equation with modified argument*, General Mathematics, **19 (3)** (2010), 85–92.

[113] M. Lauran, *Existence theorem for Fredholm type integral equations with modified argument*, Acta Universitatis Apulensis, Alba-Iulia, Mathematics-Informatics, **23** (2010), 189–194.

[114] M. Lauran, *An application of Perov's fixed point theorem*, ICAM8 (2011).

[115] M. Lauran, *Existence results for some differential equations with deviating argument*, Filomat, **25 (2)** (2011), 21–31.

[116] M. Lauran, *Existence results for some nonlinear integral equations*, Miskolc Math. Notes (2011), în curs de publicare.

[117] M. Lauran, *Solution of first iterative differential equations*, Analele Universităţii din Craiova, Fascicola Mathematica (2011), in curs de publicare.

[118] M. LAURAN and V. BERINDE, *Nonexpansive fixed point technique used to solve boundary value problems for fractional differential equations*, Analele Ştiinţifice ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iaşi, seria Matematică, **Tomul LVII** (2011), 137–149.

[119] NGUYEN THANH LONG, *Solution approximation of a system of integral equations by a uniformly convergent polynomials sequence*, Demonstratio Mathematica, **37, (1)** (2004), 123–132.

[120] F. MAINARDI, *Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, (udine, 1996) ed., vol. 378, Springer, Vienna, 1997.

[121] J.L. MAINGE and ŞT. MĂRUSTER, *Convergence in norm of modified Krasnoselski-Mann iterations for fixed points of demicontractive mappings*, Applied Mathematics and Computation, **217** (2011), 9864–9874.

[122] J. MALLET-PARET, *The Fredholm alternative for functional differential equations of mixed type*, J. Dyn. Differ. Equations., **11 (1)** (1999), 1–46.

[123] V.M. MAMEDOV and JA. D. MUSAEV, *On the theory of solutions of nonlinear operator equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **195 (1)** (1970), 1420–1424.

[124] GH. MARINESCU, *Teoria ecuaţiilor diferenţiale şi integrale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[125] F. METZLER, W. SCHICK, KILLIAN H.G., and T. F. NONNENMACHER, *Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach*, J. Chem. Phys., **103** (1995), 7180–7186.

[126] GH. MICULA, *Numerical solutions of delay differential equations of higher order by spline functions*, Seminar of Differential Equations (1989), 77–86.

[127] GH. MICULA and S. MICULA, *Handbook of splines*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1998.

[128] K.S. MILLER and B. ROSS, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993, A Wiley-Interscience Publication.

[129] ŞT. MIRICĂ, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, vol. I,II,III, Editura Universităţii, Bucureşti, 1999.

[130] S.M. MOMANI and S.B. HADID, *Some comparison results for integro-fractional differential inequalities*, J. Fract. Calc., **24** (2003), 37–44.

[131] S.M. MOMANI, S.B. HADID, and Z.M. ALAWENH, *Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order*, Internat. J. Math.Sci., **13-16** (2004), 697–701.

[132] D. MOTREANU and V. RĂDULESCU, *Variational and non-variational methods in nonlinear analysis and boundary value problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2002.

[133] Şt. Măruşter, *The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., **63 (1)** (1977), 69–73.

[134] Şt. Măruşter, *Metode numerice în rezolvarea ecuaţiilor neliniare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[135] A. Mureşan, *Existence of Nash-Bertrand equilibrum in duopoly games with pollution treatment cost*, Carpathian J. Math., **21 (1-2)** (2005), 95–98.

[136] A. Mureşan, *Step method for a functional-differential equation from mathematical economics*, Carpathian J. Math., **24 (3)** (2008), 356–362.

[137] V. Mureşan, *Ecuaţii diferenţiale cu modificarea afină a argumentului*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1997.

[138] V. Mureşan, *Functional-Integral Equations*, Mediamira, Cluj-Napoca, 2003.

[139] V. Mureşan, *Volterra integral equations with iterations of linear modification of the argument*, Novi Sad Journal of Math., **33** (2003), 1–10.

[140] A.D. Myshkis and L.E. Elsgolts, *The status and problems of the theory of differential equations with deviating argument*, Uspehi Mat. Nauk., **22(2)** (1967), 21–57.

[141] I. Naroşi, *A remark on Fredholm-Volterra integral equations*, Preprint, **3** (1986), 259–260, Universitatea Babeş-Bolyai.

[142] K.B. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. With an annotated chronological bibliography by Bertram Ross*, vol. 111, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.

[143] D. O'Regan and A. Petruşel, *Fixed point theorems for generalized contractions in order metric spaced*, J. Math. Appl., **341** (2008), 1242–1252.

[144] D. O'Regan and R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach Science, Amsterdam, 2001.

[145] D. Otrocol, *Systems of functional-differential equations with maxima, of mixed type*, (în curs de apariţie).

[146] B.G. Pachpatte, *On the existence and uniqueness of solutions of Volterra-Fredholm integral equations*, Mathematics Seminar Notes, **10** (1982), 733–742.

[147] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, European Math. Soc., Zŭrich, 2005.

[148] D. Pascali and S. Sburlan, *Nonlinear mappings of monotone type*, Editura Academiei, Bucureşti, 1978.

[149] A.I. Perov and A.V. Kibenko, *On certain general method for investigation of boundary value problem*, Izv. Akad. Nauk. SSSR (in russian), **30** (1966), 264–294.

[150] I.G Petrovskii, *Lectures on the theory of integral equations*, Rochester, 1957.

[151] A. Petruşel, *Fredholm-Volterra integral equations and Maia's theorem*, Preprint, **3** (1988), 79–82, Universitatea Babeş-Bolyai.

[152] I. Podlubny, *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.

[153] I. Podlubny, *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fract. Calc. Appl. Anal., **5 (4)** (2002), 367–386.

[154] I. Podlubny, I. Petraš, B.M. Vinagre, P. O'Leary, and L. Dorčak, *Analogue realizations of fractional-order controllers. Fractional order calculus and its applications*, Nonlinear Dynam., **29 (1-4)** (2002), 281–296.

[155] J. Poleszczuk, *Delayed differential equations in description of biochemical reactions channels*, XXI Congress of Differential Equations and Applications, Congress of Applied Mathematics, **XI** (2009), 1–8, Ciudad Real.

[156] A.D. Polyanin and A.V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[157] R. Precup, *Ecuaţii integrale neliniare*, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj, 1993.

[158] R. Precup, *Periodic solutions for an integral equation from biomathematics via Leray-Schauder principle*, Studia Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, Mathematica, **34 (1)** (1994), 47–58.

[159] R. Precup, *Existence and approximation of positive fixed point of nonexpansive maps*, Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., **26** (1997), 203–208.

[160] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[161] R. Precup, *Some existence results for differential equations with both retarded and advanced arguments*, Mathematica, **Tome 44(67), 1** (2002), 31–38.

[162] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Mathematical and Computer Modelling, **49** (2008), 703–708.

[163] R. Precup and E. Kirr, *Analysis of a nonlinear integral equation modelling infectious diseases*, Proceedings of International Conference, Univ. de Vest, Timişoara (1997), 178–195.

[164] S. Prössdorf and B. Silbermann, *Numerical analysis for integral and related operator equations*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1991.

[165] R Ramalho, *Existence and uniqueness theorems for nonlinear integral equation*, Univ. Federal de Pernambuco, Notas e Comun. de Matematica, **40** (1972), 1–42.

[166] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.

[167] I.A Rus, *Metrical fixed point theorems*, University of Cluj-Napoca, 1979.

[168] I.A. Rus, *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[169] I.A. Rus, *A delay integral equation from biomathematics*, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, **Preprint nr. 3** (1989), 87–90.

[170] I.A. Rus, *Weakly Picard mappings*, Comment. Math. Univ. Caroline, **34 (3)** (1993), 767–773.

[171] I.A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale, ecuaţii integrale şi sisteme dinamice*, Casa de editură Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996.

[172] I.A. Rus, *Picard operators and applications*, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, **Preprint nr. 3** (1996).

[173] I.A. Rus, *An abstract point of view for some integral equations from applied mathematics*, Proc. of the International Conference, Univ. de Vest Timişoara (1997), 256–270.

[174] I.A. Rus, *On a class of functional-integral equations*, Seminar on Best Approximation Theory, Cluj-Napoca (2000).

[175] I.A. Rus, *Who authored the first integral equations book in the world*, Seminar on Fixed Point Theory, **1(1-4)** (2000), 81–86.

[176] I.A Rus, *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, 2001.

[177] I.A. Rus, *Fixed Point Structure Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2006.

[178] I.A. Rus and V. Dârzu-Ilea, *First order functional-differential equations with both advanced and retarded arguments*, Fixed Point Theory, **5 (1)** (2004), 103–115.

[179] I.A. Rus and E. Egri, *Boundary value problems for iterative functional-differential equations*, Studia Babeş-Bolyai Mathematica, **51 (2)** (2006), 109–126.

[180] I.A. Rus, S. Mureşan, and V. Mureşan, *Weakly Picard operators on a set with two metrics*, Fixed Point Theory, **6(2)** (2005), 323–331.

[181] I.A. Rus, A. Petruşel, and G. Petruşel, *Fixed point theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[182] A. Rustichini, *Functional differential equations of mixed type: The linear autonomous case*, J. Dyn. Differ. Equations, **1(2)** (1989), 121–143.

[183] B. Rzepecki, *On the existence of exactly one solution of integral equations in the space L^p weith a mixed norm*, Ann. Polon. Math., **XXX (3)** (1974), 229–236.

[184] L.A. Safonov, E. Tomer, V.V. Strygin, Y. Ashkenazy, and S. Havlin, *Multifractal chaotic attractors in a system of delay-differential equations modeling road traffic*, CHAOS, **12 (4)** (2002), 1006–1015.

[185] H. Schaefer, *Uber die Methode suksessiver Approximationen, (German)*, Jber. Deutsch. Math. Verein., **57, Abt. 1** (1957), 131–140.

[186] L.S. Schulmann, *Some differential difference equations containing advance and retardation*, J. Math. Phys., **15(2)** (1974), 195–198.

[187] R. C. Sine, *On nonlinear contractions in sup norm spaces*, Nonlinear Anal., **3** (1979), 885–890.

[188] L. Skora, *Monotone iterative technique for impulsive retarded differential-functional equations systems*, Demonstratio Mathematica, **37, nr.1** (2004), 101–113.

[189] P. Soardi, *Existence of fixed points of nonexpansive mappings in certain Banach lattices*, Proc. Amer. Math. Soc., **73** (1979), 25–29.

[190] C.A. Stuart, *Existence theorems for a class of nonlinear integral equations*, Math. Z., **vol. 137** (1974), 49–64.

[191] S. Swaminathan, *Normal structure in Banach spaces and its generalisations, Fixed point and nonexpansive mappings*, vol. 18, (R. C. Sine, ed.) Contemporary Mathematics, 1983.

[192] C.A. Telles, J.C.F. Wrobel, and L.C. Brebbia, *Boundary element techniques*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1984.

[193] D. Trif and T. Petrilă, *Metode numerice şi computaţionale în dinamica fluidelor*, Digital Data, Cluj, 2002.

[194] M. Väth, *Volterra and Integral Equations of Vector Functions*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.

[195] W. Walter, *Differential and integral inequalities*, Berlin, 1979.

[196] J.A. Wong, J.S.W. Miller, and R.K. Nohel, *A stability theorem for nonlinear mixed integral equations*, J. Math. Anal. Appl., **25 (2)** (1969), 446–449.

[197] D. Yang and W. Zhang, *Solution of equivariance for iterative differential equations*, Appl. Math. Lett., **17 (7)** (2004), 759–765.

[198] K. Yosida, *Equations differentielles et integrales*, DUNOD, Paris, 1971.

[199] K. Yosida, *Functional Analysis*, sixth ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[200] C. Yu and G. Gao, *Existence of fractional differential equations*, Journal Math. Anal. Appl., **310 (1)** (2005), 26–29.

[201] P.P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., **48** (1997), 825–859.

[202] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1986.

[203] S. Zhang, *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations*, Electron. J. Diff. Eqns, **36** (2006), 12 pp.

Anexa : Lucrări publicate sau acceptate spre publicare

Lista articolelor publicate

1. *On some existence and uniqueness theorems for Fredholm and Volterra equations with modified argument*, Creative Math.& Informatics, **vol. 17, nr. 3** (2008), 432–438.
2. *Existence results from some integral equation with modified argument*, General Mathematics, **19 (3)** (2010), 85–92.
3. *Existence theorem for Fredholm type integral equations with modified argument*, Acta Universitatis Apulensis, Alba-Iulia, Mathematics-Informatics, **vol.23** (2010), 189–194.
4. *Nonexpansive fixed point technique used to solve boundary value problems for fractional differential equations*, Analele Ştiinţifice ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iaşi, seria Matematică, **Tomul LVII** (2011), 137–149 (împreună cu V. Berinde).
5. *Existence results for some differential equations with deviating argument*, Filomat, **25, (2)** (2011), 21–31.

Lista articolelor în curs de publicare

1. *Existence results for some nonlinear integral equations*, Miskolc Math. Notes, (2011).
2. *Solution of first iterativ differential equations*, Analele Universităţii din Craiova, Fascicola Matematica, (2011)

Lista articolelor trimise spre publicare

1. *Nonexpansive fixed point technique used to solve the system of differential equations with modified argument*
2. *Nonexpansive fixed point technique used to solve the system of integral equations with modified argument*
3. *An application of Perov's fixed point theorem*, ICAM8, 26-30 oct 2011, Baia Mare
4. *A new version of existence results from some integral equation with modified argument*