UNIVERSITATEA POLITEHNICĂ CLUJ NAPOCA
CENTRU UNIVERSITAR DE NORD BAIA MARE
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Contribuţii la teoria (n,m)-semiinelelor şi $n-$semigrupurilor

Teză de doctorat

autor: Adina Pop

Conducător ştiinţific: Prof. univ. dr. Vasile Berinde

2014

Cuprins

Introducere

Structurile algebrice joacă un rol important în matematică cu o gamă largă de aplicaţii în mai multe discipline cum ar fi fizica teoretică, teoria codurilor, informatică, spaţii topologice, inginerie.

Semigrupul, respectiv grupul sunt structuri algebrice ce stau la baza construirii altor structuri mai complexe: semiinele, inele, semicorpuri, corpuri, module etc.

Inelele comutative joacă un rol important în geometria algebrică, în topologia algebrică structurile algebrice sunt utilizate pentru a defini invarianţi ai spaţiilor topologice.

Din punct de vedere algebric, semiinelele asigură generalizarea cea mai naturală a inelelor şi a laticilor distributive mărginite.

Semiinelele abundă în lumea matematică din jurul nostru. Într-adevăr, prima structură matematică pe care o întâlnim, mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este un semiinel. Alte semiinele apar natural în diverse domenii ale matematicii ca şi combinatorică, analiza funţională, teoria grafurilor, geometria euclidiană, teoria inelelor necomutative, teoria automatelor, limbaje formale, modelare matematică.
Termenul de "semiinel" a fost întâlnit prima dată în literatura matematică în "Uber die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen" în 1894 scrisă de către Richard Dedekind. Începând cu 1916 Macaulay, apoi în 1924 Krull, Noether în 1927, şi Lorenzen în 1934 folosesc această noţiune, ea fiind legată de studiul idealelor unui inel. De asemenea, termenul de "semiinel" apare şi la Hilbert în 1899, respectiv Huntington în 1902, strîns legat de axiomatizarea mulţimii numerelor naturale şi a numerelor raţionale pozitive. O mai mare importanţă i s-a dat acestei noţiuni de către Vandiver in 1934 [137] când semiinelele au fost considerate explicit şi legate de axiomatizarea aritmetică a mulţimilor numerelor naturale. De-a lungul anilor, semiinelele au fost studiate de numeroşi cercetători într-o încercare de a extinde anumite proprietăţi din teoria semigrupurilor sau de a generaliza anumite noţiuni din teoria inelelor. S-au publicat monografii dedicate acestei noţiuni dintre care cele mai cunoscute sunt cele ale lui J. S. Golan ,[Golan J.S., *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science*,Kluwer Acad. Publ.,Dordrecht/Boston/London, (1999),pp. 381] c

si cea a lui U. Hebisch , H.J. Weinert [Hebisch U.,Weinert H.J. *Semirings. Algebraic theory and applications in computer science*, World Scient. Publ.(1999)].

O problemă în studiul semiinelelor este aceea că terminologia folosită de diverşi autori nu este unitară şi anume: unii autori folosesc termenul de ”semiinel” pentru noţiunea pentru care alţi autori folosesc termenul de ”hemiinel” .

Astfel, U. Hebisch şi H. J. Weinert [57] consideră semiinelul ca fiind o mulţime S înzestrată cu două operaţii, una aditivă, respectiv multiplicativă astfel încât perechea $(S, +)$ este un semigrup comutativ, $(S, \cdot)$ este un semigrup iar operaţia multiplicativă este distributivă faţa de operaţia aditivă. Alţii, printre care J.Golan [53], [54] consideră semiinelul ca fiind un semiinel în sensul lui Hebisch, având un element neutru aditiv care este şi element zero absorbant al semiinelului, iar semiinelul cu element neutru multiplicativ îl numeşte hemiinel.
Alţi autori nu impun nici măcar condiţia de comutativitate operaţiei aditive.

Generalizarea noţiunii de grup se poate face în două moduri, fie slăbind axiomele grupului, ajungând astfel la semigrupuri, monoizi, grupoizi, fie înlocuind operaţia binară cu una $n-$ară ($n \geq 2$) ceea ce conduce la noţiunea de $n-$grup. Această generalizare a fost introdusă de Dőrnte [33] la începutul secolului trecut, tratată în detaliu de către E. L. Post [110] şi investigată de M. Hosszú [60], B. Gleichgewicht, K. Glazek [50],[49], J. Timm [129], W. A. Dudek [34], Ušan [131], I. Purdea [108] şi alţii. Interesul pentru studiul $n-$grupurilor este justificat, pe lângă aplicaţiile lor în fizica teoretică, în informatică şi alte domenii, de necesitatea cercetării proprietăţilor grupurilor care aparţin unui cadru mai general şi ale celor specifice cazului $n = 2$. Astfel, pare surprinzător faptul că pentru $n \geq 3$ există $n-$grupuri fără element neutru sau altele care au mai multe astfel de elemente.

Rezultatele obţinute în teoria $n-$grupurilor au impulsionat cercetările în sensul generalizării şi a altor structuri binare care conduc la $n-$grupoizi, $n-$semigrupuri şi $n-$cvasigrupuri, în studiul cărora şi-au adus contribuţii importante Čupona [28], [30], M. S. Pop [99], I. Purdea [108], D. Zupnik [141],V. Pop [109] şi mulţi alţii. .

Axiomele semiinelului, respectiv inelului pot fi şi ele extinse în mod similar la structuri poliadice.

Putem vorbi despre $(m, n)-$inele începând cu anii 1960 prin lucrările aparţinând unor autori ca: Boccioni [15], Čupona [27], Crombez [23], [24], M. S. Pop [104], [105], Purdea [111] etc. Spre deosebire de semiinelele obişnuite a căror studiu a progresat deodată cu studiul inelelor, $(n, m)-$semiinelele au fost studiate mult mai târziu decât cel al $(n, m)-$inelelor.

Spre deosebire de semiinelele obişnuite al cărui studiu a progresat deodată cu cel al inelelor, $(n,m)-$semiinelele au fost investigate mult mai târziu decât $(n,m)-$inelele. Termenul de $(n,m)-$semiinel a fost introdus de noi în anul 2000, [**Pop Adina**, *Remarks on embelding theorems of* $(m,n)-$*semirings*, Bull. Ştiint. Univ. Baia Mare, **16** (2000), No.2, 297-302] , ca o structură algebrică înzestrată cu două operaţii, una $n-$ară asociativă şi comutativă şi alta $m-$ară asociativă, cea $m-$ară fiind distributivă faţă de cea $n-$ară. În această primă lucrare s-au dat câteva teoreme de scufundare în $(n,m)-$semiinele, în lucrările ulterior apărute studiindu-se alte aspecte ale teoriei $(n,m)-$semiinelelor [91], [88], [93], [96], [97], [94], [90], [89]. Menţionăm că semiinelele ternare, adică $(2,3)-$semiinelele în sensul definit de noi, având în plus element neutru aditiv care este şi zero absorbant au fost investigate în detaliu de S. Kar [69], [71], [70] şi J. N. Chaudhari, K. J. Ingale [19] şi alţii.

În 2003, Dutta şi Kar [41], au introdus noţiunea de semiinel ternar care generalizează noţiunea de inel ternar introdusă de Lister. Menţionăm că noţiunea de semiinel ternar se referă, de fapt la un $(2,3)-$semiinel. Semiinelul ternar apare în mod natural, dacă considerăm inelul numerelor întregi negative $\mathbb{Z}^-$ înzestrat cu o opera ctie multiplicativă ternară, obţinută printr-o extindere naturală (înmulţirea repetată) a operaţiei multiplicative definită pe $\mathbb{Z}$ şi care joacă un rol important în teoria inelelor.

Teoria sistemelor algebrice ternare a fost introdusă de Lehmer [77] în 1932. El a cercetat anumite sisteme algebrice ternare care erau de fapt, grupuri ternare comutative. Noţiunea de semigrupuri ternare a fost introdusă de către Banach. El a arătat printr-un exemplu că un semigrup ternar nu se reduce întotdeauna la semigrupuri obişnuite. Lister [78] a studiat subgrupurile aditive ale inelelor care sunt închise relativ la produsul ternar definit pe un inel prin simpla aplicare repetată a înmulţirii binare.

Kar [71], [70], Kar [42], Dutta [40], [41], Chaudhari şi Ingale [19] au studiat proprietăţi ale acestui semiinel ternar, ideale şi proprietăţi topologice pe un $(2,3)-$semiinel.

Studiul semiinelelor ternare este mult simplificat de ipoteza că operaţia "aditivă" este binară vând element zero absorbant.

Necesitatea studiului $(n,m)-$semiinelelor apare şi din simpla considerare a mulţimii numerelor naturale înzestrate cu puterile $k-$adice (vezi Post [110]) care satisfac proprietăţile

$$(a^{k_1},...,a^{k_n})_+ = a^{[k_1+...+k_n+1]}$$

şi

$$(a^{[k_1]})^{[k_2]} = a^{(n-1)k_1k_2+k_1+k_2}.$$

Abia în anul 2013 au apărut lucrări relative la $(n,m)-$semiinele aparţinând lui Y.Zhu [138] care citează lucrările noastre [87], [95]. S. E. Alam [1], S. E. Alam S. B.

Rao , B. Davvaz [2] au studiat unele proprietăţi ale $(n, m)-$semiinelelor cu aplicaţii în aşa numita toleranţă a defecţiunilor.

Scopul tezei de faţă este de a studia unele proprietăţi ale $(n, m)-$semiinelelor relativ la sub-(n, m)-semiinele, ideale subtractive, ideale de partiţionare, omomorfisme; de asemeni unele proprietăţi care nu au fost anterior cercetate legate de teoria $n-$semigrupurilor. Majoritatea rezultatelor cuprinse în această teză sunt originale; cele care nu ne aparţin sunt însoţite de trimiteri bibliografice corespunzătoare, cu unele excepţii în primul capitol unde apar noţiuni şi proprietăţi devenite clasice în literatura de specialitate.

Lucrarea cuprinde 6 capitole.

Acest prim capitol având un caracter introductiv prezintă în prima parte o serie de noţiuni şi rezultate din teoria $n-$semigrupurilor şi cea a $n-$grupurilor. De asemenea, definim noţiunea de $n-$monoid ca fiind un $n-$semigrup cu unitate laterală de $(n-1)$ elemente, nu neapărat unică . Mentionăm faptul că în paragraful 1.1 Definiţia 1.1.6, Propoziţia 1.1.1, Propoziţia 1.1.2 şi Exemplele 1.1.7, 1.1.10, 1.1.11 ne aparţin.

Cel de al doilea paragraf conţine rezultate originale relativ la caracterizarea $n-$semigrupurilor semiprimare, noţiune introdusă de noi ca o generalizare naturală a $r-$semigrupurilor şi a semigrupurilor semiprimare studiate în caz binar de către Bogdanović [16], [17]. Acest paragraf ne aparţine în totalitate, rezultatele fiind publicate în 2012 [92] .

În capitolul 2 începem un studiul sistematic al $(n, m)-$semiinelelor, comparativ cu cel al semiinelelor uzuale. Pe lângă noţiuni şi proprietăţi importante şi unele exemple construite de noi (paragraful 2.1), în paragraful 2.2 descriem toate $(n, m)-$semiinelele definite prin funcţii polinomiale peste un semidomeniu infinit cu operaţia aditivă liberă de zero. Această construcţie ne-a fost sugerată, de un articol al lui Marichal şi Mathonet, [Marichal J.-L.Mathonet P.,*A description of n-ary semigroups polynomial-derived from integral domains*, Semigroup Forum, **83**(2),(2011), 241-249] care descriu toate $n-$semigrupurile definite prin funcţii polinomiale peste un domeniu de integritate infinit. Acest paregraf ne aparţine în totalitate, rezultatele fiind publicate în 2013, [93].

Menţionăm că în cazul semidomeniului infinit al numerelor naturale $\mathbb{N}$, particularizând convenabil elementele care intervin în construcţie, regăsim Exemplul 2.1.8 sugerat de puterile aditive ($n-$are). Acest $(n, m)-$semiinel cu unitate şi fără element zero joacă în teoria $(n, m)-$semiinelelor un rol analog semiinelului numerelor naturale $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ din cazul binar. Acest fapt reiese şi din Teorema 2.3.1 care demonstrează că pentru orice $(n, m)-$semiinel cu unitate există un sub-$(n, m)-$semiinel generat de unitate (dacă toate puterile "aditive" sunt distince) izomorf cu $(n, m)-$semiinelul din

Exemplul 2.1.8. Spre deosebire de cazul binar, dacă $(n, m)-$semiinelul are mai multe unităţi sub-$(n, m)-$semiinelele generate de acestea sunt izomorfe. Cazul în care nu toate puterile unităţii sunt distincte este de asemenea tratat (paragraful 2.3). Precizăm că rezultatele din paragraful 2.3 sunt originale în curs de publicare.

În paragraful 2.4 se studiază congruenţele în $(n, m)-$semiinele, pregătind tratarea congruenţei de tip Bourne [18] în raport cu un ideal dat. De asemenea se extinde noţiunea de ideal subtractiv ($k-$ideal) în cazul $(n, m)-$semiinelelor, proprietăc tile enunţate fiind ilustrate de multe exemple şi contraexemple. (paragraful 2.5).

În continuare (paragraful 2.6) definim idealele de partiţionare ale unui $(n, m)-$semiinel, generalizând unele proprietăţi din cazul binar. Precizăm că, spre deosebire de lucrările lui Kar [71] şi Chaudhari [19], în care operaţia aditivă este binară, cu element zero absorbant, noi am demonstrat teoreme analoage în condiţii mai puţin restrictive şi anume pentru $(n, m)-$semiinele , cu reducere şi care au cel puţin un idempotent aditiv. Multe dintre aceste rezultate şi exemple sunt contribuţii personale ale autorului.

Ultimul paragraf (2.7) descrie principalele modalităţi de reducere ale ale $n-$monoizilor, $(n, m)-$semiinelelor şi extinderi ale acestora.
Pornind de la rezultatele obţinute de M. S. Pop [99], [101], [106] şi Iancu L. [62] prezentăm şi studiem redusa unui $(n, m)-$semiinel oarecare în raport cu $m-2$ elemente fixe $u_1, u_2, \cdots, u_{m-2} \in S$ obţinând un $(n, 2)-$semiinel. Definim, de asemenea ,extinderea unui $(n, 2)-$semiinel la un $(n, m)-$inel cu ajutorul unui endomorfism definit pe $(n, 2)-$semiinelul S. Se prezintă, de asemenea, legături între proprietăţi ale unui $(n, m)-$semiinel şi proprietăţi ale $(n, 2)-$semiinelul redus al acestuia. Multe dintre aceste rezultate şi exemple sunt contribuţii personale ale autorului ca de exemplu Propoziţia 2.7.1, Propoziţia 2.7.2, Teorema 2.7.3, Definţia 2.7.2, Teoremele 2.7.6-2.7.9.

În capitolul 3, am generalizat pentru n- semigrupuri, $n-$monoizi, respectiv $(n, m)-$semiinele noţiunile de semigrup parţial ordonat şi pozitiv ordonat date de Wehrung [142], respectiv Hebisch [57]. Am definit anumite relaţii de preordine şi de ordine pe structuri $n-$are şi am studiat anumite proprietăţii ale acestora.

În paragraful 3.1 am studiat $n-$semigrupuri şi $n-$monoizi ordonaţi şi pozitiv ordonaţi. Dificultatea acestor generalizări constă în faptul că nu există, în general, în $n-$semigrupuri element neutru aditiv.

Am dat câteva condiţii necesare şi suficiente ca un element $a \in A$, unde A este un $n-$ semigrup. Să fie 1 pozitiv, respectiv $n-$ pozitiv sau pozitiv.

În paragraful 3.2 am definit noţiunea de $(n, m)-$semiinel parţial ordonat plecând de la definiţia dată în cazul semiinelelor obişnuite de Crombez [24], respectiv Hebisch şi Weinert [57]. Am dat câteva exemple originale, precum şi condiţii suficiente pentru ca anumite relaţii definite să fie relaţii de preordine, respectiv relaţii de ordine.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în 2004 [95], respectiv 2009 [91].

În capitolul 4 am definit noţiunile de omomorfism de $(n,m)-$semiinele plecând de la definiţiile date în cazul algebrelor universale şi unele teoreme de scufundare în cazul $(n,2)-$semiinelelor, respectiv $(n,m)-$inelelor.

În paragraful 4.1 am dat câteva proprietăţi într-un $(n,m)-$semiinel ale imaginii elementului zero, dacă el există, a imaginii unui idempotent aditiv, respectiv a elementului neutru aditiv (multiplicativ). S-a arătat că, dacă A este un ideal într-un $(n,m)-$semiinel S atunci $f(A)$ este un ideal în $(n,m)-$semiinelul S', unde f este un omomorfism surjectiv.

S-a arătat, printr-un exemplu (Exemplul 4.1.1) că, dacă A este un ideal subtractiv în $(n,m)-$semiinelul S, atunci $f(A)$ nu este în general ideal subtractiv, dar contraimaginea unui ideal subtractiv este întotdeauna un ideal subtractiv.

Spre deosebire de $(n,m)-$inele, în cazul $(n,m)-$semiinelelor cu element zero, nucleul unui omomorfism format doar din singurul element zero nu implică injectivitatea lui f. În acest scop, s-a construit un exemplu.

În paragraful 4.2 sunt studiate câteva clase de $(n,m)-$semiinele a căror endomorfisme aditive sunt endomorfisme de semiinele, notate pe scurt $(n,2)-AE-$semiinele. S-au construit câteva exemple de astfel de $(n,2)-$semiinele, unele fiind definite pe n-semilatici. De asemenea, s-au enunţat câteva proprietăţi legate de mulţimea idempotenţilor aditivi, respectiv multiplicativi în $AE-(n,2)-$semiinele. Menţionăm căîn cazul semiineleor uzuale neasociative acestă problemă a fost studiată de T. Kepka [Kepka T.,*Semirings whose additive endomorphisms are multiplicative*, Comment Math. Univ. Carolinae, **34**(1993), 213-219], care demonstrează că orice $AE-$semiinel idempotent este asociativ. Spre deosebire de cazul binar, noi demonstrăm că î cazul $n \geq 4$, există $AE-(n,2)-$semiinele care nu sunt asociative. Rezultatele au fost publicate în anul 2001 [98], respectiv vor fi publicate în anul 2015 [90].

În paragraful 4.3 s-au prezentat unele teoreme de scufundare pentru $(n,2)-$semiinele, respectiv $(n,m)-$semiinele şi s-a dat o construcţie a unui $(n,2)-$inel de fracţii care generalizează unele teoreme binecunoscute din cazul binar. (vezi I.Purdea [112], Jacobson [68])

În capitolul 5 sunt studiate unele proprietăţi algebrice ale $(n,m)-$semiinelelor topologice. $n-$Grupurile topologice au fost studiate de G. Crombez şi G. Six [26], Cupona [29]. Unele proprietăţi ale $n-$ semigrupurilor topologice au fost studiate de Maria S. Pop, [100], Dudek şi Mukhin [36] şi Kar (spaţii topologice pentru semiinele ternare).

Un paragraf special este consacrat studiului asupra frontierei unui $(n, m)-$semiinel. Sunt investigate câteva proprietăţi ale radicalului unui ideal şi a frontierei radicalului unui ideal într-un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff.

Vom da câteva generalizări ale unor rezultate prezentate de Shum [125], Chow [20] relativ la semigrupuri şi a unor rezultate obţinute de M. S. Pop [100] în cazul $n-$semigrupurilor.
Am enunţat şi demonstrat o condiţie necesară şi suficientă ca frontiera unui ideal deschis al unui $(n, m)-$ semiinel S topologic Hausdorff să fie un ideal relativ la $S \backslash I$. Am arătat că radicalul unei submulţimi deschise a lui S este o mulţime deschisă. Am enunţat şi demonstrat o condiţie necesară şi suficientă ca radicalul unui ideal să fie ideal complet prim.
Am stabilit legătura dintre frontiera radicalului unui ideal şi ideal semiprimar. Aceste rezultate au fost publicate în anul 2013 [89].

Ultimul capitol este un capitol interdisciplinar. O întrebare clasică în teoria ecuaţiilor funţionale este următoarea: ”În ce condiţii o funcţie care satisface aproximativ o ecuaţie funcţională $\mathcal{E}$ trebuie să fie aproape de o soluţie exactă a lui $\mathcal{E}$”

Dacă această problemă are soluţie spunem că că ecuaţia ε este stabilă.

Prima problemă de stabilitate relativ la stabilitatea omomorfismelor de grupuri a fost faimoasa problemă propusă de Ulam [130] în 1940. Hyers [61] a dat o soluţie pentru această problemă în 1941. El e construit în mod explicit în mod explicit funcţia aditivă ϕ plecând de la funţia dată. Această metodă se numeşte ”metoda directă” şi este deseori folosită pentru a construi o soluţie a unei ecuaţi funcţionale date.
Această teoremă a fost generalizată de Aoki [7], Th M. Rassias [113], etc. În 2006, Amyari şi Moslehian [8] au studiat stabilitatea Hyers -Ulam în cazul omomorfismelor definite pe semigrupuri ternare comutative cu valori în spaţiu Banach.

În paragraful 6.1 am introdus definiţii care sunt generalizări ale unor definiţii din cazul binar şi am $m-$semigrup normat, $m-$spaţiu Banach. Am generalizat rezultatul dată de Amyari şi Moslehian [8][Amyari M., Moslehian M.S. *Approximate homomorphisms of ternary semigroups*, Lett. Math. Phys., vol. **77** (2006), 1-9] în cazul m-semigrupurilor pe care am demonstrat-o folosind ”medoda directă” a lui Hyers şi am enunţat şi demonstrat câteva corolare ale acestei teoreme.

În ultimul paragraf am studiat superstabilitatea omomorfismului $m-$ar generalizatând unele rezultate date de Amyari şi Moslehian [8], respectiv Baker [11] şi Szekelyhidi [128].

Aceste rezultate au fost acceptate spre publicare şi urmază să fie publicate în

Miskolc Math. Notes, [94].

Aş dori să mulţumesc domnului profesor doctor Ursul Mihail, domnului profesor doctor Vasile Berinde pentru îndrumările pe care mi le-a dat în ultimul stagiu al doctoratului. De asemenea doresc sa-i mulţumesc domnului profesor doctor Ioan Purdea pentru îndrumarea şi sprijinul acordat în intocmirea lucrării de disertaţie cu titlul "$(n, m)-$Inele".

Mulţumesc în mod special doamnei conferenţiar doctor Maria Sânziana Pop, pentru iniţierea în universul structurilor $n-$are, pentru sprijinul şi colaborarea foarte rodnică în studiul structurilor de $(n, m)-$semiinele.

Sincere mulţumiri adresez, de asemeni, colegilor de la catedra de Matematică şi Informatică a Centrului Universitar Nord Baia Mare.

Nu în ultimul rând, mulţumesc familiei şi tuturor celor care au manifestat faţă de mine răbdare şi încredere în această perioadă.

Capitolul 1

Structuri algebrice poliadice

Generalizarea noţiunii de grup se poate face în două moduri, fie slăbind axiomele grupului, ajungând astfel la semigrupuri, monoizi, grupoizi, fie înlocuind operaţia binară cu una $n-$ară ($n \geq 2$) ceea ce conduce la noţiunea de $n-$grup. Această generalizare a fost introdusă de Dőrnte [33] la începutul secolului trecut, tratată în detaliu de către E. L. Post [110] şi investigată de M. Hosszú [60], B. Gleichgewicht, K. Glazek [50],[49], J. Timm [129], W. A. Dudek [34], Ušan [131], I. Purdea [108] şi alţii. Interesul pentru studiul $n-$grupurilor este justificat, pe lângă aplicaţiile lor în fizica teoretică, informatică şi altele, de necesitatea cercetării proprietăţilor grupurilor care aparţin unui cadru mai general şi ale celor specifice cazului $n = 2$. Astfel, pare surprinzător faptul că pentru $n \geq 3$ există $n-$grupuri fără element neutru sau altele care au mai multe astfel de elemente.

Rezultatele obţinute în teoria $n-$grupurilor au impulsionat cercetările în sensul generalizării şi a altor structuri binare care conduc la $n-$grupoizi, $n-$semigrupuri şi $n-$cvasigrupuri, în studiul cărora şi-au adus contribuţii importante Čupona [28], [30], M. S. Pop [99], I. Purdea [108], D. Zupnik [141].

Acest prim capitol având un caracter introductiv prezintă în prima parte o serie de noţiuni şi rezultate din teoria $n-$semigrupurilor şi cea a $n-$grupurilor. De asemenea, definim noţiunea de $n-$monoid ca fiind un $n-$semigrup cu unitate laterală de $(n-1)$ elemente, nu neapărat unică şi prezentăm unele exemple care ne aparţin.

Cel de al doilea paragraf conţine rezultate originale relativ la caracterizarea $n-$semigrupurilor semiprimare, noţiune introdusă de noi ca o generalizare naturală a $r-$semigrupurilor şi a semigrupurilor semiprimare studiate în caz binar de către Bogdanović [16], [17].

1.1 $n-$Semigrupuri, $n-$Monoizi, $n-$Grupuri.

Definiţie 1.1.1. O mulţime oarecare A înzestrată cu o operaţie n-ară $(\,)_\circ : A^n \to A$ se numeşte n-grupoid.

Pentru imaginea sistemului de elemente $(a_1, a_2, ..., a_n)$ prin "$(\;)_\circ$" folosim notaţia $(a_1, a_2, ..., a_n)_\circ$; elementele $a_i \in A$ se numesc factori (sau uneori termeni), iar imaginea lor prin operaţia n-ară, produs (sumă).

Dacă $B \subseteq A^n$, atunci aplicaţia $(\,)_\circ : B \to A$ se numeşte operaţia parţială în A. Este uzuală următoarea convenţie de notaţie: secvenţa $a_i, \ldots, a_j$, formată din $j - i + 1$ factori consecutivi ai unui produs se notează pe scurt prin a_i^j, iar dacă

$$a_i = a_{i+1} = \ldots = a_j = a,$$

atunci ea se notează prin $\overset{(j-i+1)}{a}$.

Vom extinde această convenţie asupra unei secvenţe de $j-i+1$ elemente aparţinând lui A: notăm $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j \in A$ prin $a_i^j \in A$. Dacă $i > j$ atunci notaţia a_i^j desemnează secvenţa vidă.

Noţiunea de asociativitate şi comutativitate a unei operaţii binare poate fi generalizată în cazul $n-$ar în mai multe moduri.

Definiţie 1.1.2. $n-$Grupoidul $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte:

• *asociativ*, dacă pentru orice elemente $a_i \in A$ cu $i \in \{1, 2, ..., 2n-1\}$ şi $k \in \{1, 2, ..., n\}$ are loc egalitatea

$$((a_1^n)_\circ, a_{n+1}^{2n-1})_\circ = (a_1^{k-1}, (a_k^{k+n-1})_\circ, a_{k+n}^{2n-1})_\circ;$$

• *semicomutativ*, dacă pentru orice elemente $a_1, ..., a_n \in A$ avem

$$(a_1^n)_\circ = (a_n\, a_2^{n-1}\, a_1)_\circ;$$

• *comutativ*, dacă pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ şi orice elemente $a_1, ..., a_n \in A$ are loc egalitatea

$$(a_1^n)_\circ = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)})_\circ;$$

;

• *entropic* (sau *medial*) dacă pentru orice n^2 elemente din A, $a_{ij} \in A$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ are loc egalitatea

$$((a_{11}^{1n})_\circ, (a_{21}^{2n})_\circ, \ldots, (a_{n1}^{nn})_\circ)_\circ = ((a_{11}^{n1})_\circ, (a_{12}^{n2})_\circ, \ldots, (a_{1n}^{nn})_\circ)_\circ.$$

Definiţie 1.1.3. Un $n-$grupoid $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $n-$*semigrup* dacă pentru orice elemente $a_1, a_2, ..., a_{2n-1} \in A$ şi orice $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ sunt satisfăcute legile de asociativitate.

Atunci cînd ne referim la structuri în care operaţiile $n-$are implicate sunt asociative, parantezele grupând un număr admisibil de factori pot fi omise (unde prin număr admisibil de factori înţelegem un număr congruent cu 1 modulo $(n-1)$).

Definiţie 1.1.4. [110]. Un $(n-1)-$uplu u_1^{n-1} de elemente ale unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *element neutru la dreapta* (*la stânga*) *ca sistem de* $(n-1)$ *elemente* dacă pentru orice $a \in A$ avem $(a\, u_1^{n-1})_\circ = a$ (respectiv $(u_1^{n-1}\, a)_\circ = a$). Dacă u_1^{n-1} este unitate atât la stânga cât şi la dreapta atunci u_1^{n-1} se numeşte *unitate* $(n-1)-$*adică*.

Definiţie 1.1.5. [37]. Un $(n-1)-$uplu u_1^{n-1} de elemente ale unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *element neutru poliadic* dacă pentru orice $a \in A$ avem $(u_i^{n-1}\, a\, u_1^{i-1})_\circ = a$; oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observaţie 1.1.1. Dacă secvenţa u_1^{n-1} este unitate poliadică în $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$, atunci:
1) $u_1^{n-1} \in U(A)$;
2) Pentru orice $a \in A$ are loc egalitatea $(u_{n-1}\, u_1^{i-1}\, a\, u_i^{n-2})_\circ = a$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Maria S. Pop şi Adina Pop în lucrarea [95] au definit noţiunea de $n-$monoid, după cum urmează:

Definiţie 1.1.6. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95]) Un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $n-$*monoid* dacă există cel puţin o unitate, ca sistem de $(n-1)$ elemente $u_1^{n-1} \in A$ astfel încât $(a u_1^{n-1})_\circ = a = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, a)_\circ$ pentru orice $a \in A$. Cu alte cuvinte, sistemul de elemente u_1^{n-1} este unitate la dreapta şi $u_{n-1} u_1^{n-2}$ este unitate la stânga.

Deoarece unitatea de acest tip nu este neapărat unică, notăm cu $U(A, (\,)_\circ)$ mulţimea tuturor unităţilor ca sistem de $(n-1)$ elemente

$$U(A, (\,)_\circ) = \{u_1^{n-1} \in A; (x\, u_1^{n-1})_\circ = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, x) = x\,, (\forall)\, x \in A\}.$$

Observaţie 1.1.2. Un $n-$semigrup semicomutativ cu o unitate la dreapta este un $n-$monoid.

Observaţie 1.1.3. Dacă secvenţa u_1^{n-1} este unitate poliadică în $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$, atunci:

1) $u_1^{n-1} \in U(A)$;
2) Pentru orice $a \in A$ are loc egalitatea $(u_{n-1}\, u_1^{i-1}\, a\, u_i^{n-2})_\circ = a$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Propoziţie 1.1.1. (Maria S. Pop, **Pop Adina** [95]) *Dacă* $(A, (\,)_\circ)$ *este un* $n-$*monoid şi* $u_1^{n-1} \in U(A)$ *atunci* u_1^{n-1} *este unitate la stânga şi* $u_{n-1}u_1^{n-2}$ *este unitate la dreapta.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $u_1^{n-1} \in U(A, (\,)_\circ)$, atunci pentru orice $x \in A$, avem

$$\begin{aligned}(u_1^{n-1}\, x)_\circ &= (u_{n-1}, u_1^{n-2}, (u_1^{n-1}\, x)_\circ)_\circ \\ &= (u_{n-1}, u_1^{n-3}, (u_{n-2}\, u_1^{n-1})_\circ, x)_\circ \\ &= (u_{n-1}\, u_1^{n-3}\, u_{n-2}\, x)_\circ = x,\end{aligned}$$

adică u_1^{n-1} este o unitate la stânga.
De asemenea,

$$\begin{aligned}(x\, u_{n-1}\, u_1^{n-2})_\circ &= ((x\, u_{n-1}\, u_1^{n-2})_\circ, u_1^{n-1})_\circ \\ &= (x, (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, u_1)_\circ, u_2^{n-1})_\circ \\ &= (x\, u_1\, u_2^{n-1})_\circ = (x\, u_{n-1})_\circ = x,\end{aligned}$$

adică $u_{n-1}u_1^{n-2}$ este o unitate la dreapta. □

Vom da justificare a Definiţiei 1.1.6 a $n-$monoidului în capitolul 2, paragraful 2.7 când vom trata cele două modalităţi de reducere ale unui $n-$monoid la un monoid obşnuit.

Definiţie 1.1.7. [33]. Un element e al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $i-$*unitate*, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dacă pentru orice $a \in A$ avem

$$(\overset{(i-1)}{e}\; a\; \overset{(n-i)}{e})_\circ = a.$$

Dacă $e \in A$ este $i-$unitate pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ atunci e se numeşte *unitate* (sau *element neutru*).

Observăm că un $n-$semigrup în care există o $1-$unitate care este şi $n-$unitate este un $n-$monoid în sensul anterior definit de noi. Spre deosebire de cazul binar există $n-$monoizi cu mai multe astfel de unităţi.

Propoziţie 1.1.2. *Dacă* $n-$*semigrupul* $(A, (\,)_\circ)$ *are un element care este* $1-$*unitate şi* $2-$*unitate, notat cu* e*, atunci* e *este unitate în* $n-$*semigrupul* A.

Demonstraţie. Într-adevăr,

$$(e\,e\,a\,\overset{(n-3)}{e})_\circ = ((e\,e\,a\,\overset{(n-3)}{e})_\circ\,\overset{(n-1)}{e})_\circ = (e\,(e\,a\,\overset{(n-2)}{e})_\circ\,\overset{(n-2)}{e})_\circ = (e\,a\,\overset{(n-2)}{e})_\circ = a$$

Folosind inducţia matematică, presupunem că $(\overset{(k)}{e}\,a\,\overset{(n-k-1)}{e})_\circ = a$ şi arătăm că $(\overset{(k+1)}{e}\,a\,\overset{(n-k-2)}{e})_\circ = a$ pentru orice $a \in A$.

Dacă $a \in A$, atunci

$$\begin{aligned}(\overset{(k+1)}{e}\,a\,\overset{(n-k-2)}{e})_\circ &= ((\overset{(k+1)}{e}\,a\,\overset{(n-k-2)}{e})_\circ\,\overset{(n-1)}{e})_\circ\\ &= (e,(\overset{(k)}{e}\,a\,\overset{(n-k-1)}{e})_\circ,\,\overset{(n-2)}{e})_\circ = (e\,a\,\overset{(n-2)}{e})_\circ = a.\end{aligned}$$

Prin urmare $(\overset{(i-1)}{e}\,a\,\overset{(n-i)}{e})_\circ = a$, oricare ar fi $a \in A$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ □

Au loc următoarele afirmaţii:

(1) Orice $n-$semigrup comutativ este semicomutativ.

(2)[33] Orice $n-$semigrup semicomutativ este entropic.

(3)[44] Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este $n-$semigrup entropic cu element neutru, atunci el este comutativ.

Definiţie 1.1.8. Un element $z \in A$ al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte element *$i-$zero* sau *$i-$nul* dacă pentru orice $a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ avem

$$(a_1^{i-1}\,z\,a_{i+1}^n)_\circ = z.$$

Dacă elementul z este $i-$zero pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el se numeşte *zero*.

Elementul zero, dacă există, va fi notat cu 0 (în cazul în care acest lucru nu generează confuzii). În continuare vom folosi notaţia $A^* = A\backslash\{0\}$, dacă A are element zero, respectiv $A^* = A$ în caz contrar.

Definiţie 1.1.9. Un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte cu *$i-$simplificare relativ la o submulţime a sa* $X \subseteq A$, unde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dacă pentru orice $x_1, x_2, .., x_n \in X$, $a, b \in A$ avem

$$(x_1^{i-1}\,a\,x_{i+1}^n)_\circ = (x_1^{i-1}\,b\,x_{i+1}^n)_\circ \Rightarrow a = b.$$

$n-$Semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte cu *simplificare relativ la* X dacă este cu $i-$simplificare pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dacă $X = A^*$, atunci spunem că $n-$semigrupul A este cu *$i-$simplificare*, respectiv cu *simplificare*.

Definiţie 1.1.10. Un n-grupoid fără element zero $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *n-cvasigrup* dacă pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, şi orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ecuaţia

$$(a_1^{i-1}\,x\,a_{i+1}^n)_\circ = a_i$$

are soluţie unică în A.

Definiţie 1.1.11. [110]. Un semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *$n-$grup* sau *grup poliadic* dacă pentru orice elemente $a_1, a_2, .., a_n \in A$ şi orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ecuaţia

$$(a_1^{i-1}\, x\, a_{i+1}^n)_\circ = a_i \tag{1.1}$$

are soluţie unică în A.

Observaţie 1.1.4. a) Pentru $n = 2$ definiţiile de mai sus conduc la noţiunile obişnuite de grupoid, comutativitate, lege medială, semigrup, element neutru, respectiv grup.

b) Spre deosebire de bigrupuri, există $n-$grupuri care nu au element neutru sau care au mai multe elemente neutre.

c) Un $n-$grup se va numi semicomutativ (comutativ) dacă $n-$semigrupul care îl defineşte este semicomutativ (comutativ).

Definiţie 1.1.12. [33]. Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$grup şi $a \in A$. Soluţia unică a ecuaţiei

$$(\overset{(n-1)}{a}\, x)_\circ = a$$

se numeşte *element transversal* lui a (sau *transversala* lui a) şi se notează prin $\overline{a}$.

Dörnte, care introduce această noţiune, demonstrează următoarele:

Teoremă 1.1.1. [33] *a) Elementul $\overline{a}$ coincide cu soluţia ecuaţiei*

$$(\overset{(i-1)}{a}\, x\, \overset{(n-i)}{a})_\circ = a \tag{1.2}$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Pentru orice $a, b \in A$ şi orice poziţie a transversalei în produs avem

$$(\overset{(i-1)}{a}\, \overline{a}\, \overset{(n-i-1)}{a}\, b)_\circ = (b, \overset{(i-1)}{a}\, \overline{a}\, \overset{(n-i-1)}{a})_\circ = b$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, adică $(n-1)-$uplu $(\overset{(i-1)}{a}\,\overline{a}\,\overset{(n-i-1)}{a})$ este unitate la stânga şi la dreapta în $n-$grupul A, pentru orice $a \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi orice poziţie a transversalei.

c) Soluţia ecuaţiei (1.2) *poate fi scrisă în $n-$grupuri cu ajutorul elementelor transversale folosind $(n-1)(n-2)+1$ factori, astfel*

$$x = (\overset{(n-3)}{a_{i-1}}, \overline{a}_{i-1}, \ldots, \overset{(n-3)}{a_1}, \overline{a}_1, a_i, \overset{(n-3)}{a_n}, \overline{a}_n, \ldots, \overset{(n-3)}{a_{i-1}}, \overline{a}_{i+1})_\circ.$$

d) Un element $a \in A$ este în acelaşi timp $1-$unitate şi $n-$unitate într-un n-grup A, dacă şi numai dacă $a = \overline{a}$.

e) Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup comutativ, atunci un element $a \in A$ este unitate dacă şi numai dacă $a = \overline{a}$.

Observaţie 1.1.5. a) Pentru $n = 2$, $\overline{a}$ devine elementul neutru al grupului, dar în cazul $n \geq 3, \overline{a}$ are un comportament asemănător inversului lui a.

b) $\overline{\overline{a}} = a$ adică transversala transversalei unui element coincide cu acel element numai în cazul $n = 3$.

c) Într-un $n-$grup semicomutativ are loc:

$$\overline{(a_1^n)_\circ} = (\overline{a}_1, ..., \overline{a}_n)_\circ.$$

d)Orice $n-$grup este un $n-$monoid.

Definiţie 1.1.13. [110]. a) Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$semigrup şi $a \in A$. Puterile lui a se definesc inductiv astfel

$$a^{[0]} = a,\ a^{[1]} = (\overset{(n)}{a})_\circ, \ldots, a^{[k]} = (a^{[k-1]}\ \overset{(n-1)}{a})_\circ,\ (\forall) k \geq 1. \tag{1.3}$$

Pentru $k \geq 1$, elementul $a^{[k]}$ este obţinut prin operarea a $k(n-1)+1$ factori egali cu a.

b) Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este $n-$grup şi $a \in A$, atunci se definesc şi puterile negative ale lui a astfel: dacă $k \in \mathbb{Z}$ şi $k < 0$, atunci $a^{[-k]}$ este soluţia ecuaţiei $(x\, a\, \ldots\, a^{[-k-1]})_\circ = a$ unde membrul stâng al egalităţii are $(-k)(n-1)+1$ factori.

Definiţie 1.1.14. Un element $a \in A$ se numeşte *idempotent* dacă $a^{[1]} = a$.

Definiţie 1.1.15. Dacă $n-$semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ are element zero, 0, şi există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^{[m]} = 0$, atunci elementul a se numeşte *nilpotent.*

Observaţie 1.1.6. a) Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este $n-$grup şi $a \in A$, atunci $a^{[-1]} = \overline{a}$.

Prin inducţie după $-m$ putem arăta că, dacă $m < 0$, $a^{[m]}$ este soluţia ecuaţiei $(x \overset{(n-2)}{a}\ a^{[-m-1]})_\circ = a$.

b) Pentru orice $m, m_1, m_2, \ldots m_n, p \in \mathbb{Z}$ avem

$$(a^{[m_1]}, a^{[m_2]}, \ldots, a^{[m_n]})_\circ = a^{[m_1+m_2+\ldots+m_n+1]} \tag{1.4}$$

respectiv

$$(a^{[m]})^{[p]} = a^{[mp(n-1)+m+p]} = (a^{[p]})^{[m]}. \tag{1.5}$$

$$(a^{[1]})^{[1]} = a^{[n+1]} = (\overset{(n^2)}{a})_\circ;\ \left(a^{[n+1]}\right)^{[1]} = (\overset{(n^3)}{a})_\circ = a^{[n^2+n+1]} \tag{1.6}$$

$$(\overset{(n^k)}{a})_\circ = a^{[n^{k-1}+n^{k-2}+...+n+1]},\ \forall\ k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7}$$

c) Elementul $a \in A$ este idempotent dacă şi numai dacă $a = \overline{a}$.

Orice element neutru al unui $n-$grup este idempotent. În $n-$grupurile comutative cele două noţiuni, de element neutru şi element idempotent coincid.

Definiţie 1.1.16. Un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte:

a) normal [99] dacă pentru orice elemente $a_1^n \in A$ şi orice $k \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$(a_1^n)_\circ^{[k]} = (a_1^{[k]}, ..., a_n^{[k]})_\circ \tag{1.8}$$

b) strict reversibil [122] dacă pentru orice elemente $a_1^n \in A$ există $k, k_1, ..., k_n \in A$ astfel încât

$$(a_1^n)_\circ^{[k]} = (\overset{k_{\sigma(1)}}{a_{\sigma(1)}}, ..., \overset{k_{\sigma(n)}}{a_{\sigma(n)}})_\circ \tag{1.9}$$

pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$.
c) surjectiv dacă $A^{[1]} = A$.

In particular, orice $n-$semigrup comutativ este strict reversibil (pentru $m = m_{\sigma(1)} = \cdots = m_{\sigma(n)} = 0$).
Evident, comutativitatea implică semicomutativitatea, semicomutativitatea implică entropia şi entropia implică normalitatea n-semigrupului A.

Există şi alte caracterizări ale $n-$grupurilor datorate lui Boccioni [14], Monk şi Sioson [82], Ušan Janez [132] şi alţii.

În continuare vom aminti câteva dintre aceste caracterizări.

În 1928, Dörnte dă următoarea definiţie $n-$grupului

Definiţie 1.1.17. [33] Un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $n-$*grup* dacă pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi orice alegere a elementelor $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ aplicaţia

$$f_i : A \to A, f_i(x) = (a_1^{i-1}\, x\, a_{i+1}^n)_\circ$$

este o bijecţie.

Se arată că în definiţia $n-$grupului este suficient ca aplicaţiile f_i să fie surjective.

Monk şi Sioson, în lucrarea [82] demonstrează că, dacă în $n-$semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ aplicaţiile f_1 şi f_n anterior definite sunt bijecţii atunci $(A, (\,)_\circ)$ este $n-$grup.

În 1965, Szasz [127] defineşte n-grupul în felul următor:

Definiţie 1.1.18. Perechea $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup şi ecuaţiile $(x\, a_2^n)_\circ = a_1$ şi $(a_1^{n-1}\, x)_\circ = a_n$ au soluţii unice.

În 1967 B. Gleichegewicht, K. Glazek [50] definesc $n-$grupul plecând de la algebra universală.

Teoremă 1.1.2. [50]. *Fie $(A, (\,)_\circ, ^-)$ o algebră universală unde "$(\,)_\circ$" este o operaţie $n-$ară şi "$^-$" este o operaţie unară. Dacă operaţia $n-$ară este asociativă şi*

$$(\overline{a} \overset{(n-2)}{a} x)_\circ = (x, \overset{(n-2)}{a}, \overline{a})_\circ = x; \; (a\,\overline{a} \overset{(n-3)}{a} x)_\circ = (x \overset{(n-3)}{a} \overline{a}\, a)_\circ = x$$

pentru orice $x, a \in A$ atunci $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup, iar $\overline{a}$ este transversalul lui a.

Corespondenţa $(A, (\,)_\circ) \longrightarrow (A, (\,)_\circ, ^-)$ realizează o bijecţie între clasa $n-$grupurilor şi clasa algebrelor universale cu o operaţie $n-$ară şi una unară care verifică condiţiile teoremei de mai sus. Această bijecţie ne permite să identificăm $n-$grupul $(A, (\,)_\circ)$ cu algebra universală $(A, (\,)_\circ, ^-)$.

Usan Janez [131] introduce o operaţie $\varepsilon - (n-2)-$ară, numită operaţia neutrală astfel

Definiţie 1.1.19. [131] Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$semigrup. Operaţia $\varepsilon : A^{n-2} \longrightarrow A$ definită de relaţiile

$$(\varepsilon(a_1^{n-2}), a_1^{n-2}, x)_\circ = x \tag{1.10}$$

$$(x, a_1^{n-2}, \varepsilon(a_1^{n-2}))_\circ = x \tag{1.11}$$

pentru orice $a_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi orice $x \in A$ se numeşte *operaţie* $\{1, n\}-$*neutrală*.

Observaţie 1.1.7. [131] a) Într-un $n-$grupoid există cel mult o operaţie $\{1, n\}-$neutrală.
b) În fiecare $n-$grup există o operaţie $\varepsilon - \{1, n\}-$neutrală. Ušan Janez dă o altă caracterizare $n-$grupului pentru $n \geq 3$ demonstrând următoarea teoremă

Teoremă 1.1.3. [131] *Pentru $n \geq 3$ un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup dacă şi numai dacă pe el se poate defini operaţia $\varepsilon : A^{n-2} \to A$, $\{1, n\}-$neutrală.*

În 1994 acelaşi Ušan Janez defineşte într-un n-semigrup $(A, (\,)_\circ)$ operaţia $(n-1)$-ară, aşa numită operaţie inversă, astfel

Definiţie 1.1.20. [131] Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup, operaţia , $f : A^{n-1} \to A$ dată de relaţiile

$$(f(a_1^{n-2}, a), a_1^{n-2}, (a, a_1^{n-2}, x)_\circ)_\circ = x \tag{1.12}$$

$$((x, a_1^{n-2}, a)_\circ, a_1^{n-2}, f(a_1^{n-2}, a))_\circ = x, \tag{1.13}$$

pentru orice $a_i \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oricare ar fi $a \in A$, oricare ar fi $x \in A$ şi se numeşte *operaţia inversă* $(n-1)-$*ară*.

Ušan Janez demonstrează faptul că există cel mult o operaţie $(n-1)-$ară în $n-$semigrupul $(A, (\,)_\circ)$.

Teoremă 1.1.4. [131] *$n-$Semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup dacă pe A se poate defini o operaţie $(n-1)-$ară $f : A^{n-1} \to A$ care verifică relaţiile* (1.12) *şi* (1.13).

Observaţie 1.1.8. 1^0. Pentru $n = 2$ operaţia $\varepsilon - \{1, n\}-$neutrală devine operaţia nulară $\varepsilon(a_1^0) = \varepsilon(\emptyset) = e \in A$ de fixare a elementului neutru cu proprietatea $(e, x)_\circ = (x, e)_\circ = x$, oricare ar fi $x \in A$. În notaţie multiplicativă avem $x \cdot e = e \cdot x = x$, oricare ar fi $x \in A$. Operaţia inversă este aplicaţia unară $f : A \to A$ care îndeplineşte condiţia

$$(f(a), (a, x)_\circ)_\circ = x = ((x, a)_\circ, f(a))_\circ$$

oricare ar fi $x \in A$.

În notaţie multiplicativă avem $f(a) \cdot a = a \cdot f(a) = e$, e fiind elementul neutru al bigrupului. Deci $f(a) = a^{-1}$, unde a^{-1} este inversul lui a în bigrupul $(A, \cdot)$.

2^0. Dacă $(A, (\;)_\circ)$ este un $n-$grup şi u_1^{n-2} este unitate la dreapta ca sistem de $(n-1)$ elemente, adică $(x\, u_1^{n-1})_\circ = x$, oricare ar fi $x \in A$ iar $u_{n-1}u_1^{n-2}$ este unitate la stânga ca sistem de $(n-1)$ elemente, adică $(u_{n-1}u_1^{n-2}\, x)_\circ = x$ pentru oricare $x \in A$, atunci vom avea $\varepsilon(u_1^{n-2}) = u_{n-1}$, unde ε este operaţia $\{1, n\}-$neutrală.

Într-adevăr,

$$(\varepsilon(u_1^{n-2}), u_1^{n-2}, x)_\circ \;\; = \;\; x \text{ pentru orice } x \in A,$$

$$(x, u_1^{n-2}, \varepsilon(u_1^{n-2}))_\circ \;\; = \;\; x \text{ pentru orice } x \in A.$$

Din faptul că $u_{n-1}u_1^{n-2}$ este unitate la stânga, respectiv u_1^{n-1} este unitate la dreapta rezultă că $\varepsilon(u_1^{n-2}) = u_{n-1}$.

3^0. Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$grup şi $a \in A$ atunci conform Teoremei 1.1.3 se poate defini pe el o operaţie $\varepsilon : A^{n-2} \to A$, $\{1, n\}-$neutrală, adică

$$(\varepsilon(\overset{(n-2)}{a}), \overset{(n-2)}{a}, x)_\circ = x = (x, \overset{(n-2)}{a}, \varepsilon(\overset{(n-2)}{a}))_\circ$$

oricare ar fi $x \in A$.

Conform Teoremei 1.1.1 punctul b) avem

$$(\overline{a}\overset{(n-2)}{a}\, x)_\circ = (x\overset{(n-2)}{a}\,\overline{a}) = x \text{ pentru orice } x \in A$$

Rezultă că $\varepsilon(\overset{(n-2)}{a}) = a$.

4^0. Pentru $n = 3$ vom avea $\varepsilon(\overset{(3-2)}{a}) = \varepsilon(a) = \overline{a}$. Rezultă

$$\varepsilon(\overline{a}) = \overline{\overline{a}} \tag{1.14}$$

Deoarece $n = 3$ vom avea

$$\varepsilon(\overline{a}, \overset{(3-3)}{a}) = \varepsilon(\overline{a}) = a. \qquad (1.15)$$

Din relaţiile (1.14) şi (1.15) rezultă că $a = \overline{\overline{a}}$.

$f(a, a) = (\overline{a}, \overline{a}, \overline{a})_\circ = \overline{a}^{[1]}$ unde f este operaţia inversă în 3-grupul $(A, (\,)_\circ)$.

Într-adevăr, folosind punctul a) şi b) din Teorema 1.1.1 vom avea

$$\begin{aligned}(f(a, a), a, (a\,a\,x)_\circ)_\circ &= ((\overline{a}\,\overline{a}\,\overline{a})_\circ, a, (a\,a\,x)_\circ)_\circ = (\overline{a}, \overline{a}, (\overline{a}, a, (a\,a\,x)_\circ)_\circ)_\circ = \\ &= (\overline{a}, \overline{a}, (a\,a\,x)_\circ)_\circ = (\overline{a}, (\overline{a}\,a\,a)_\circ, x)_\circ = (\overline{a}\,a\,x)_\circ = x,\end{aligned}$$

pentru orice $x \in A$.

Analog, se verifică

$$((x\,a\,a)_\circ, a, f(a, a)_\circ)_\circ = ((x\,a\,a)_\circ, a, (\overline{a}\,\overline{a}\,\overline{a})_\circ)_\circ = x$$

pentru orice $x \in A$.

$f(a, b) = (\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a})_\circ$, deoarece $((\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a})_\circ, a, (b\,a\,x)_\circ)_\circ = x$ şi $((x\,a\,b)_\circ, a, (\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{a})_\circ)_\circ = x$ pentru orice $x \in A$.

5^0. Cu ajutorul Teoremelor 1.1.3 şi 1.1.4 demonstrate de Ušan în [132] putem da şi alte caracterizări ale $n-$grupului ca algebră universală.

Definiţie 1.1.21. [132] O algebră universală $(A, (\,)_\circ, \varepsilon)$ unde $(\,)_\circ : A^n \to A$, $\varepsilon : A^{n-2} \to A$ cu $n \geq 3$, este un $n-$grup dacă operaţia $n-$ară este asociativă şi operaţia $(n-2)-$ară este $\{1, n\}-$neutrală.

Definiţie 1.1.22. [132] O algebră universală $(A, (\,)_\circ, f)$ înzestrată cu o operaţie $n-$ară $(\,)_\circ : A^n \to A$ asociativă şi o operaţie $(n-1)-$ară $f : A^{n-1} \to A$ definită de relaţiile (1.8) şi (1.9) este un $n-$grup.

Definiţie 1.1.23. a) O submulţime $S \subseteq A$ a unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *sub-n-semigrup* al lui A dacă ea este închisă în raport cu operaţia "$(\,)_\circ$", adică pentru orice element $a_1, a_2, ..., a_n \in S$ avem $(a_1^n)_\circ \in S$.
b) O submulţime $S \subseteq A$ a unui $n-$grup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *sub-n-grup* al lui A dacă pentru orice element $a_1, a_2, ..., a_n$, $a \in S$ avem $(a_1^n)_\circ \in S$ şi $\overline{a} \in S$.

c) Dacă $(\overset{(n)}{S})_\circ = S$, pe scurt $S^{[1]} = S$ spunem că S este un *sub-n-semigrup* (*sub-n-grup*) *surjectiv* al lui A.

Definiţie 1.1.24. Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$semigrup. O relaţie de echivalenţă ρ pe A se numeşte *congruenţă* pe $(A, (\,)_\circ)$ dacă ea este compatibilă cu operaţia $n-$ară de semigrup, adică oricare ar fi $a_i, b_i \in A$ şi $(a_i, b_i) \in \rho$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ implică $((a_1^n)_\circ, (b_1^n)_\circ) \in \rho$.

Definiţie 1.1.25. Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$grup. O relaţie de echivalenţă ρ pe A se numeşte *congruenţă* pe $(A, (\,)_\circ)$ dacă ρ este compatibilă cu operaţia "$(\,)_\circ$" şi "$^-$", adică pentru orice $a, b, a_i, b_i \in A$ şi $(a, b), (a_i, b_i) \in \rho$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ implică $(\overline{a}, \overline{b}) \in \rho$ şi $((a_1^n)_\circ, (b_1^n)_\circ) \in \rho$.

Observaţie 1.1.9. Mulţimea sub$-n-$semigrupurilor unui n-semigrup $(A, (\,)_\circ)$ formează un sistem de închidere algebric pe A.

Definiţie 1.1.26. Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup, $X \subseteq A$ şi $< X >= \cap\{B \mid X \subseteq B$ şi B subgrup al lui $A\}$ atunci $< X >$ este un sub$-n-$semigrup al lui A numit sub$-n-$semigrupul generat de X, iar X este sistemul lui de generatori.

Dacă $X = \{x\}$, atunci $< x >$ se numeşte $n-$semigrupul ciclic generat de x.

Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup ($n-$grup) şi $a \in A$ atunci $n-$semigrupul ($n-$grupul) generat de a este

$$< a >= \{a^{[k]} \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\} \text{ (respectiv } < a >= \{a^{[k]} \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

Definiţie 1.1.27. a) Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$semigrup şi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Submulţimea $I \subseteq A$ este un $i-$*ideal* al lui A dacă pentru orice $a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n \in A$ şi orice $x \in I$ avem $(a_1^{i-1}\, x\, a_{i+1}^n)_\circ \in I$, adică $(\overset{(i-1)}{A}\ I\ \overset{(n-i)}{A})_\circ \subseteq I$.

b) Dacă I este un $i-$ideal al lui A pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci I se numeşte *ideal* al lui A.

Prin convenţie

$$(\overset{(n-1)}{A}\ I\ \overset{0}{A})_\circ = (\overset{(n-1)}{A}\ I)_\circ\,;\ (\overset{0}{A}\, I\ \overset{(n-1)}{A})_\circ = (I\ \overset{(n-1)}{A})_\circ \text{ şi } (\overset{0}{A}\, I\, \overset{0}{A})_\circ = I.$$

Evident $(\overset{(n)}{A})_\circ = A^{[1]}$.

c) Un ideal I al $n-$semigrupului $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *propriu* dacă $I \neq A$ şi $I \neq \emptyset$. Un $n-$semigrup fără ideale proprii se numeşte *simplu.*

d) $i-$Idealul generat de elementul $a \in A$ se numeşte $i-$*ideal principal* şi se notează prin $(a)_i$.

Teoremă 1.1.5. *Au loc următoarele:*

(1) Orice i$-$ideal (ideal) al unui n$-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ *este sub$-$n$-$semigrup al lui* A.

(2) Mulţimea i$-$idealelor (idealelor) unui n$-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ *formează un sistem de închidere algebric pe A (deci o latice completă).*

(3) Dacă $H \subseteq A$ *şi* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *atunci i$-$idealul generat de H, notat* $(H)_i$, *adică intersecţia i$-$idealelor lui A care includ pe H, este dat constructiv prin*

$$(H)_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k \text{ unde } X_0 = H;\ X_{k+1} = (\overset{(i-1)}{A}\ X_k\ \overset{(n-i)}{X})_\circ\,,\ k \geq 0.$$

(4) Orice i−ideal al unui n−semigrup este reuniunea i−idealelor principale pe care le conţine $(H)_i = \bigcup\limits_{a\in H}(a)_i$.

Definiţie 1.1.28. Un $i-$ideal (ideal) M al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *minimal* dacă $M \neq \emptyset$ şi pentru orice $i-$ideal (ideal) I din $I \subseteq M$ rezultă $I = M$ sau $I = \emptyset$.

Teoremă 1.1.6. [123]. *Fiecare* $1-$*ideal (*$n-$*ideal) minimal* M *al unui* $n-$*semigrup* $(A, (\,)_\circ)$ *este de forma*

$$M = (x \overset{(n-1)}{A})_\circ \; (M = (\overset{(n-1)}{A} x)_\circ)$$

pentru orice $x \in M$.

Definiţie 1.1.29. Un $i-$ideal (ideal) M al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *maximal* dacă $M \neq A$ şi pentru orice $i-$ideal (ideal) I din $M \subseteq I$ rezultă $I = M$ sau $I = A$.

Definiţie 1.1.30. a) Un ideal I al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *prim* dacă pentru orice ideale $I_1, I_2, \ldots, I_n$ din $(I_1, I_2, \ldots, I_n)_\circ \subseteq I$ rezultă $I_i \subseteq I$ pentru un anumit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Idealul I al $n-$semigrupului $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *complet prim* dacă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ din $(x_1^n)_\circ \in I$ rezultă că există $m \in \mathbb{N}$ şi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $x_i \in I$.

Observaţie 1.1.10. In ideal I al unui $n-$semigrup $(A,\ (\,)_\circ)$ este complet prim dacă şi numai dacă $A\backslash I$ este un sub-$n-$semigrup al lui A.

Definiţie 1.1.31. Idealul I al $n-$semigrupului $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte *semiprim* dacă

$$(\forall\, a \in A)(a^{[1]} \in I \Rightarrow\ a \in I).$$

Observăm că orice ideal complet prim este ideal semiprim.

Exemple de $n-$semigrupuri, $n-$monoizi şi $n-$grupuri

Exemplul 1.1.1. Fie $(A, \cdot)$ un semigrup. Operaţia $n-$ară definită prin:

$$(a_1^n)_\circ = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

induce pe A o structură de $n-$semigrup. Aceasta se numeşte extinderea $n-$ară a semigrupului $(A, \cdot)$. Dacă $(A, \cdot)$ este un grup, atunci extinderea sa $n-$ară este un $n-$grup cu element neutru.

Exemplul 1.1.2. [81] Fie $n \geq 3$ şi p cel mai mic divizor prim al lui $n-1$ şi $M = \{a_{i1}, ..., a_{ip}\}$ $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ mulţimi disjuncte două câte două, iar $M = \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i$.

Fie $f : M \to M$ funcţia definită astfel:

$$f(a_{ij}) = \begin{cases} a_{i+1,j} \text{ pentru } i < n-1 \text{ şi } \ j \leq p, \\ a_{1,j+1} \text{ pentru } i = n-1 \text{ şi } \ j < p, \\ a_{11} \text{ pentru } i = n-1 \text{ şi } \ j = p. \end{cases}$$

Funcţia f este o permutare a mulţimii M, ordinul lui f în grupul tuturor permutărilor fiind $p(n-1)$. Definim $g_i = f^{i(n-1)+1}$, $i = 0, 1, ...p-1$, mulţimea $\{g_0, g_1, ..., g_{p-1}\}$ formează un $n-$semigrup fără unitate faţă de operaţia de compunere succesivă a n funcţii.

Monk şi Sioson [81] demonstrează că nu este posibil să îi adăugăm un nou element e care să fie unitate în $n-$semigrup.

Acest $n-$semigrup constituie un exemplu de $n-$semigrup ce nu poate fi obţinut ca extindere n-ară a unui semigrup.

Exemplul 1.1.3. ([81]) Fie $M_1, M_2, ..., M_{n-1}, n-1$ mulţimi nevide, două câte două disjuncte şi având acelaşi cardinal. Fie A mulţimea funcţiilor

$$f : \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i \to \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i \text{ cu } f(M_i) \subseteq M_{i+1} \text{ pentru } i < n-1 \text{şi } f(M_{n-1}) \subseteq M_1.$$

Operaţia $n-$ară pe A definită prin $(f_1, f_2, ...f_n)_* = f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_n$ defineşte pe A o structură de $n-$semigrup necomutativ, numit n-semigrupul disjunct al funcţiilor.

Monk şi Sioson demonstrează că fiecare n-semigrup este izomorf cu un n-semigrup disjunct de funcţii.

Ca un corolar al ei se obţine un rezultat demonstrat de Post [110] pentru $n-$grupuri finite şi de Timm [129] pentru orice $n-$grup.

Orice $n-$grup se poate scufunda izomorf într-un $n-$grup disjunct de funcţii bijective (numit şi $n-$grupul substituţiilor $n-$are).

Exemplul 1.1.4. Fie A o mulţime oarecare pe care definim operaţiile $n-$are "$(\ )_\circ$" şi "$(\ )_*$" astfel : $(a_1^n)_\circ = a_1$ şi respectiv $(a_1^n)_* = a_n$.

$(A, (\ )_\circ)$ şi $(A, (\ )_*)$ sunt $n-$semigrupuri entropice fără a fi semicomutative. Ele reprezintă extinderile în caz $n-$ar a semigrupului nul la stânga, respectiv nul la dreapta.

Exemplul 1.1.5. [99] Fie $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ şi operaţia ternară

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))_\circ = (x_1 y_2 x_3, y_1 x_2 y_3).$$

$(A, (\,)_\circ)$ este un 3-semigrup semicomutativ care nu e comutativ.

Exemplul 1.1.6. Mulţimea claselor de resturi modulo n, pe care o vom nota

$$\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, ..., \widehat{n-1}\},$$

înzestrată cu operaţia ternară $(x_1, x_2, x_3)_\circ = x_1 (\widehat{n - x_2}) \cdot x_3$ unde prin " $\cdot$ " am notat înmulţirea modulo n , este un 3-semigrup comutativ.

Exemplul 1.1.7. (**Adina Pop**) Dacă considerăm aceeasi mulţime $A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ pe care definim operaţia $(\,)_\circ : A^4 \to A$ dată de:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))_\circ = (x_1x_2x_3x_4, y_1x_2x_3x_4 + y_2x_3x_4 + y_3x_4 + y_4)$$

atunci perechea $(A, (\,)_\circ)$ este un $4-$monoid necomutativ, unde mulţimea unităţilor ca sistem de elemente este infinită şi anume $U(A) = \{(\frac{1}{ab}, 0); (a, 0); (b, 0) | a, b \in A \setminus \{0\}\}$ iar perechea $(1, 0)$ este element neutru.

Exemplul 1.1.8. (Maria S.Pop , **Pop Adina** [95]) Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ înzestrată cu o operaţie $(2n + 1)-$ară, $n \in \mathbb{N}^*$ definită astfel:

$$(k_1^{2n+1})_\circ = k_1 - k_2 + k_3 - \ldots + k_{2n+1}$$

este un $(2n + 1)-$monoid semicomutativ care are toate elementele idempotente şi în plus $U(\mathbb{N}) = \{\overset{(2n)}{a} | a \in \mathbb{N}\}$.

Exemplul 1.1.9. (Pop S. Maria, **Pop Adina** [95]) Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ înzestrată cu aceeaşi operaţie ca cea definită în Exemplul 1.1.8 este un $(2n+1)-$grup.

Exemplul 1.1.10. (Maria S. Pop, **Pop Adina** [95]) Mulţimea $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cu operaţia ternară

$$(\,)_\circ : A^3 \to A, ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))_\circ = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3)$$

este un $3-$monoid semicomutativ, unde $U(A) = \{(1, 1)(1, 1)\}$.

Exemplul 1.1.11. (Pop S. Maria, **Pop Adina** [95]) Mulţimea $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ împreună cu operaţia definită în Exemplul 1.1.10 este un $3-$monoid semicomutativ unde $U(A) = \{(1, 1)(1, 1); (-1, -1)(-1, -1); (-1, 1)(1, -1)\}$

Exemplul 1.1.12. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ definim operaţia ternară $(\,)_\circ : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2$ astfel

$$(x_1, x_2, x_3)_\circ = x_1 + x_2 + x_3, \quad \text{adică} \quad \begin{array}{l} (\widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{0})_\circ = \widehat{0} \\ (\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{1})_\circ = \widehat{0} \\ (\widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{1})_\circ = \widehat{1} \\ (\widehat{1}, \widehat{1}, \widehat{1})_\circ = \widehat{1} \end{array}$$

Perechea $(\mathbb{Z}_2, \circ)$ este un $3-$grup comutativ având ca elemente neutrale pe $\widehat{0}$ şi $\widehat{1}$ care sunt şi elemente idempotente, iar transversalele lui $\widehat{0}$ şi $\widehat{1}$ sunt $\overline{\overline{\widehat{0}}} = \widehat{0}$ respectiv $\overline{\overline{\widehat{1}}} = \widehat{1}$.

Exemplul 1.1.13. Pe aceeaşi mulţime $\mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ definim o altă operaţia ternară $(\,)_* : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2$ şi astfel

$$(x_1, x_2, x_3)_* = x_1 + x_2 + x_3 + \widehat{1}, \quad \text{adică} \quad \begin{array}{l} (\widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{0})_* = \widehat{1} \\ (\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{1})_* = \widehat{1} \\ (\widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{1})_* = \widehat{0} \\ (\widehat{1}, \widehat{1}, \widehat{1})_* = \widehat{0} \end{array}$$

Perechea $(\mathbb{Z}_2, *)$ este un $3-$grup comutativ fără unitate şi fără elemente idempotente iar în acest caz transversalele lui $\widehat{0}$ şi $\widehat{1}$ sunt $\overline{\widehat{0}} = \widehat{1}$, $\overline{\widehat{1}} = \widehat{0}$.

Exemplul 1.1.14. Considerăm mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ şi definim o operaţie $n-$ară, unde n este un număr impar $(\,)_\circ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel $(x_1^n)_\circ = x_1 - x_2 + x_3 - ... - x_{n-1} + x_n$. Operaţia "$(\,)_\circ$" este asociativă.

Deoarece $\overline{x} = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ rezultă că $(\mathbb{R}, (\,)_\circ)$ este un grup ternar semicomutativ cu toate elementele idempotente, fără unitate.

Exemplul 1.1.15. Considerăm mulţimea numerelor complexe de modul 1, $M = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Definim operaţia $* : M^3 \to M$ dată de $(z_1, z_2, z_3)_* = \dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$.

Operaţia ternară "$(\,)_*$" este semicomutativă, asociativă, iar ecuaţiile $(z_1, z_2, z)_* = z_3$ şi $(z_1, z, z_3)_* = z_2$ au soluţie unică în M, pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in M$.

Deoarece $(z, z, z)_* = z$ pentru orice $z \in M$ rezultă că toate elementele lui M sunt idempotente.

Perechea $(M, (\,)_*)$ este, de asemenea, grup ternar semicomutativ cu toate elementele idempotente şi fără unitate.

Definiţie 1.1.32. Fie $n-$semigrupurile ($n-$grupurile) $(A, (\,)_\circ)$ şi $(B, (\,)_*)$. Aplicaţia $f : A \to B$ se numeşte *omomorfism de $n-$semigrupuri* (*omomorfism de $n-$grupuri*) dacă pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ avem

$$f((a_1^n)_\circ) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))_*$$

Dacă f este omomorfism bijectiv de $n-$semigrupuri (de $n-$grupuri) atunci f este un *izomorfism de $n-$semigrupuri* (de $n-$grupuri) şi scriem

$$A \cong B.$$

Un izomorfism al lui A în el însusşi se numeşte *automorfism*.

Plecând de la algebre universale obţinem următoarea proprietate:

Proprietatea 1.1.1. *Fie $f : A \to B$ un omomorfism al $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(A, (\,)_\circ)$ cu valori în $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(B, (\,)_*)$.*

a) Dacă A' este un $n-$subsemigrup ($n-$subgrup) al $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(A', (\,)_\circ)$ atunci $f(A')$ este un $n-$subsemigrup ($n-$semigrup) al $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(B, (\,)_*)$.

b) Dacă B' este un $n-$subsemigrup ($n-$subgrup) al $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(B, (\,)_*)$ atunci $f^{-1}(B')$ este un $n-$subsemigrup ($n-$subgrup) al $n-$semigrupului ($n-$grupului) $(A, (\,)_\circ)$.

Proprietatea 1.1.2. *Dacă $f : A \to B$ este un omomorfism al $n-$grupurilor $(A, (\,)_\circ)$ şi $(B, (\,)_*)$ atunci imaginea transversalei oricărui element $a \in A$ coincide cu transversala lui a în B, adică $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$.*

1.2 $n-$Semigrupuri semiprimare

Studiul semigrupurilor comutative primare a fost iniţiat de M. Satyanarayana [118], continuat de H. Lal [75] şi generalizat de S. Bogdanović [16], [17]. În cazul în care operaţia binară este comutativă, Lal a definit semigrupul semiprimar ca şi un semigrup în care radicalul oricărui ideal este ideal prim. În cazul în care operaţia binară nu este comutativă, Bogdanović a introdus noţiunea de $r-$semigrup şi semigrup $r-$semiprimar. În acest paragraf, noi vom extinde în cazul $n-$ar, $n \in \mathbb{N}$; $n > 2$ noţiuniunile definite de Bogdanović) şi vom da câteva caracterizări ale acestor clase de $n-$semigrupuri.

Rezultatele din acest paragraf ne aparţin şi au fost publicate în lucrarea [92].

Definiţie 1.2.1. Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $n-$semigrup. Un ideal I al $n-$semigrupului A se numeşte *semiprimar* dacă

$$(\forall\, a_1, \ldots, a_n \in A)((a_1^n)_\circ \in I \Rightarrow \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\, ; \exists\, m_i \in \mathbb{N}; a_i^{[m_i]} \in I).$$

$n-$Semigrupul A este semiprimar dacă toate idealele sale sunt semiprimare.

Definiţie 1.2.2. Dacă S este o submulţime a $n-$semigrupului A, atunci mulţimea

$$\mathrm{rad}S = \{x \in A; \exists m \in \mathbb{N}; x^{[m]} \in S\}.$$

se numeşte *radicalul* mulţimii S.

Observaţie 1.2.1. Dacă $S_1 \subseteq S_2$ atunci $\mathrm{rad}S_1 \subseteq \mathrm{rad}S_2$, $\mathrm{rad}S_1 \cap \mathrm{rad}S_2 = \mathrm{rad}(S_1 \cap S_2)$ şi $\mathrm{rad}S_1 \cup \mathrm{rad}S_2 = \mathrm{rad}(S_1 \cup S_2)$, adică $\mathrm{rad}: \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ este un endomorfism al laticii submulţimilor lui A.

Definiţie 1.2.3. Dacă I este un ideal al $n-$semigrupului $(A, (\,)_\circ)$, atunci rad$I$ se numeşte *radicalul prim* al lui I.

Restricţia rad:$\mathcal{I}(A) \to \mathcal{P}(A)$ este un omomorfism al laticii idealelor $n-$semigrupului A, notat $\mathcal{I}(A)$, în laticea submulţimilor mulţimii A, $\mathcal{P}(A)$.

Definiţie 1.2.4. Mulţimea $S \subseteq A$ (idealul I al lui A) se numeşte $r-$ *mulţime* ($r-$*ideal*) dacă rad$S$ (rad$I$) este ideal în A.

Un $n-$ semigroup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $r - n-$*semigrup* dacă orice ideal al lui A este $r-$ideal.

Definiţia $r-$idealului nu este superfluă deoarece radicalul unui ideal nu este, în general un ideal şi în plus, există submulţimi S ale $n-$semigrupului A care nu sunt ideale, dar rad$S$ este ideal al lui A.

Definiţie 1.2.5. Idealul I se numeşte $r-$ *semiprimar* dacă rad$I$ este ideal complet prim în A. $n-$Semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ este $r-$semiprimar dacă toate idealele sale sunt $r-$semiprimare.

Exemplul 1.2.1. [99] Mulţimea $A = \{a, b, c\}$ înzestrată cu operaţia ternară $(\,)_\circ : A^3 \to A$;

$$(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} c & \text{dacă } x_1 = x_2 = x_3 = c \\ a & \text{dacă cel puţin un } x_i \neq c; \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

este un semigrup comutativ ternar care are doi idempotenţi, a , c dar nu are element neutru. Acest 3$-$semigrup nu este surjectiv deoarece $b \notin A^{[1]}$.

Idealele $n-$semigrupului $(A, (\,)_\circ)$ sunt $\emptyset, \{a\}; \{a, c\}, \{a, b\}$ şi A.
Deoarece rad$\{a\}$=rad$\{a, b\}$=$\{a, b\}$; rad$\{a, c\}$= rad$A$=A sunt de asemenea ideale rezultă că $(A, (\,)_\circ)$ este $r-$semigrup ternar. Mai mult, acest semigrup ternar este r-semiprimar. De asemenea, Observăm că deşi mulţimea $\{b\}$ nu este un ideal, rad $\{b\} = \emptyset$ este un ideal al lui A.

Exemplul 1.2.2. [99] Dacă considerăm mulţimea $A = \{a, b, c, d\}$ înzestrată cu operaţia ternară $(\,)_\circ : A^3 \to A$ definită prin $(a, x, y)_\circ = a$; $(b, x, y)_\circ = b$; $(c, a, x)_\circ = a$; $(c, b, x)_\circ = b$; $(c, c, x)_\circ = x$; $(c, d, x)_\circ = x$; $(d, a, x)_\circ = a$; $(d, b, x)_\circ = b$; $(d, c, x)_\circ = x$; $(d, d, x)_\circ = x$; oricare ar fi $x, y \in A$, atunci $(A, (\,)_\circ)$ este un semigrup ternar normal, unde $x^{[1]} = x$ pentru orice $x \in A$.

Acest semigrup ternar nu este entropic deoarece considerând matricea $\begin{pmatrix} c & a & a \\ b & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$ avem

$$((c, a, a)_\circ, (b, a, a)_\circ, (a, a, a)_\circ)_\circ = a \neq ((c, b, a)_\circ, (a, a, a)_\circ, (a, a, a)_\circ)_\circ = b.$$

Singurul ideal propriu al lui $(A,(\,)_\circ)$, este mulţimea $\{a,b\}$ şi în plus, $\text{rad}\{a,b\} = \{a,b\}$. Deci $(A,(\,)_\circ)$ este un $r-3-$semigrup şi mai mult este un semigup ternar $r-$semiprimar.

Exemplul 1.2.3. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) Mulţimea $A = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ înzestrată cu operaţia ternară $(\,)_\circ : A^3 \to A$ definită prin $((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2))_\circ = (a_2\,b_2\,c_1, a_2\,b_2\,c_2)$ este un semigrup ternar medial. Submulţimile $\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}$; $k\in\mathbb{N}$ sunt ideale în $(A,\ (\,)_\circ)$ şi $\text{rad}(\mathbb{Z}\times k\mathbb{Z}) = \{(a,b);\, a,b\in\mathbb{Z}\,\text{şi}\ k\,|b^{2m+1}$ unde $m\in\mathbb{N}\}$ sunt, de asemenea, ideale în A. Prin urmare $(A,(\,)_\circ)$ este un $r-$semigrup ternar , dar el nu este un semigrup ternar $r-$semiprimar deoarece, de exemplu, $((1,2)(1,3)(1,1))_\circ = (6,6)\in\text{rad}(\mathbb{Z}\times 6\mathbb{Z})$ şi $(1,2),(1,3),(1,1)\notin\text{rad}(\mathbb{Z}\times 6\mathbb{Z})$.

Exemplul 1.2.4. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) Mulţimea $A = \{0,1,2,3\}$ înzestrată cu operaţia ternară $(\,)_\circ : A^3 \to A$ definită prin

$$(x_1\,x_2\,x_3)_\circ = \begin{cases} x_1x_2x_3 \quad \text{dacă}\ x_1x_2x_3 < 4 \\ r \equiv x_1x_2x_3(\text{mod}3);\ 1\le r\le 3\ \ \text{dacă}\ \ x_1x_2x_3 \ge 4 \end{cases}$$

este un semigrup ternar comutativ cu toate elementele idempotente şi cu 1 element neutru. Perechea $(A,(\,)_\circ)$ este un r-semigrup ternar semiprimar. Observăm că idealele lui $(A,(\,)_\circ)$, $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,3\}$ şi A formează un lanţ relativ la relaţia de incluziune.

Observaţie 1.2.2. Orice radical al unui $r-$ideal este ideal semiprim.

Într-adevăr , dacă I este un $r-$ideal al $n-$semigrupului $(A,(\,)_\circ)$ şi $x^{[1]}\in\text{rad}I$, atunci exisă $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $(x^{[1]})^{[k]}\in I$. Ţinând seama de (1.5), vom obţine $x^{[nk+1]}\in I$ şi prin urmare $x\in\text{rad}I$.

Observaţie 1.2.3. Clasa tuturor $n-$semigrupurilor $r-$semiprimare este o subclasă a tuturor $n-$semigrupurilor semiprimare.

Adina Pop şi Maria S. Pop în lucrarea [92] au enunţat şi demonstrat câteva teoreme de caracterizare a noţiunilor introduse mai sus.

Teoremă 1.2.1. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *O submulţime $S\subseteq A$ a unui $n-$semigrup $(A,(\,)_\circ)$ este o $r-$mulţime dacă şi numai dacă pentru orice $m\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că $b^{[m]}\in S$ şi orice $a_1,\ldots,a_{n-1}\in A$, există $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}$ asfel încât $(b\,a_1^{n-1})_\circ^{[k_1]}\in S$, $(a_1\,b\,a_2^{n-1})_\circ^{[k_2]}\in S,\ldots,(a_1^{n-1}\,b)_\circ^{[k_n]}\in S$.*

Demonstraţie. Fie submulţimea $S\subseteq A$ o $r-$mulţime şi $b\in A$ astfel încât $b^{[m]}\in S$. Deoarece $b\in\text{rad}S$ şi $\text{rad}S$ este un ideal al lui A, atunci pentru orice elemente $a_1,\ldots,a_{n-1}\in A$ şi orice $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ vom avea $(a_1^{i-1}\,b\,a_i^{n-1})_\circ\in\text{rad}S$. Prin urmare

există un număr natural $k_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ^{[k_i]} \in S$.
Reciproc, fie un element $x \in \text{rad}S$. Rezultă că există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^{[m]} \in S$. Conform ipotezei, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ şi orice $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ există $k_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ^{[k_i]} \in S$, ceea ce ne conduce la $(a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ \in \text{rad}S$. În concluzie rad$S$ este ideal in A. □

Corolar 1.2.1. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Un ideal I al unui $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ este un $r-$ideal dacă şi numai dacă pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $b \in A$ cu proprietatea că $b^{[m]} \in I$ şi orice $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(b\, a_1^{n-1})_\circ^{[k]} \in I$.*

Demonstraţie. Implicaţia directă este imediată.
Reciproc, fie un element $b \in$rad$I$, ceea ce este echivalent cu faptul că există un $m \in \mathbb{N}$,cu proprietatea $b^{[m]} \in I$. Din ipoteză, pentru orice $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$ există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(b\, a_1^{n-1})_\circ^{[k]} \in I$. Prin urmare $(b\, a_1^{n-1})_\circ \in$rad$I$.
De asemenea, pentru orice $i \in \{2, \dots, n\}$, există $k_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(b\, a_i^{n-1}\, a_1^{i-1})_\circ^{[k_i]} \in I$. Rezultă că

$$(a_1^{i-1}, ((b\, a_i^{n-1}\, a_1^{i-1})_\circ^{[k_i]}, \overset{(n-2)}{(b\, a_i^{n-1}\, a_1^{i-1})_\circ}, b)_\circ, a_i^{n-1})_\circ \in I.$$

Conform asociativităţii operaţiei $n-$are vom avea

$$((a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})^{[k_i]}, \overset{(n-2)}{(a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ}, (a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ)_\circ = (a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ^{[k_i+1]} \in I.$$

Din relaţia de mai sus rezultă că $(a_1^{i-1}\, b\, a_i^{n-1})_\circ \in$rad$I$, ceea ce este echivalent cu faptul că rad$I$ este un ideal în A şi deci I este un $r-$ideal. □

Urmă torul corolar reprezintă o generalizare din cazul binar a unui rezultat a lui Bogdanovic [17].

Corolar 1.2.2. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Orice $n-$semigrup strict reversibil este un $r - n-$semigrup.*

Demonstraţie. Fie I un ideal în $(A,\ (\,)_\circ)$ şi $s \in \mathbb{N}$, $a_1 \in A$ cu $a_1^{[s]} \in I$.
Deoarece $n-$semigrupul $(A,\ (\,)_\circ)$ este strict reversibil, pentru orice $a_2, ..., a_n \in A$ există $m, m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a_1^n)_\circ^{[m]} = (a_{\sigma(1)}^{[m_{\sigma(1)}]}, ..., a_{\sigma(n)}^{[m_{\sigma(n)}]})_\circ$ pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$.
Vom avea

$$\begin{aligned}((a_1^n)_\circ^{[m]})^{[s]} &= (a_1^{[m_1]}, ..., a_n^{[m_n]})_\circ^{[s]} = ((a_1^{[m_1]})^{[s]}, ..., (a_n^{[m_n]})^{[s]})_\circ \\ &= ((a_1^{[s]})^{[m_1]}, ..., (a_n^{[s]})^{[m_n]})_\circ \in I.\end{aligned}$$

Conform Corolarului 1.2.1 rezultă că I este un $r-$ideal. □

Corolar 1.2.3. *Orice $n-$semigrup normal (în particular, entropic, semicomutativ, comutativ) este un $r-n-$semigrup.*

Demonstraţie. Dacă I este un ideal în $(A,(\,)_\circ)$, $b \in A$ şi $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $b^{[m]} \in I$, atunci pentru orice $a_1,...,a_{n-1} \in A$, vom avea

$$(b\, a_1^{n-1})_\circ^{[m]} = (b^{[m]}, a_1^{[m]}, \ldots, a_{n-1}^{[m]})_\circ \in I.$$

Conform Corolarului 1.2.1, rezultă că I este un $r-$ideal. □

Teoremă 1.2.2. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Un n-semigrup este r-semiprimar dacă şi numai dacă el este un $r-n-$semigrup semiprimar.*

Demonstraţie. Dacă A este $n-$semigrup $r-$semiprimar, adică radicalul oricărui ideal I al lui A este complet prim, atunci $(a_1^n)_\circ \in I$ implică că $(a_1^n)_\circ \in \mathrm{rad}I$, şi deci există $i \in \{1,...,n\}$ astfel încât $a_i \in$rad$I$. Conform Definiţiei 1.2.2 există $m_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a_i^{[m_i]} \in I$. În concluzie I este un ideal semiprimar.
Reciproc, dacă $(A,(\,)_\circ)$ este un $r-n-$semigrup semiprimar, atunci pentru orice ideal I al lui A, rad$I$ este un ideal semiprimar şi $(a_1^n)_\circ \in \mathrm{rad}I$ implică $a_i^{[m_i]} \in \mathrm{rad}I$; $i \in \{1,2,..,n\}$ şi $m_i \in \mathbb{N}$. Rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(a_i^{[m_i]})^{[k]} \in I$ şi tinând seama de (1.5) obţinem $a_i^{[m_ik(n-1)+m_i+k]} \in I$. Prin urmare $a_i \in$rad$I$ adică rad$I$ este un ideal complet prim. □

Conform Teoremei 1.2.2 ,Corolarului 1.2.1, respectiv Corolarului 1.2.3, vom obţine

Corolar 1.2.4. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Un $n-$semigrup strict reversibil este r- semiprimar dacă şi numai dacă el este $n-$semigrup semiprimar.*

Corolar 1.2.5. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Un $n-$semigrup normal (în particular, entropic, semicomutativ, comutativ) este $r-$semiprimar dacă şi numai dacă el este $n-$semigrup semiprimar.*

Lema 1.2.1. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Dacă I este un ideal al unui $n-$semigrup A, atunci I este ideal semiprim dacă şi numai dacă $I =$radI.*

Demonstraţie. Dacă I este un ideal semiprim, iar $x \in$rad$I$, atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $x^{[m]} \in I$. Rezultă că $x \in I$, ceea ce ne conduce la faptul că rad$I \subseteq I$. Deoarece incluziunea inversă are loc întotdeauna, obţinem $I =$rad$I$.

Reciproc, fie $I =$rad$I$. Dacă $x^{[1]} \in I$ vom avea $x \in$rad$I = I$ şi deci I este ideal semiprim. □

Teoremă 1.2.3. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [92]) *Fie $(A,(\,)_\circ)$ un n-semigroup. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) A este semiprimar;

(ii) orice ideal principal al lui A este semiprimar;

(iii) idealele complet prime din A sunt total ordonate.

Demonstraţie. (i)$\Rightarrow$ (ii) Evidentă;

(ii)$\Rightarrow$(i) Fie I un ideal al lui A şi $(a_1^n)_\circ \in I$.

Dacă $\langle (a_1^n)_\circ \rangle$ este un ideal principal al lui A generat de $(a_1^n)_\circ$, deoarece $\langle (a_1^n)_\circ \rangle$ este ideal semiprimar şi $(a_1^n)_\circ \in \langle (a_1^n)_\circ \rangle$, atunci există cel puţin un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $k_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_i^{[k_i]} \in \langle (a_1^n)_\circ \rangle$. Dar $\langle (a_1^n)_\circ \rangle \subseteq I$ şi prin urmare $a_i^{[k_i]} \in I$. Rezultă că I este ideal semiprimar.

(i)$\Rightarrow$(iii) Fie I_1, I_2 ideale complet prime ale $n-$semigrupului semiprimar A. Presupunem că $I_1 \nsubseteq I_2$ şi $I_2 \nsubseteq I_1$. Atunci există $a \in I_1 \setminus I_2$ şi $b \in I_2 \setminus I_1$, astfel încât $(a \overset{(n-1)}{b})_\circ \in I_1 \cap I_2$, dar $a \notin I_1 \cap I_2$ and $b \notin I_1 \cap I_2$. Dar $I_1 \cap I_2$ este ideal semiprim în A. Într-adevăr, dacă $x^{[1]} \in I_1 \cap I_2$, atunci $x^{[1]} \in I_1$ şi $x^{[1]} \in I_2$. Deoarece orice ideal complet prim este şi semiprim, rezultă că $x \in I_1$ and $x \in I_2$, adică $x \in I_1 \cap I_2$.
Deoarece $I_1 \cap I_2$ este ideal semiprim, conform Lemei 1.2.1 vom avea $I_1 \cap I_2 =$rad$(I_1 \cap I_2)$.
Deoarece $I_1 \cap I_2$ este ideal semiprimar, din $(a \overset{(n-1)}{b})_\circ \in I_1 \cap I_2$ rezultă că există $m_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $a^{[m_1]} \in I_1 \cap I_2$ sau există $m_2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b^{[m_2]} \in I_1 \cap I_2$.
În concluzie, $a \in$ rad$(I_1 \cap I_2) = I_1 \cap I_2$ sau $b \in$rad $(I_1 \cap I_2)= I_1 \cap I_2$ ceea ce este imposibil.

(iii)$\Rightarrow$ (i) Fie o familie de ideale complet prime a $n-$ semigrupului A, total ordonate de relaţia de incluziune şi I un ideal din A. Atunci din Teorema 4.12 [123] rezultă că mulţimea rad$I$ este intersecţia unei colecţii de ideale complet prime, ceea ce este echivalent cu rad$I = \bigcap\limits_{i \in T} I_i$.
Conform Corolarului 4.1 [123], rad$I$ este ideal complet prim dacă şi numai dacă $A \setminus$rad$I$ este un sub$-n-$semigrup al lui A. Într-adevăr, oricare ar fi $a_k \in A\setminus$rad$I$ există $i_k \in T$ astfel încât $a_k \notin I_{i_k}$; $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Deoarece mulţimea idealelor complet prime este total ordonată, există $i_j \in \{i_1, ..., i_n\}$ cu proprietatea că $I_{i_j} \subseteq I_{i_k}$; $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Prin urmare $a_k \notin I_{i_j}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Deoarece I_{i_j} este un ideal complet prim, conform Corolarului 4.1. [123], rezultă că $(a_1^n)_\circ \notin I_{i_j}$. Prin urmare obţinem că
$(a_1^n)_\circ \notin \bigcap\limits_{i \in T} I_i =radI$, adică rad$I$ este un ideal complet prime.
În concluzie, I este un ideal semiprimar şi deci A este un $n-$semigrup semiprimar . □

Capitolul 2

$(n, m)-$Semiinele

Dacă studiile consacrate $n-$semigrupurilor, $n-$quasigrupurilor şi $n-$grupurilor au fost numeroase (îndeosebi după 1960) nu acelaşi lucru se poate spune despre teoria $(n, m)-$semiinelelor respectiv $(n, m)-$inelelor, ceea ce se datorează complexităţii problemelor în studiu cât şi absenţei, în general a elementului neutru aditiv respectiv a celui multiplicativ sau existenţei mai multor astfel de elemente, precum şi absenţei elementului zero, în general. Mai mult, spre deosebire de semiinelele obişnuite al cărui studiu a progresat deodată cu cel al inelelor, $(n, m)-$semiinelele au fost investigate mult mai târziu decât $(n, m)-$inelele. Termenul de $(n, m)-$semiinel a fost introdus de noi în anul 2000, în [87], ca o structură algebrică înzestrată cu două operaţii, una $n-$ară asociativă şi comutativă şi alta $m-$ară asociativă, cea $m-$ară fiind distributivă faţă de cea $n-$ară. În această primă lucrare s-au dat câteva teoreme de scufundare în $(n, m)-$semiinele, în lucrările ulterior apărute studiindu-se alte aspecte ale teoriei $(n, m)-$semiinelelor [91], [88], [93], [96], [97], [94], [90], [89]. Menţionăm că semiinelele ternare, adică $(2, 3)-$semiinelele în sensul definit de noi, având în plus element neutru aditiv care este şi zero absorbant au fost investigate în detaliu de S. Kar [69], [71], [70] şi J. N. Chaudhari, K. J. Ingale [19] şi alţii.

Abia în anul 2013 au apărut lucrări relative la $(n, m)-$semiinele aparţinând lui Y.Zhu [138] care citează lucrările noastre [87], [95]. S. E. Alam [1], S. E. Alam S. B. Rao , B. Davvaz [2] au studiat unele proprietăţi ale $(n, m)-$semiinelelor cu aplicaţii în aşa numita toleranţă a defecţiunilor.

În acest capitol începem un studiul sistematic al $(n, m)-$semiinelelor, comparativ cu cel al semiinelelor uzuale. Pe lângă noţiuni şi proprietăţi importante şi unele exemple construite de noi (paragraful 2.1), în paragraful 2.2 descriem toate $(n, m)-$semiinelele definite prin funcţii polinomiale peste un semidomeniu infinit cu operaţia aditivă liberă de zero. Menţionăm că în cazul semidomeniului infinit al numerelor naturale $\mathbb{N}$, particularizând convenabil elementele care intervin în construcţie, regăsim Exemplul 2.1.8 sugerat de puterile aditive ($n-$are). Acest $(n, m)-$semiinel cu unitate şi fără element zero joacă în teoria $(n, m)-$semiinelelor un rol analog semiinelului numerelor naturale $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ din cazul binar. Acest fapt reiese şi din Teorema 2.3.1 care demonstrează că pentru orice $(n, m)-$semiinel cu unitate există un sub-$(n, m)-$semiinel generat de unitate (dacă toate puterile "aditive" sunt distince) izomorf cu $(n, m)-$semiinelul din Exemplul 2.1.8. Spre deosebire de cazul binar, dacă $(n, m)-$semiinelul are mai multe unităţi sub-$(n, m)-$semiinelele generate de acestea sunt izomorfe. Cazul în care nu toate puterile unităţii sunt distincte este de asemenea tratat (paragraful 2.3). Precizăm că rezultatele din paragraful 2.3 sunt originale în curs de publicare.

În paragraful 2.4 se studiază congruenţele în $(n, m)-$semiinele, pregătind tratarea congruenţei de tip Bourne [18] în raport cu un ideal dat. De asemenea se extinde noţiunea de ideal subtractiv ($k-$ideal)în cazul $(n, m)-$semiinelelor, proprietăc tile enunţate fiind ilustrate de multe exemple şi contraexemple. (paragraful 2.5).

În continuare (paragraful 2.6) definim idealele de partiţionare ale unui $(n, m)-$semiinel, generalizând unele proprietăţi din cazul binar. Precizăm că, spre deosebire de lucrările lui Kar [71] şi Chaudhari [19], în care operaţia aditivă este binară, cu element zero absorbant, noi am demonstrat teoreme analoage în condiţii mai puţin restrictive şi anume pentru $(n, m)-$semiinele, cu reducere şi care au cel puţin un idempotent aditiv.

Ultimul paragraf (2.7) descrie principalele modalităţi de reducere ale $(n, m)-$semiinelelor şi extindere ale $(n, 2)-$semiinelelor.

2.1 Definiţii. Exemple

Noţiunea de $(n, m)-$semiinel introdusă de noi în lucrarea "Remarks on embeddings theorems of $(m, n)-$ semirings", în anul 2000, generalizează noţiunea binecunoscută de semiinel.

Definiţie 2.1.1. (**Adina Pop** [87]) Fie S o mulţime nevidă. Structura algebrică $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ unde $(S, (\,)_+$ este o operaţie $n-$ară $(\,)_+ : S^n \to S$ numită operaţie aditivă, $(\,)_\circ$ este o operaţie $m-$ară $(\,)_\circ : S^m \to S$, $n, m \geq 2$ numită operaţie multiplicativă se numeşte $(n, m)-$*semiinel* dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

(1) $(S, (\,)_+)$ este un $n-$ semigrup comutativ;

(2) $(S, (\,)_\circ)$ este un $m-$ semigrup;

(3) operaţia $m-$ară multiplicativă $(\,)_\circ$ este distributivă faţă de operaţia $n-$ară

aditivă $(\,)_+$, adică

$$(y_1^{i-1},(x_1^n)_+,y_{i+1}^m)_\circ=((y_1^{i-1}\,x_1\,y_{i+1}^m)_\circ,\dots,(y_1^{i-1}\,x_n\,y_{i+1}^m)_\circ)_+$$

pentru orice $x_i,y_i\in S; i\in\{1,2,\dots,n\}$, $j\in\{1,2,\dots m\}$.

În particular, un semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ se numeşte semicomutativ, comutativ, respectiv entropic dacă $m-$semigrupul $(S,(\,)_\circ)$ este semicomutativ, comutativ, respectiv entropic.

Definiţie 2.1.2. [24] Un $(n,m)-$semiinel $(R,(\,)_+,(\,)_\circ)$ în care $(R,(\,)_+)$ este $n-$grup comutativ se numeşte $(n,m)-$*inel*.

Definiţie 2.1.3. Un $(n,m)-$semiinel $(S(\,)_+,(\,)_\circ)$ se numeşte $(n,m)-$*semiinel cu diviziune* dacă $(S\backslash 0,(\,)_\circ)$ (în cazul în care există element zero) este un $m-$grup. Dacă $(S\backslash 0,(\,)_\circ)$ este un $m-$grup comutativ, atunci $(S(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$corp.

Observaţie 2.1.1. 1) Orice $(n,m)-$inel este un $(n,m)-$semiinel.
2) Conceptul de $(n,m)-$semiinel poate fi mai general slăbind anumite condiţii şi anume $(S,(\,)_+)$ este un $n-$ semigrup sau $(S,(\,)_\circ)$ este un $m-$ grupoid. Dacă $(S,(\,)_\circ)$ este un $m-$ grupoid, vom numi $(n,m)-$semiinelul ca fiind $(n,m)-$semiinel asociativ.
Pe parcursul acestei lucrări (exceptând paragraful 4.2) pentru un $(n,m)-$semiinel vom folosi definiţia 2.1.1.

Fie $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel şi $x\in S$.
Definim pentru operaţia $n-$ară puterea k inductiv asfel:

$$x^{[0]}=x, x^{[1]}=(\overset{(n)}{x})_+, x^{[k]}=(x^{[k-1]}\overset{(n-1)}{x})_+. \tag{2.1}$$

Observăm că $x^{[k]}$ are $k(n-1)+1$ factori egali cu x.

Analog, pentru operaţia $m-$ară vom avea:

$$x^{<0>}=x,\; x^{<1>}=(\overset{(m)}{x})_\circ,\; x^{<k>}=(x^{<k-1>}\overset{(m-1)}{x})_\circ. \tag{2.2}$$

$x^{<k>}$ având $k(m-1)+1$ factori egali cu x.
Au loc următoarele relaţii:

$$(x^{[k_1]},...,x^{[k_n]})_+=x^{[k_1+\ldots+k_n+1]}, \tag{2.3}$$

pentru orice $k_1,...,k_n\in\mathbb{N}$, respectiv

$$(x^{[k]})^{[p]}=x^{[k*p]},\text{ unde}\,k*p=(n-1)kp+k+p\,\text{pentru orice }k,p\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

pentru orice $k, p \in \mathbb{N}$ şi $i \in \{1, ..., m\}$.
Folosind distributivitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$" vom avea următoarea relaţie:

$$(x_1^{i-1}\, x_i^{[k]}\, x_{i+1}^m)_\circ = (x_1^m)_\circ^{[k]}, \text{ oricare ar fi } x_1, ..., x_m \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Mai mult,

$$\big(...((x^{[k_1]})^{[k_2]})^{\cdots}\big)^{[k_t]} = x^{[(n-1)^{t-1}k_1...k_t + ... + (n-1)\sum\limits_{1\le i<j\le t} k_ik_j + \sum\limits_{i=1}^{t} k_i]} \tag{2.6}$$

pentru orice $k_i \in \mathbb{N},\ i \in \{1, 2, ..., t\}$.

Observăm că

$$(n-1)^{t-1}k_1...k_t + ... + (n-1)\sum_{1\le i<j\le t} k_ik_j + \sum_{i=1}^{t} k_i =$$

$$-\frac{1}{n-1} + (n-1)^{t-1}\prod_{i=1}^{t}(k_i + \frac{1}{n-1}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{t}[(n-1)k_i+1]-1}{n-1}$$

.

Definiţie 2.1.4. Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$un $(n, m)-$semiinel.
a)Dacă $n-$semigrupul $(S, (\,)_+)$ admite un element neutru , atunci el se numeşte *element neutru aditiv* a lui S;
a)Dacă $m-$semigrupul $(S, (\,)_\circ)$ admite un element neutru , atunci el se numeşte *element neutru multiplicativ* sau *unitate* a $(n, m)-$semiinelului S.
b)Un element $z \in S$ (dacă există) se numeşte *element zero* al $(n, m)-$ semiinelului dacă:

$$(x_1^{i-1}\, z\, x_{i+1}^m)_\circ = z,\ (\forall)x_i \in S,\ i \in \{1, 2, \dots m\} \text{ şi } \ (\forall)x_1, \dots, x_m \in S.$$

prin convenţie dacă $(n, m)-$semiinelul S are element zero, atunci acesta se va nota cu 0. Dacă zero există, atunci notăm $S\backslash\{0\} = S^*$.

Observaţie 2.1.2. a) În cazul în care $n = m = 2$ obţinem semiinelul în sensul definiţiei date de Hebisch şi Weinert [57], respectiv semiinelul obişnuit.
b) În cazul inelelor obişnuite, elementul neutru faţă de operaţia aditivă există întotdeauna, este unic şi este elementul zero al inelului.
În cazul $(n, m)-$semiinelelor ($(n, m)-$inelelor) pot să nu existe sau să fie mai multe elemente neutre faţă de operaţia aditivă şi nu neapărat acestea sunt şi elemente zero al $(n, m)-$semiinelului ($(n, m)-$inelului).

Definiţie 2.1.5. Un $(n,m)-$inel în care $(R\setminus 0, (\,)_\circ)$ (în cazul în care există element zero) este un $m-$grup comutativ se numeşte $(n,m)-$*corp*.

Definiţie 2.1.6. O submulţime $A \subseteq S$ a unui $(n,m)-$semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ se numeşte *sub-*(n,m)*-semiinel* dacă $(x_1^n)_+, (x_1^m)_\circ \in A$ pentru orice $x_1,\ldots,x_p \in A$, $p = \max(m,n)$.

Definiţie 2.1.7. Fie $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel. Un element $a \in S$ se numeşte:
a) idempotent aditiv dacă $(\overset{n}{a})_+ = a = a^{[1]}$;
b)idempotent multiplicativ dacă $(\overset{m}{a})_\circ = a = a^{<1>}$.

Vom nota mulţimea tuturor idempotenţilor aditivi ai unui $(n,m)-$semiinel S cu Ida(S), iar mulţimea idempotenţilor multiplicativi cu Idm(S).

Observaţie 2.1.3. La fel ca şi în cazul binar, un $(n,m)-$semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ are cel mult un element zero, 0, şi dacă există acesta este idempotent aditiv şi multiplicativ. Într-adevăr, dacă presupunem că 0 şi z sunt doua zerouri în S, atunci $z = (x_1^{i-1}\, z\, x_{i+1}^{m-1})_\circ$ pentru orice $x_i \in S$ şi orice $i \in \{1,...,m\}$. În particular, dacă luăm $x_1 = 0$, vom avea $z = (0\, x_2^{i-1}\, z\, x_{i+1}^{m-1})_\circ = 0$. Faptul că acest 0 este şi idempotent aditiv rezultă din unicitatea (dacă există) a elementului 0.

Exemplul 2.1.1. Fie mulţimea numerelor întregi pozitive $\mathbb{Z}^+$ înzestrată cu operaţiile $(a_1^n)_+ = c.m.m.m.c\{a_1,a_2,...,a_n\}$ şi $(a_1^m)_\circ = a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_m$. Structura algebrică $(\mathbb{Z}^+,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$semiinel comutativ în care 1 este element neutru aditiv , dar el nu este element zero deoarece $(1, a_2^m)_\circ = a_2\cdot ...\cdot a_m \neq 1$.

Exemplul 2.1.2. (**Adina Pop** [80].) Dacă considerăm mulţimea $S = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ înzestrată cu operaţiile :

$$+ : S^2 \to S,\ (a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

pentru orice $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in S$ şi

$$(\,)_\circ : S^3 \to S,\ ((a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3))_\circ = (a_1b_2a_3,\ b_1a_2b_3),$$

pentru orice $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3) \in S$, atunci $(S,+,(\,)_\circ)$ este un $(2,3)-$inel semicomutativ cu 0 care este şi elemet neutru faţă de adunare.
Elementele $(1,1)$ şi $(-1,-1)$ sunt unităţi la dreapta şi la stânga dar nu $2-$unităţi.
Fixând elementul $(a,b) \in S$ şi definind operaţia binară " $\cdot$ " pe S asfel $(x,y)\cdot(x',y') = (xbx', yay')$ pentru orice $(x,y),(x',y') \in S$, tripletul $(S,+,\cdot)$ este inelul obişnuit. Dacă $(a,b) = (1,1)$ sau $(a,b) = (-1,-1)$, atunci acest inel este cu unitate (a,b). În caz contrar inelul nu are unitate.

Exemplul 2.1.3. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) Mulţimea $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ cu operaţiile $(\ )_+ : A^n \to A$; $(\ )_\circ : A^m \to A$

$$(a_1^n)_+ = \begin{cases} a_1 + \cdots + a_n & \text{dacă } a_1 + \cdots + a_n < k \\ r \equiv a_1 + \cdots + a_n (\operatorname{mod} k - i); i \le r < k & \text{dacă } a_1 + \cdots + a_n \ge k \end{cases}$$

$$(a_1^m)_\circ = \begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_m & \text{dacă } a_1 a_2 \ldots a_m < k \\ r \equiv a_1 a_2 \ldots a_m (\operatorname{mod} k - i); i \le r < k & \text{dacă } a_1 a_2 \ldots a_m \ge k \end{cases}$$

este un (n, m)-semiinel comutativ cu o identitate 0 care este şi element zero şi o unitate 1. Acest exemplu generalizează semiinelul $B(k, i)$ definit în cazul binar de F. E. Alarcón şi D. D. Anderson [3].

Exemplul 2.1.4. (**Adina Melniciuc (Pop)** [80]) Pe mulţimea punctelor unei parabole $\mathcal{P}$ cu vârful V, (Δ) axa de simetrie a parabolei şi E un punct fixat pe parabolă, diferit de vârf, definim o operaţie binară $\oplus : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}$, $M_1 \oplus M_2 = M$, unde pentru orice $M_1, M_2 \in \mathcal{P} \setminus V$, distincte, M este punctul în care paralela dusă prin V la coarda M_1M_2 retaie parabola, iar $M_\oplus V = M$, oricare ar fi $M \in \mathcal{P}$ (Fig. 1).

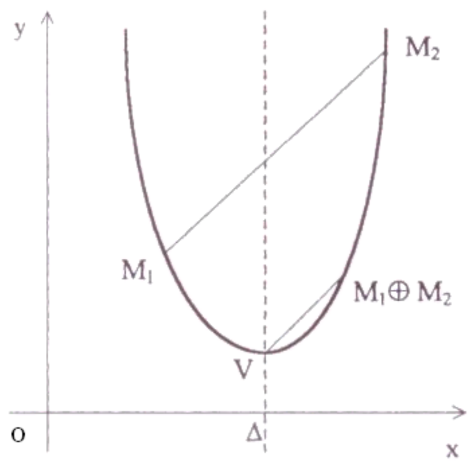

Fig. 1

În cazul în care $M_1 = M_2$, coarda devine tangentă în M_1.(Fig. 2).

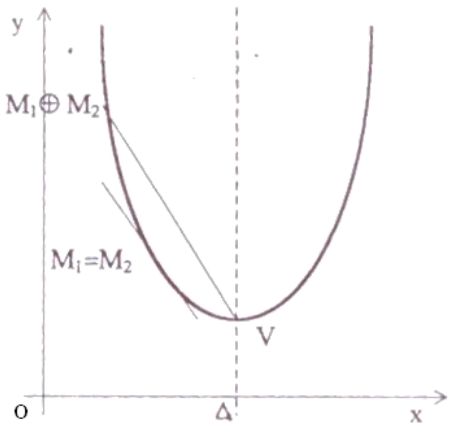

Fig. 2

De asemenea, definim o operaţie ternară $(\,)_\circ : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}$ astfel:
a) Dacă $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{P}\backslash\{V\}$ distincte, fie M_0' punctul în care coarda M_1M_2 intersectează axa de simetrie (Δ) a parabolei şi M_4 punctul în care EM_0' taie din nou parabola (dacă întâmplător EM_0' este tangentă în E la parabolă atunci $M_4 = E$).

Dreapta M_3M_4 intersectează pe (Δ) în punctul M_0''. Punctul definit de operaţia ternară $M = (M_1, M_2, M_3)_\circ$ este tocmai punctul în care dreapta EM_0'' taie din nou parabola (Fig.3)

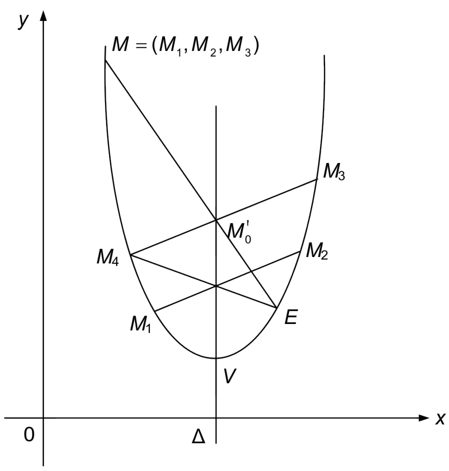

Fig. 3

b) Dacă punctele M_1, M_2, M_3 nu sunt toate distincte, de exemplu dacă $M_1 = M_2$ atunci, în descrierea de mai sus coarda M_1M_2 devine tangentă în M_1 la $\mathcal{P}$.

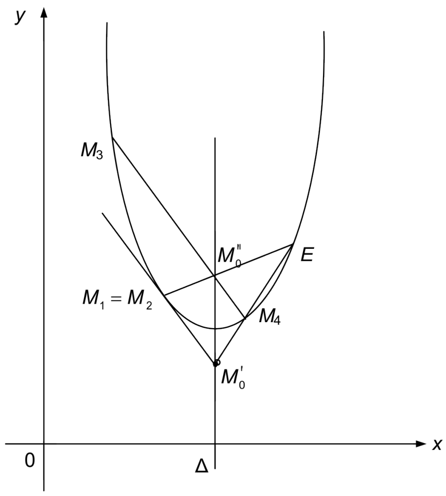

Fig. 4

Dacă M_1 sau M_2 coincide cu E, atunci $M_4 = M_2$ respectiv $M_4 = M_1$.

Dacă M_3 coincide cu M_4 atunci tangenta în M_3 la $\mathcal{P}$ intersectează (Δ) în M_0''.

În particular, dacă două puncte coincid cu E atunci produsul ternar coincide cu cel de-al treilea punct.

c) În cazul în care unul din punctele $M_i, i = 1, 2, 3$ este V atunci, prin definiţie $(M_1, M_2, M_3)_\circ = V$.

Se verifică că tripletul $(\mathcal{P}, \oplus, ()_\circ)$ este un $(2,3)-$inel (inel ternar) cu elementul zero varful parabolei şi unitatea E, unde distanţa de la E la axa de simetrie a parabolei este 1.

Exemplul 2.1.5. [24] Pe mulţimea $A = \{a, b\}$ definim operaţia ternară $+ : A^3 \to A$,

$$a + a + a = a$$
$$a + a + b = b$$
$$a + b + b = a$$
$$b + b + b = b$$

şi operaţia $\cdot : A^4 \to A$ astfel

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot b = b$$
$$a \cdot a \cdot b \cdot b = a$$
$$a \cdot b \cdot b \cdot b = b$$
$$b \cdot b \cdot b \cdot b = b$$

Tripletul $(A, +, \cdot)$ este un $(3,4)-$inel comutativ care are două elemente neutre aditive şi anume a şi b , un singur element neutru multiplicativ şi anume a, a este şi idempotent multiplicativ dar nu este element zero.

Dacăconsiderăm operaţia ternară definită pe aceeaşi mulţime A astfel $\oplus : A^3 \to A$,

$$\begin{aligned} a \oplus a \oplus a &= b \\ a \oplus a \oplus b &= a \\ a \oplus b \oplus b &= b \\ b \oplus b \oplus b &= a \end{aligned}$$

şi operaţia multiplicativă definită mai sus, atunci obţinem un $(3,4)-$inel comutativ, fără element neutru aditiv, fără idempoteţi aditivi, cu element neutru multiplicativ a.

Exemplul 2.1.6. (**Adina Pop**) Fie R un inel oarecare. În mulţimea M a perechilor ordonate de $(2,3)$ respectiv $(3,2)-$matrici cu elemente dintr-un un inel R, $M = M_{2,3}(R) \times M_{3,2}(R)$

$$M = \{(A, A') = \{\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \\ a'_{31} & a'_{32} \end{pmatrix}\right), a_{ij}, a'_{ij} \in R\,,\, i,j = \overline{1,3}\}$$

definim o operaţie binară $+ : M^2 \to M$ astfel

$$(A, A') + (B, B') = ((A + A'), A' + B') \in M$$

şi o operaţie ternară $(\,)_\circ : M^3 \to M$ astfel

$$((A, A'), (B, B'), (C, C'))_\circ = (AB'C, A'BC') \in M$$

oricare ar fi $A, B, C \in M_{2,3}(R)$ şi oricare ar fi $A', B', C' \in M_{3,2}(R)$.

Tripletul $(M, +, (\,)_\circ)$ este un $(2,3)-$inel (inel ternar) cu element neutru aditiv şi anume

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

care este şi element zero al inelului ternar M.
Submulţimea

$$A = \{\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), a,\, a' \in R\}$$

este un sub-$(2,3)$-inel al inelului ternar M.

Următorul rezultat reprezintă o generalizare a Propoziţiei 1.1.14 a lui S. Kar [71] din cazul semiinelelor ternare.

Propoziţie 2.1.1. *Dacă* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *este un* $(n,m)-$*semiinel care are un element neutru multiplicativ* e*, atunci*

$$(x_1^{m-1}\, e)_\circ = (x_1^{i-1}\, e\, x_i^{m-1})_\circ \textit{ pentru orice } i \in \{1, ..., m-1\}$$

Demonstraţie. Deoarece e este element neutru multiplicativ în $(n,m)-$semiinelul S are loc relaţia $(\overset{(i-1)}{e}\, x_i\, \overset{(m-i)}{e})_\circ = e$ pentru orice $i \in \{1, ..., m\}$ şi $x_j \in S$, unde $j \in \{1, ..., m-1\}$. Folosind asociativitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" obţinem

$$\begin{aligned}
(x_1^{m-1}\, e)_\circ &= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{m-1}\, e)_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{i-1}, (\overset{(m-1)}{e}\, x_i)_\circ, x_{i+1}^{m-1}\, e)_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{i-1}, e, (\overset{(m-2)}{e}\, x_i\, x_{i+1})_\circ, x_{i+2}^{m-1}, e^{<1>})_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{i-1}, e, (\overset{(m-2)}{e}, (x_i^{m-1}\, \overset{(i)}{e})_\circ, e)_\circ, \overset{(m-i-1)}{e})_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{i-1}, e, (x_i^{m-1}\, \overset{(i)}{e})_\circ, \overset{(m-i-1)}{e})_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, ((x_1^{i-1}\, e\, x_i^{m-1})_\circ, \overset{(m-1)}{e})_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ \\
&= (\overset{(i-1)}{e}, (x_1^{i-1}\, e\, x_i^{m-1})_\circ, \overset{(m-i)}{e})_\circ = (x_1^{i-1}\, e\, x_i^{m-1})_\circ
\end{aligned}$$

$\square$

Centrul unui $(n,m)-$semiinel se poate defini în două moduri ,pentru $m = 2$ ambele conducând la definiţia dată centrului unui semiinel.

Definiţie 2.1.8. Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel. Mulţimea

$$Z(S) = \{x \in S \mid (x\, a_1^{m-1})_\circ = (a_1\, a_2\, x\, a_3^{m-1})_\circ = ... = (a_1^{m-1}\, x)_\circ, (\forall)\, a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in S\}$$

se numeşte *centrul* $(n,m)-$*semiinelului* S.

Observaţie 2.1.4. Dacă $(n,m)-$semiinelul S are un element zero sau element neutru multiplicativ, atunci conform Propoziţiei 2.1.1 acest element aparţine lui $Z(S)$ şi prin urmare $Z(S) \neq \emptyset$.

Propoziţie 2.1.2. *Dacă* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *este un* $(n,m)-$*semiinel, atunci centrul său,* $Z(S)$ *este sau mulţimea vidă sau un sub-*(n,m)*-semiinel al* $(n,m)-$*semiinelului* S.

Demonstraţie. Presupunem că $Z(S) \neq \emptyset$.
Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in Z(S)$. Atunci pentru orice $a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in S$, şi orice $i \in \{2, 3, .., m\}$, folosind proprietatea de distributivitate a operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$", vom avea

$$\begin{aligned}
((x_1^n)_+, a_1^{m-1}))_\circ &= ((x_1\, a_1^{m-1})_\circ, ..., (x_n\, a_1^{m-1})_\circ)_+ \\
&= ((a_1^{i-1}\, x_1\, a_i^{m-1})_\circ, ..., (a_1^{i-1}\, x_n\, a_i^{m-1})_\circ)_+ = (a_1^{i-1}, (x_1^n)_+, a_i^{m-1})_\circ
\end{aligned}$$

oricare ar fi $i \in \{2, 3, .., m\}$. Rezultă că $(x_1^n)_+ \in Z(S)$.
Dacă $x_1, x_2, ..., x_m \in Z(S)$, atunci folosind proprietatea de asociativitate a operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$", vom obţine

$$\begin{aligned} ((x_1^m)_\circ, a_1^{m-1}))_\circ &= (x_1^{m-1}, (x_m, a_1^{m-1})_\circ)_\circ = (x_1^{m-1}, (a_1^{i-1}\, x_m\, a_i^{m-1})_\circ)_\circ \\ &= (x_1^{m-2}, (x_{m-1}\, a_1^{i-1}\, x_m\, a_i^{m-2})_\circ, a_{m-1})_\circ \\ &= (x_1^{m-2}, (a_1^{i-1}\, x_{m-1}\, x_m\, a_i^{m-2})_\circ, a_{m-1})_\circ \\ &= (x_1^{m-3}, (x_{m-2}\, a_1^{i-1}\, x_{m-1}\, x_m\, a_i^{m-3})_\circ, a_{m-2}, a_{m-1})_\circ \\ &= ... = (a_1^{i-1}, (x_1^{m-1})_\circ, a_i^{m-1}))_\circ. \end{aligned}$$

Aşadar $(x_1^m)_\circ \in Z(S)$ şi în concluzie $Z(S)$ este un sub-(n, m)-semiinel al $(n, m)-$semiinelului S. □

Observaţie 2.1.5. Dacă un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este comutativ atunci $S = Z(S)$.

O altă generalizare a centrului unui $(n, m)-$semiinel este următoarea:

Definiţie 2.1.9. Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel. Mulţimea

$$Z(S) = \{x \in S | (x\, a_1^{m-1})_\circ = (a_1^{m-1}\, x)_\circ,\ \forall\, a_1, a_2, ..., a_{m-1} \in S\}$$

se numeşte *centrul* $(n, m)-$*semiinelului* S.

Observaţie 2.1.6. Dacă un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este semicomutativ atunci a $S = Z(S)$.

Observaţie 2.1.7. În cazul în care $n = m = 2$, regăsim definiţia centrului unui semiinel (vezi Golan [53]) atât în cazul primei generalizări cât şi în cazul celei de a doua generalizare.

Definiţie 2.1.10. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [97]) Un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte :
a) *cu reducere relativ la* $A \subseteq R$ dacă $n-$semigrupul $(S, (\,)_+)$ are proprietatea de simplificare.
b) *cu simplificare relativ la* $A \subseteq R$ dacă $m-$semigrupul $(S, (\,)_\circ)$ are această proprietate.

Următorul rezultat reprezintă o generalizare a Lemei 3.1 a lui Dixit şi Dewan [32] din cazul semigrupurilor ternare.

Propoziţie 2.1.3. *Fie* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *un* $(n, m)-$*semiinel care are un element idempotent aditiv* a, *cu proprietatea că* $(a\ \overset{(n-1)}{b}\ )_+ = b$, *pentru orice* $b \in S$. *Atunci* a *este un element neutru aditiv în* $(n, m)-$*semiinelul* S.

Demonstraţie. Dacă considerăm un element $b \in S$, atunci

$$(\overset{(n-1)}{a}\, b)_+ = (\overset{(n-1)}{a}, (a\, \overset{(n-1)}{b})_+)_+ = (a^{[1]}\, \overset{(n-1)}{b})_+ = (a\, \overset{(n-1)}{b})_+ = b$$

Deoarece b a fost ales arbitrar şi operaţia $n-$ară este comutativă, rezultă că a este un element neutru aditiv.

$\square$

Reciproca nu este, în general adevărată, adică dacă e este un element neutru aditiv acest lucru nu implică $(\overset{n-1}{a}\, e)_+ = a$. Dacă considerăm Exemplul 2.1.5, elementul a este element neutru aditiv, dar $a + b + b = a \neq b$.

Definiţie 2.1.11. Un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte:
a) idempotent aditiv dacă $(S, (\,)_+)$ este un $n-$semigrup idempotent, adică Ida$(S) = S$
b) idempotent multiplicativ dacă $(S, (\,)_\circ)$ este un $m-$semigrup idempotent, adică Idm$(S) = S$.
c) idempotent dacă este idempotent aditiv şi multiplicativ, adică Ida$(S) = S =$Idm(S).

Generalizând Exerciţiul 2.7 din Capitolul 1 din U. Hebisch şi H.J.Weinert [57] obţinem:

Teoremă 2.1.1. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel cu element neutru multiplicativ e'. $(n, m)-$Semiinelul S este idempotent aditiv ($S =$Ida(S)) dacă şi numai dacă e' este idempotent aditiv.*

Demonstraţie. Implicaţia directă este evidentă.
Reciproc, presupunem că $e'^{[1]} = e$. Pentru orice $x \in S$ obţinem $(x\, \overset{(m-2)}{e'}\, e'^{[1]})_\circ = (x\, \overset{(m-2)}{e'}\, e')_\circ$. Folosind relaţia (2.5) vom avea $(x\, \overset{(m-1)}{e'})_\circ^{[1]} = x$ adică $x^{[1]} = x$, oricare ar fi $x \in S$, adică $S =$Ida(S). $\square$

Propoziţie 2.1.4. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel cu un element neutru aditiv e. Dacă e este singurul idempotent aditiv al $(n, m)-$semiinelului S, atunci e este şi element zero al $(n, m)-$semiinelului S .*

Demonstraţie. Deoarece $e^{[1]} = e$, conform relaţiei (2.5) avem că $(x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ^{[1]} = (x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ$, adică $(x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ$ este un idempotent aditiv. Din unicitatea lui e, rezultă că $(x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ = e$, iar din unicitatea lui 0 rezultă că $e = 0$. $\square$

Observaţie 2.1.8. Într-un $(n, m)-$inel, operaţia aditivă fiind comutativă, un idempotent aditiv este un element neutru pentru această operaţie.

Definiţie 2.1.12. Un $(n,m)-$semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ cu element zero, 0, se numeşte *cu operaţia $n-$ară liberă de zero* sau $(n,m-)$*semiinel strict* dacă $(a_1^n)_+ = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$. Evident $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este cu operaţia $n-$ară liberă de zero dacă şi numai dacă $(S^*,(\,)_+)$ este un subsemigrup al lui $(S,(\,)_+)$.

Exemplul 2.1.7. Mulţimea numerelor naturale nenule $\mathbb{N}^*$ înzestrată cu operaţia n-ară

$$(\,)_+ : {\mathbb{N}^*}^n \to \mathbb{N}^*;\ (k_1^n)_+ = \sum_{i=1}^{n} k_i + 2 - n$$

şi operaţia binară

$$* : {\mathbb{N}^*}^2 \to \mathbb{N}^*;\ k_1 * k_2 = (k_1-1)(k_2-1)(n-2) + k_1k_2$$

este un $(n,2)$-semiinel comutativ cu element unitate 1. Pentru $n \geq 2$ el este fără element neutru în raport cu operaţia n-ară şi fără element zero. Acest $(n,2)-$semiinel este ciclic infinit generat de 1, deoarece pentru orice $t \in \mathbb{N}$ avem $1^{[t]} = t+1$.

Pentru $n = 2$, acest (n,m)-semiinel se reduce la semiinelul uzual al numerelor naturale.

Submulţimea $n\mathbb{N}+2 = \{nk+2;\ k \in \mathbb{N}\}$ este un sub-$(n,2)$-semiinel generat de elementul 2, adică

$$n\mathbb{N}+2 = \{2^{[0]}, 2^{[1]}, 2^{[2]}, \ldots, 2^{[k]}, \ldots\}$$

Exemplul 2.1.8. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [97]) Tripletul $(\mathbb{N},(\,)_+,(\,)_\circ)$, unde $\mathbb{N}$ este mulţimea numerelor naturale, operaţia $n-$ară este definită astfel

$$(\,)_+ : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},\ (k_1^n)_+ = \sum_{i=1}^{n} k_i + 1,$$

iar operaţia $m-$ară este definită

$$(\,)_\circ : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N},\ (k_1^m)_\circ = \frac{\prod_{i=1}^{m}[(n-1)k_i+1]-1}{n-1}$$

este un $(n,m)-$ semiinel comutativ, cu unitate $0 \in \mathbb{N}$ şi fără element zero. Acest semiinel este cu reducere şi cu simplificare relativ la $\mathbb{N}^*$. Vom numi acest semiinel *semiinelul infinit caracteristic al numerelor naturale.* Menţionăm că operaţia $m-$ară se poate scrie simplificat $(k_1^m)_\circ = k_1 * k_2 * ...k_m$, această operaţie fiind derivată din operaţia binară $k_1 * k_2 = (n-1)k_1k_2 + k_1 + k_2$.

Exemplul 2.1.9. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [97]) Tripletul $(\mathbb{Z},(\,)_+,(\,)_\circ)$, unde $\mathbb{Z}$ este mulţimea întregilor iar operaţiile sunt definite în Exemplul 2.1.8 este un $(n,m)-$semiinel comutativ şi cu simplificare relativ la $\mathbb{Z}^*$, având unitatea 0.

Exemplul 2.1.10. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [97]) Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ împreună cu operaţiile "$(\,)_+$" şi "$(\,)_\circ$" definite la Exemplul 2.1.8 este un $(n,m)-$corp cu unitate 0 şi element zero $z = -\dfrac{1}{n-1}$ care este elementul neutru faţă de "$(\,)_+$".

Exemplul 2.1.11. Pe submulţimea numerelor naturale $A = \{0, 1, \ldots, p, \ldots, q-1\}$ unde $p, q \in \mathbb{N}$; $p < q$ definim o operaţie n-ară $(\,)_+ : A^n \to A$

$$(k_1^n)_+ = \begin{cases} k_1 + \ldots + k_n + 1 = k & \text{dacă } k \leq q-1 \\ p + r_{k-p} & \text{dacă } k \geq q, \end{cases}$$

unde r_{k-p} este restul împărţirii lui $k = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i + 1$ prin $q-p$. Cu alte cuvinte $p + r_{k-p}$ este unicul număr natural cu proprietatea că $p \leq p + r_{k-p} \leq q-1$; $k - p \equiv r_{k-p}\ (mod\, q-p)$.

Se verifică că perechea $(A, (\,)_+)$ este un n-semigrup ciclic finit de ordin q, generat de 0 în sensul lui Sioson [122] deoarece $0^{[k]} = k$; $k \in A$ şi $0^{[x]} = 0^{[y]}$ pentru $x, y \geq p$ dacă şi numai dacă $x \equiv y\ (mod\, q-p)$.

În acest n-semigrup, submulţimea $G = \{p, p+1, \ldots, q-1\}$ este un n-grup de ordin $q-p$, $q-p$ fiind perioada n-semigrupului A (perioada elementului 0), iar p indicele lui 0. Spre deosebire de semigrupurile obişnuite , un n-semigrup ciclic nu posedă neapărat un idempotent "aditiv". Dacă pe A definim o operaţie m-ară

$$(k_1^m)_\circ = \begin{cases} k_1 * k_2 * \ldots * k_m = k & \text{dacă } k \leq q-1 \\ p + r_{k-p} & \text{dacă } k \geq q, \end{cases}$$

unde r_{k-p} este restul împărţirii lui $k = k_1 * k_2 * \ldots * k_m$ prin $q-p$, atunci $(A, (\,)_+, (\,))_\circ$ este un (n,m)-semiinel comutativ cu unitatea 0, notat $B(q,p)$ care generalizează seminelul caracteristic din cazul binar descris de Alarcon [3].

Observaţie 2.1.9. Se verifică uşor că, pentru $p = 0$, (n,m)-semiinelul $B(q,0) = \{0, 1, \ldots, q-1\}$ este un (n,m)-inel şi anume cel construit pe n-grupul ciclic generat de 0 care este de fapt izomorf cu $\mathbb{Z}_{/q\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_q$.

2.2 $(n,m)-$Semiinele definite prin funcţii polinomiale pe un semidomeniu infinit

În [79] Marichal şi Mathonet descriu toate $n-$semigrupurile definite prin funcţii polinomiale peste un domeniu de integritate infinit, generalizând clasificarea dată de Glazek şi Gleichgewicht în [51] pentru semigrupuri ternare.
Folosind rezultatele mai sus menţionate, vom da o descriere a $(n,m)-$semiinelelor

((n,m)-inele, respectiv (n,m)-corpuri) definite prin funcţii polinomiale definite peste un semidomeniu infinit (domeniu de integritate).

Teoremă 2.2.1. [79] *Fie R un domeniu comutativ de integritate infinit şi $Frac(R)$ corpul de fracţii al lui R. O funcţie polinomială $p : R^n \to R$ este asociativă dacă şi dacă este definită prin una din următoarele funcţii:*

(i) $p(x_1^n) = c$ *unde* $c \in R$;

(ii) $p(x_1^n) = x_1$;

(iii) $p(x_1^n) = x_n$;

(iv) $p(x_1^n) = c + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, *unde* $c \in R$;

(v) $p(x_1^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega^{i-1} x_i$, ; $n \geq 3$, *iar* $\omega \in R \backslash 1$; *satisface condiţia* $\omega^{n-1} = 1$,

(vi) $p(x_1^n) = -b + a \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i + b)$, *unde* $a \in R \backslash \{0\}, b \in Frac(R)$ *satisfac condiţiile* $ab^n - b \in R$, *iar* $ab^k \in R$, *oricare ar fi* $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Prin urmare există şase tipuri de $n-$semigrupuri (R, p), dintre care cel definit cu ajutorul funcţiei polinomiale de tipul (v) este $n-$semigrup semicomutativ iar $n-$semigrupurile definite cu ajutorul funcţiilor polinomiale de tipul (i), (iv) sau (vi) sunt $n-$semigrupuri comutative.

Folosind Teorema 2.2.1 se demonstrează următorul rezultat:

Teoremă 2.2.2. [79]. *$n-$ Semigrupurile (R, p) definite cu ajutorul funcţiilor polinomiale $p : R^n \to R$, de grad ≤ 1 de tipul (iv), respectiv de tipul (v) sunt $n-$grupuri, unde transversala unui element $x \in R$ este $\overline{x} = (2-n)x - c$, respectiv $\overline{x} = x$.*

În general $n-$semigrupurile (R, p) unde p satisface condiţia (vi) nu sunt $n-$grupuri. În cazul în care R este corp se obţine următorul rezultat:

Teoremă 2.2.3. [79] *Dacă R este corp, atunci $n-$semigrupul $(R \backslash \{-b\},\ p_{a,b})$ unde funţia p este definită astfel*

$$p_{a,b}(x_1^n) = -b + a \prod_{i=1}^{n} (x_i + b);\ a \in R \backslash \{0\};\ b \in R$$

este un $n-$grup. Acest $n-$grup este izomorf cu grupul $(R \backslash \{0\}, p_{a,0})$.

Observăm că toate structurile de $n-$ semigrup definite cu ajutorul funcţiilor polinomiale descrise în Teorema 2.2.1 sunt entropice. Toate funcţiile polinomiale de grad cel mult 1 definite pe un inel comutativ au această proprietate. Reamintim, în continuare, definiţia semidomeniului dată de B.J.Dulin şi J.R. Mosher în [39].

Definiţie 2.2.1. [39] O mulţime nevidă R înzestrată cu două operaţii " $+$ " şi " $\cdot$ " se numeşte *semidomeniu* dacă:

1)Perechea $(R, +)$ este un monoid comutativ, cu reducere care are element zero, 0;

2)Perechea $(R, \cdot)$ este un monoid comutativ cu unitate $1 \neq 0$ care este cu simplificare relativ la R^*;

3) " $\cdot$ " este distributivă faţă de adunare.

Observaţie 2.2.1. Dacă R este un semidomeniu, atunci este fără divizori ai lui zero, adică R este un semidomeniu de integritate . Funcţiile polinomiale de tipul $(i) - (iv)$ din Teorema 2.2.1 sunt asociative chiar dacă tripletul $(R, +, \cdot)$ este un semidomeniu infinit cu operaţia " $+$ " liberă de zero, (semidomeniu strict). Observăm că, în această situaţie structura algebrică $n-$ară, (R, p), definită cu ajutorul funcţiei polinomiale de tipul (iv) este doar un $n-$semigrup.

Este cunoscut faptul că un semidomeniu poate fi scufundat într-un domeniu comutativ de integritate $\overline{R}$, numit inelul diferenţelor (Golan [53]) care la rândul său poate fi scufundat în corpul său de fracţii Frac($\overline{R}$). În acest caz, $n-$semigrupul construit cu ajutorul funcţiei polinomiale de tipul (vi) este comutativ.
Avem următorul rezultat:

Propoziţie 2.2.1. *(* **Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Dacă* $(R, +, \cdot)$ *este un semidomeniu infinit cu aplicaţia aditivă liberă de zero şi* $p : R^n \to R$, *o funcţie polinomială, atunci* (R, p) *este un* $n-$*semigrup dacă şi numai dacă* p *coincide cu una din următoarele funcţii:*

(i) $p(x_1^n) = c$, *unde* $c \in R$;

(ii) $p(x_1^n) = x_1$;

(iii) $p(x_1^n) = x_n$;

(iv) $p(x_1^n) = c + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i, \ ; c \in R$;

(v) $p(x_1^n) = -b + a\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i + b)$, *unde* $a \in R\backslash\{0\}$ *şi* $b \in$*Frac*$(\overline{R})$ *satisfac condiţia* $ab^n - b \in R$ *şi* $ab^k \in R$, $(\forall)k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

În continuare, folosind rezultatele lui J.-L.Marichal şi P.Mathonet din lucrarea [79] precum şi Propoziţia 2.2.1 vom da o caracterizare a $(n,m)-$semiinelelor definite cu ajutorul funcţiilor polinomiale care au domeniul de definiţie un semidomeniu infinit R cu operaţia " $+$ " liberă de zero (pe scurt structuri de $(n,m)-$semiinele polinomial-derivate din R). Remarcăm că, toate $(n,m)-$semiinelele netriviale definite pe R sunt $(n,m)-$semiinele a căror operaţii sunt sugerate de operaţiile cu puteri descrise în cazul $n-$semigrupurilor.

În acest scop vom determina condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească o operaţie $m-$ară de tipul (i), (ii), (iii), (iv) sau (v) definite în Propoziţia 2.2.1 pentru a fi distributivă faţă de o operaţie $n-$ară tot de tipul celor descrise în Propoziţia 2.2.1 .

Să analizăm, pentru început funcţiile de grad mai mic sau egal cu 1.

Lema 2.2.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Fie* $(R,+,\cdot)$ *un semidomeniu infinit cu operaţia aditivă liberă de zero. Operaţia* $m-$*ară*

$$g : R^m \to R,\ g(y_1^m) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$$

este distributivă în raport cu operaţia $n-$*ară* $f : R^n \to R;\ f(x_1^n) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ *dacă şi numai dacă:*

$$f(x_1^n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \ \ cu \ \ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1, \tag{2.7}$$

sau

$$f(x_1^n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \ \ cu \ \ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \ \ şi\ g(y_1^m) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} y_j, \tag{2.8}$$

Dacă R *este un domeniu infinit de integritate , atunci*

$$f(x_1^n) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(x_k - b_0) \ \ şi \ \ g(y_1^m) = b_0. \tag{2.9}$$

Demonstraţie. Presupunem că operaţia $m-$ară g este distributivă faţă de operaţia $n-$ară f, oricare ar fi $i \in \{1,2,\ldots,m\}$. Atunci vom avea

$$b_0 + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} b_j y_j + b_i \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right) =$$

$$a_0 + a_1 \left(b_0 + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} b_j y_j + b_i x_1 \right) + \ldots + a_n \left(b_0 + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} b_j y_j + b_i x_n \right).$$

Rezultă că

$$b_0 + b_i a_0 + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} b_j y_j = a_0 + (a_1 + \ldots + a_n)\left(b_0 + \sum_{j=1, j\neq i}^{m} b_j y_j\right)$$

ceea ce ne conduce la

$$b_0 + b_i a_0 = a_0 + (a_1 + \ldots + a_n) b_0$$

şi

$$b_j = b_j (a_1 + \ldots + a_n)$$

pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{i\}$.

Deoarece R este un semidomeniu de integritate rezultă că $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ sau $b_j = 0$,oricare ar fi $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{i\}$.

Dacă $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, atunci vom avea $a_0 b_i = a_0$ ceea ce ne conduce la $a_0 = 0$ sau $b_i = 1$.

Dacă $a_0 = 0$, atunci $f(x_1^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ cu $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$, iar operaţia $m-$ară este

$$g(y_1^m) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j.$$

Dacă $a_0 \neq 0$, atunci rezultă că $b_i = 1$,, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ceea ce ne conduce la

$$f(x_1^n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \text{ unde} \sum_{k=1}^{n} a_k = 1, a_0 \neq 0 \text{ şi } g(y_1^m) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Dacă $b_j = 0$,oricare ar fi $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \backslash \{i\}$, deoarece are loc distributivitatea operaţiei $m-$are g faţă de operaţia $n-$ară f, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, rezultă că şi $b_i = 0$.Prin urmare $b_j = 0$,oricare ar fi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Aşadar, dacă R este un domeniu comutativ infinit de integritate, atunci $g(y_1^m) = b_0$ şi $f(x_1^n) = b_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (x_k - b_0)$. □

Distributivitatea funcţiei polinomiale de tipul (vi) relativ la funcţia polinomială de grad 1 este arătată în lema următoare:

Lema 2.2.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Fie $(R, +)$ un semidomeniu infinit cu adunarea liberă de zero. Dacă elementele $a \in R^*$ şi $b \in$Frac$(\overline{R})$ satisfac relaţiile $ab^n - b \in R$ şi $ab^k \in R$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $a_i \in R$; $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ atunci operaţia $m-$ară*

$$g : R^m \to R,\ g(y_1^m) = -b + a \prod_{j=1}^{m} (y_j + b)$$

este distributivă faţă de operaţia n−ară

$$f(x_1^n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad a_0 = b\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right).$$

Demonstraţie. Presupunem că operaţia $m-$ară este distributivă faţă de operaţia $n-$ară oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
Atunci pentru orice $y_j, x_k \in R,\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}\backslash\{i\},\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vom obţine:

$$-b + a \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (y_j + b)(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + b) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k[-b + a \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (y_j + b)(x_k + b)]$$

Această relaţie este adevărată într-un semidomeniu infinit, pentru orice $y_j \in R, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ dacă şi numai dacă

$$b\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right) \in R \qquad \text{şi} \qquad a_0 = b\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - 1\right)$$

Folosind Lema 2.2.1, vom da o descriere pentru toate funcţiile polinomiale asociative $g : R^m \to R$ de grad mai mic sau egal cu 1 în fiecare variabilă şi care sunt distributive faţă de funcţiile polinomiale comutative şi asociative $f : R^n \to R$ de grad cel mult 1, în fiecare variabilă.

$$g(y_1^m) = b_0 \text{ şi } f(x_1^n) = b_0 \text{ sau } g(y_1^m) = b_0 \text{ şi } f(x_1^n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Dacă R este domeniu infinit de integritate , atunci:

$$g(y_1^m) = b_0 \text{ şi } f(x_1^n) = b_0(1-n) + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

□

Observăm că o funcţie polinomială de grad 1 nu este distributivă faţă de o funcţie polinomială de grad mai mare ca 1, dar, ţinând cont de proprietatea de mai sus, ea este distributivă faţă de orice funcţie polinomială g de grad 0, adică $g(y_1^m) = -b$ şi funcţia f definită astfel $f(x_1^n) = -b + a \prod_{i=1}^{n}(x_i + b)$, unde $a, b \in R$ şi $a \neq 0$.

Deoarece singurele funcţii polinomiale asociative şi comutative f de grad mai mic sau egal cu 1 sunt obţinute pentru $a_k = 0$,oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, respectiv $a_k = 1$ pentru $(\forall)k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, observăm că funcţia $g(y_1^m) = -b + a \prod_{j=1}^{m}(y_j + b)$ este distributivă faţă de următoarele funcţii:

(iv) $f(x_1^n) = -b$ sau

(v) $f(x_1^n) = b(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

Prin urmare, aplicând Lema 2.2.1 şi Lema 2.2.2 funcţiilor polinomiale asociative definite pe un semidomeniu infinit (domeniu infinit de integritate) obţinem următoarele rezultate:

Teoremă 2.2.4. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Fie $(R, +, \cdot)$ un semidomeniu infinit cu operaţia aditivă liberă de zero. Funcţia polinomială $g : R^m \to R$ este distributivă faţă de funcţia polinomială asociativă şi comutativă $f : R^n \to R$ dacă şi numai dacă f şi g sunt de tipul următoarelor funcţii:*

(i) $f(x_1^n) = b,\ \ g(x_1^m) = b,$ *unde* $b \in R$;

(ii) $f(x_1^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ \ g(y_1^m) = 0;$

(iii) $f(x_1^n) = 0;\ g(y_1^m) = a \prod\limits_{j=1}^{m} y_j$ *unde* $a \in R \backslash \{0\}$;

(iv) $f(x_1^n) = a \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i + b),\ \ g(y_1^m) = 0,$ *unde* $a \in R \backslash \{0\}$;

(v) $f(x_1^n) = b(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ \ g(y_1^m) = -b + a \prod\limits_{j=1}^{m} (y_j + b),$
unde $a \in R \backslash \{0\}$ *şi* $b \in$ *Frac*$(\overline{R})$ *satisfac condiţiile* $b(n-1) \in R,\ ab^m - b \in R$ *şi* $ab^k \in R$, *pentru orice* $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Teoremă 2.2.5. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu infinit de integritate. Funcţia polinomială asociativă $g : R^m \to R$ este distributivă faţă de funcţia polinomială asociativă şi comutativă $f : R^n \to R$ dacă şi numai dacă f şi g sunt de tipul următoarelor funcţii::*

(i) $f(x_1^n) = b,\ g(x_1^m) = b,$ *unde* $b \in R$;

(ii) $f(x_1^n) = b(1-n) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ g(y_1^m) = b,$ *unde* $b \in R$;

(iii) $f(x_1^n) = -b;\ g(y_1^m) = -b + a \prod\limits_{j=1}^{m} (y_j + b),$ *unde* $a \in R, a \neq 0$ *şi* $b \in$ *Frac*(R) *satisfac condiţiile* $ab^m - b \in R$ *şi* $ab^k \in R$, *pentru orice* $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$;

(iv) $f(x_1^n) = -b + a \prod\limits_{i=1}^{n} (x_i + b),\ \ g(y_1^m) = -b,$ *unde* $a, b \in R$ *şi* $a \neq 0$;

(v) $f(x_1^n) = b(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ g(y_1^m) = -b + a \prod\limits_{j=1}^{m} (y_j + b),$ *unde* $a \in R,\ a \neq 0$ *şi* $b \in$ *Frac*(R) *satisfac condiţiile* $b(n-1) \in R,\ ab^m - b \in R$ *şi* $ab^k \in R,$ *oricare ar fi* $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.

Aceste teoreme ne dau o caracterizare a tuturor $(n, m)-$ semiinelelor netriviale (inele şi corpuri) definite de funcţii polinomiale peste R.

Corolar 2.2.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Fie R un semidomeniu infinit cu suma liberă de zero, $a \in R \setminus 0$, $b \in$Frac$(\overline{R})$ satisfăcând condiţiile $b(n-1) \in R$, $ab^m - b \in R$ şi $ab^k \in R$, $(\forall) k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$.*

Dacă $f_b : R^n \to R$, $g_{a,b} : R^m \to R$ sunt definite prin

$$f_b(x_1^n) = b(n-1) + \sum_{k=1}^{n} x_k \quad \text{şi} \quad g_{a,b}(y_1^m) = -b + a \prod_{j=1}^{m} (y_j + b)$$

atunci tripletul $(R, f_b, g_{a,b})$ este un $(n, m)-$semiinel.

Corolar 2.2.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Dacă R este un domeniu de integritate infinit iar $a \in R \setminus 0$ şi $b \in$Frac(R) satisfac condiţiile $b(n-1) \in R$, $ab^m - b \in R$ şi $ab^k \in R$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, atunci tripletul $(R, f_b, g_{a,b})$ este un $(n, m)-$inel.*

Corolar 2.2.3. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [93]) *Dacă R este corp $a, b \in R$, $a \neq 0$, atunci tripletul $(R, f_b, g_{a,b})$ este un $(n, m)-$corp cu element zero$-b$. În plus, el este izomorf cu $(R, f_0, g_{a,0})$ unde*

$$f_0(x_1^n) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad g_{a,0}(y_1^m) = a \prod_{j=1}^{m} y_j, \quad \text{cu } a \in R^*$$

Întra-adevăr, funcţia bijectivă $\varphi : R \to R$, definită prin $\varphi(x) = x + b$ este un omomorfism de $(n, m)-$corpuri.

Observaţie 2.2.2. Aplicând corolarele 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 pentru $R = \mathbb{N}$, $R = \mathbb{Z}$, respectiv $R = \mathbb{Q}$ iar $b = \frac{1}{n-1}$, $a = (n-1)^{m-1}$ regăsim $(n, m)-$semiinelul, $(n, m)-$inelul, respectiv $(n, m)-$corpul definit în Exemplele 2.1.8, 2.1.9, 2.1.10.

2.3 Sub-(n,m)-semiinelul caracteristic al unui (n,m)-semiinel cu unitate

În cadrul structurilor algebrice uzuale, se ştie că fiecare inel $(R, +, \cdot)$ cu unitatea 1_R conţine un unic subinel minimal comutativ şi anume

$$\mathbb{Z}1_R = \{k \cdot 1_R \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

care este izomorf, fie cu inelul numerelor întregi $\mathbb{Z}$, fie cu inelul claselor de resturi $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ modulo un anumit $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Gilmer [52] şi Alarcon F. E., Andreson D. D., [3] au arătat că un rezultat similar are loc şi pentru semiinele, în sensul că pentru fiecare semiinel $(S, +, \cdot)$ cu unitatea 1_S, mulţimea $\mathbb{N}1_S = \{k \cdot 1_S \mid k \in \mathbb{N}\}$ este un subsemiinel comutativ al lui S, izomorf fie cu semiinelul numerelor naturale $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, caz în care spunem că S are caracteristica 0, fie cu semiinelul $B(n, i) = \{0, 1, \ldots, i, \ldots, n-1\}$; $1 \leq i \leq n-1$, în care adunarea se defineşte astfel:

$$a + b = \begin{cases} a + b & \text{dacă} \quad a + b \leq n - 1 \\ r & \text{dacă} \quad a + b > n - 1 \end{cases},$$

unde r este unicul număr natural cu $r \equiv a + b \pmod{n-i}$ şi $i \leq r \leq n-1$, iar înmulţirea este definită într-o manieră similară

$$a \cdot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{dacă} \quad ab \leq n - 1 \\ r' & \text{dacă} \quad ab > n - 1 \end{cases},$$

unde r' este unicul număr natural $r' \equiv ab \pmod{n-i}$ şi $i \leq r' \leq n-1$.

În ultimul caz $(\mathbb{N}1_S, +)$ este semigrupul ciclic generat de 1_S de perioadă $n - i$ şi indice i şi $G = \{i, \ldots, n-1\}$ este un grup ciclic (faţă de adunare) de ordin $n - i$. Unitatea aditivă a lui G este unicul element $e \equiv 0 \pmod{n-i}$ cu $i \leq e \leq n-1$. În acest ultim caz, în care $\mathbb{N}1_S$ şi $B(n, i)$ sunt semiinele izomorfe, se spune că semiinelul S are caracteristica (n, i). Subinelul $\mathbb{N}1_S$ se numeşte subsemiinel caracteristic.

În cele ce urmează vom studia rezultate similare pentru (n, m)-semiinele.

Pentru început vom menţiona că, spre deosebire de semiinelele uzuale ($(2, 2)$-semiinele), în care există cel mult o unitate, pentru $m > 2$, aşa cum am văzut există şi (n, m)-semiinele cu două sau chiar mai multe elemente neutre multiplicative.
Acest lucru conduce la posibilitatea existenţei a două sau mai multe sub-(n, m)-semiinele "caracteristice", adică generate de puterile "aditive" (n-are) ale elementelor neutre multiplicative. Menţionăm însă că acest impediment nu este esenţial, deoarece are loc următoarea afirmaţie:

Lema 2.3.1. *Fie (n, m)-semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ în care există un element neutru multiplicativ 1_S.*

1° *Dacă există $p, q \in \mathbb{N}$; $p < q$ astfel încât $1^{[p]} = 1_S^{[q]}$, atunci pentru orice $a \in S$, avem $a^{[p]} = a^{[q]}$;*

2° *Dacă există elementul $a \in S$ cu care se poate simplifica , astfel încât $a^{[p]} = a^{[q]}$; $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, atunci $1^{[p]} = 1^{[q]}$.*

Demonstraţie. 1° Pentru orice $a \in S$ avem $a = (a \overset{(m-1)}{1_S})_\circ$ şi ţinând seama de operaţiile cu puteri "aditive", avem

$$\begin{aligned} a^{[p]} &= (a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S)^{[p]} = (a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S^{[p]})_\circ = (a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S^{[q]})_\circ \\ &= (a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S)^{[q]} = a^{[q]}. \end{aligned}$$

2° Dacă $a^{[p]} = a^{[q]}$ atunci, cu un raţionament analog, rezultă că

$$(a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S^{[p]})_\circ = (a \overset{(m-2)}{1_S} 1_S^{[q]})_\circ.$$

Deoarece se poate simplifica cu a şi 1_S, din ipoteză rezultă că $1_S^{[p]} = 1_S^{[q]}$. □

Observaţie 2.3.1. Lema 2.3.1 ne permite să afirmăm că, dacă 1_S şi $1'_S$ sunt elemente neutre multiplicative în (n, m)-semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci:

1° Dacă $1_S^{[k]} \neq 1_S^{[r]}$ pentru orice $k, r \in \mathbb{N}$; $k \neq r$ vom avea $1'^{[k]}_S \neq 1'^{[r]}_S$ pentru orice $k, r \in \mathbb{N}$; $k \neq r$;

2° Există $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; $p < q$ astfel încât $1_S^{[p]} = 1_S^{[q]}$ dacă şi numai dacă $1'^{[p]}_S = 1'^{[q]}_S$.

Lema 2.3.2. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n, m)-semiinel şi 1_S un element neutru multiplicativ în S.*

Atunci submulţimea puterilor aditive ale lui 1_S, $1_S^{[\mathbb{N}]} = \{1_S^{[k]};\ k \in \mathbb{N}\}$ este un sub-(n, m)-semiinel comutativ cu element neutru multiplicativ 1_S.

Demonstraţie. Pentru orice $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$, unde $p = \max(n, m)$, conform operaţiilor cu puteri "aditive" avem

$$(1_S^{[k_1]}, 1_S^{[k_2]}, \ldots, 1_S^{[k_n]})_+ = 1_S^{[k_1+k_2+\cdots+k_n+1]} \in 1^{[\mathbb{N}]}$$

iar

$$\begin{aligned} (1_S^{[k_1]}, 1_S^{[k_2]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})_\circ &= (1_S, 1_S^{[k_2]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})_\circ \\ = \left((1_S, 1_S, 1_S^{[k_3]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})_\circ^{[k_1]}\right)^{[k_2]} &= (1_S, 1_S, 1_S^{[k_3]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})^{[k_1]*[k_2]} \\ = \cdots &= (1_s, 1_S, \ldots, 1_S, 1_S^{[k_m]})_\circ^{[k_1]*[k_2]*\cdots*[k_{m-1}]} \\ &= \left((1_S, 1_S, \ldots, 1_S)^{[k_1]*[k_2]*\cdots*[k_{m-1}]}\right)^{[k_m]} \\ &= 1_S^{[k_1]*[k_2]*\cdots*[k_{m-1}]*[k_m]} \in 1^{[\mathbb{N}]}. \end{aligned}$$

În concluzie, $(1^{[\mathbb{N}]}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un sub-(n, m)-semiinel comutativ, care are element neutru multiplicativ 1_S. □

Lema 2.3.3. *Dacă* $k_1 \neq k_2$ *pentru orice* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$*, implică* $1_S^{[k_1]} \neq 1_S^{[k_2]}$*, atunci sub-*$(n,m)$*-semiinelul* $1^{[\mathbb{N}]}$*, definit în Lema 2.3.2, este izomorf cu sub-*(n,m)*-semiinelul numerelor naturale* $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *definit în Exemplul 2.1.8.*

Demonstraţie. Aplicaţia $f : \mathbb{N} \to 1^{[\mathbb{N}]}$; $f(k) = 1^{[k]}$ este un omomorfism de (n,m)-semiinele deoarece pentru orice $k_1, k_2, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$, $p = \max(n,m)$, conform relaţiilor din demonstraţia Lemei 2.3.2, avem

$$\begin{aligned} f((k_1^n)_+) &= f(k_1 + \cdots + k_n + 1) = 1_S^{[k_1+k_2+\cdots+k_n+1]} \\ &= (1_S^{[k_1]}, \ldots, 1_S^{[k_n]})_+ = (f(k_1), \ldots, f(k_n))_+, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} f((k_1^m)_*) &= f(k_1 * k_2 * \cdots * k_m) = 1_S^{[k_1 * k_2 \cdots * k_m]} \\ &= (1_S^{[k_1]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})_\circ = (f(k_1), \ldots, f(k_m))_\circ. \end{aligned}$$

În plus, din ipoteză rezultă că aplicaţia f este injectivă şi totodată, din modul cum a fost definită, ea este şi surjectivă, deci f este un izomorfism de (n,m)-semiinele. $\square$

Lema 2.3.4. *Dacă există* $k_1 \neq k_2$*;* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $1_S^{[k_1]} = 1_S^{[k_2]}$ *atunci există şi sunt unici* $p, q \in \mathbb{N}$*,*$p < q$ *astfel încât sub-*(n,m)*-semiinelul generat de* 1_S*,* $1^{[\mathbb{N}]}$ *este izomorf cu* (n,m)*-semiinelul* $B(q,p)$ *definit în Exemplul 2.1.11 .*

Demonstraţie. Daca există $k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_1 \neq k_2$ astfel încât $1_S^{[k_1]} = 1_S^{[k_2]}$, atunci fie $p \in \mathbb{N}$ cel mai mic număr natural cu proprietatea ca există $k > p$ şi $1_S^{[k]} = 1_S^{[p]}$.
Mai mult , fie q cel mai mic număr natural $q > p$ cu proprietatea că $1_S^{[q]} = 1_S^{[p]}$. Atunci conform definiţiei puterilor în sensul lui Post,(2.1) avem

$$1_S^{[q+1]} = (1_S^{[q]}, \overset{(n-1)}{1_S})_+ = (1_S^{[p]}, \overset{(n-1)}{1_S})_+ = 1_S^{[p+1]}$$

şi din aproape în aproape se arată că

$$1_S^{[q+i]} = 1_S^{[p+i]}$$

Utilizând egalitatea (2.3), avem:

$$1_S^{[2q-p]} = (1_S^{[q]}, 1_S^{[q-p-1]}, \overset{(n-2)}{1_S})_+ = (1_S^{[p]}, 1_S^{[q-p-1]}, \overset{(n-2)}{1_S})_+ = 1_S^{[q]} = 1_S^{[p]}$$

Analog, pentru orice $0 < i < q - p$ se arată că,

$$1_S^{[2q-p+i]} = 1_S^{[p+i]}.$$

Prin inducţie matematică se arată că $1_S^{[(k+1)q-kp+i]} = 1_S^{[p+i]}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ şi orice $i \in \{0, 1, \ldots, q-p-1\}$.

Pentru simplificarea notaţiilor, fie mulţimea $B(q,p) = \{0, 1, \ldots, p, p+1, \ldots, q-1\}$ şi aplicaţia surjectivă $\pi : \mathbb{N} \to B(q,p)$ definită astfel: $\pi(x) = x$ dacă $0 \leq x < q$ şi $\pi(x) = p + r_{x-p}$, unde r_{x-p} este restul împărţirii lui $x-p$ prin $q-p$ pentru $x \geq q$. Cu alte cuvinte, pentru $x \geq q$, $\pi(x)$ este unicul număr natural mai mare sau egal cu p cu proprietatea că $x - p \equiv r_{x-p} (mod\, q-p)$ şi $0 \leq r_{x-p} < q-p$.

Ţinând seama de cele de mai sus, putem scrie pentru puterile unităţii (n,m)-semiinelului S cu aceste notaţii $1_S^{[x]} = 1_S^{[\pi(x)]}$ pentru orice $x \geq q$ şi n-semigrupul ciclic generat de 1_S este finit de ordinul q, $1_S^{[\mathbb{N}]} = \{1_S, 1_S^{[1]}, \ldots, 1_S^{[p]}, 1_S^{[p+1]}, \ldots, 1_S^{[q-1]}\}$, submulţimea $G = \{1_S^{[p]}, 1_S^{[p+1]}, \ldots, 1_S^{[q-1]}\}$ este un n-grup ciclic de ordinul $q-p$.

Mai mult, (n,m)-semiinelul $(B(q,p), (\,)_\oplus, (\,)_*)$ definit în exemplul (2.1.11) este izomorf cu (n,m)-semiinelul $1_s^{[\mathbb{N}]}$.
Într-adevăr, fie aplicaţia $f : B(q,p) \to 1_S^{[\mathbb{N}]}$; $f(k) = 1^{[k]}$, $k \in B(q,p)$.

Pentru orice $k_1, \ldots, k_t \in B(q,p)$, $t = max(n,m)$ avem:

$$\begin{aligned} f((k_1^n)_\oplus) &= f(\pi(k_1 + k_2 + \ldots + k_n + 1)) = 1_S^{[\pi(k_1+k_2+\ldots+k_n+1)]} = \\ &= 1_S^{[k_1+k_2+\ldots+k_n+1]} = (1_S^{[k_1]}, \ldots, 1_S^{[k_n]})_+ = \\ &= (f(k_1), \ldots, f(k_n))_+ \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} f((k_1^m)_*) &= f(\pi(k_1 * k_2 * \ldots * k_m)) = 1_S^{[\pi(k_1*k_2*\ldots*k_m)]} = \\ &= 1_S^{[k_1*k_2*\ldots*k_m]} = (1_S^{[k_1]}, \ldots, 1_S^{[k_m]})_\circ = \\ &= (f(k_1), \ldots, f(k_m))_\circ \end{aligned}$$

Prin urmare, f este un omomorfism de (n,m)-semiinele surjectiv.

Deoarece $f(k_1) = f(k_2)$ implică $1_S^{[k_1]} = 1_S^{[k_2]}$ şi $k_1, k_2 \in B(q,p)$ de aici avem $k_1 = k_2$.

Aplicaţia f fiind un omomorfism bijectiv, rezultă că f este un izomorfism de (n,m)-semiinele. □

Ţinând seama de Lemele 2.3.1,2.3.2 respectiv 2.3.3, 2.3.4 am demonstrat că

Teoremă 2.3.1. *Pentru orice (n,m)-semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ cu unitatea 1_S există un sub-(n,m)-semiinel $1_S^{[\mathbb{N}]}$ generat de 1_S astfel încât:*

1) *Dacă $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este infinit, atunci toate puterile "aditive" ale lui 1_S sunt distincte şi (n,m)-semiinelul $(1_S^{[\mathbb{N}]}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este izomorf cu (n,m)-semiinelul $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ definit în Exemplul 2.1.8 .*

2) Dacă $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este finit, atunci toate numerele naturale p şi q, $p < q$ astfel încât $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este izomorf cu (n, m)-semiinelul $B(p, q)$ definit în Exemplul 2.1.11.

3) Dacă (n, m)-semiinelul S are mai multe unităţi, atunci sub-(n, m)-semiinelele generate de acestea sunt izomorfe (de acelaşi tip).

În cazul (n, m)-semiinelului S în care sub-(n, m)-semiinelul $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este de tip $(q, 0)$ avem :

Corolar 2.3.1. *Dacă (n, m)-semiinelul S cu unitatea 1_S este astfel încât există $q \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $1_S^{[q]} = 1_S$, atunci sub-(n, m)-semiinelul $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este un (n, m)-inel izomorf cu (n, m)-inelul finit de ordinul q definit pe mulţimea claselor de resturi modulo q, $\mathbb{Z}_q$ derivat din inelul uzual $(\mathbb{Z}_q, +, \cdot)$.*

Cele demonstrate ne permit să introducem următoarea definiţie care o generalizează pe cea din cazul semiinelelor uzuale:

Definiţie 2.3.1. *Spunem că (n, m)-semiinelul S cu unitate 1_S are:*

1° *Caracteristica 0(sau ∞) dacă sub-(n, m)-semiinelul generat de aceasta, $1_S^{[\mathbb{N}]}$ este izomorf cu cel al numerelor naturale $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ definit în Exemplul 2.1.7 ;*

2° *Caracteristica (q, p) dacă $1^{[\mathbb{N}]}$ este izomorf cu (n, m)-semiinelul $(B(q, p), (\,)_\oplus, (\,)_*)$ definit în Exemplul 2.1.10.*
Sub (n, m)-semiinelul $< 1_S^{\mathbb{N}} >= 1_S^{[\mathbb{N}]}$ îl vom numi sub (n, m)-semiinelul caracteristic al lui S.

Un (n, m)-semiinel cu mai multe unităţi are tot atâtea sub-(n, m)-semiinele caracteristice izomorfe între ele.

2.4 Congruenţe de $(n, m)-$semiinele

Definiţia congruenţelor se transpune de la algebre universale la (n,m)- semiinele, respectiv (n,m)-inele. În acest capitol vom urmări proprietăţile caracteristice acestor structuri algebrice. Se ştie că în cazul inelelor obişnuite laticea congruenţelor unui inel este izomorfă cu laticea idealelor inelului. Acest izomorfism permite identificarea congruenţelor unui inel cu idealele sale, ceea ce nu este adevărat în cazul semiinelelor. Un inel factor în raport cu o congruenţă are o singură clasă de echivalenţă în inelul dat şi această clasă determină inelul factor.
În cazul (n,m)-semiinelelor, respectiv (n,m)-inelelor absenţa elementului zero, în general cât şi existenţa mai multor idempotenţi aditivi în unele cazuri, face să existe partiţii

în clase de congruenţă care să nu posede o astfel de proprietate.
De aceea se va face distincţie între noţiunea de (n,m)-semiinel ((n,m)-inel) de clase de "resturi" (cel definit de o congruenţă) şi cea de (n,m)-inel factor (cel definit cu ajutorul anumitor ideale).

Definiţie 2.4.1. Fie $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$. O relaţie de achivalenţă ρ se numeşte *relaţie de congruenţă* pe $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, dacă această relaţie este compatibilă cu cele două operaţii din semiinel, adică oricare ar fi $a_i, b_i \in S$ şi $a_i \rho b_i$;
$i \in \{1,2,...,max(n,m)\}$ are loc:

$$(a_1^n)_+ \,\rho\, (b_1^n)_+ \tag{2.10}$$

şi

$$(a_1^m)_\circ \,\rho\, (b_1^m)_\circ \tag{2.11}$$

Dacă $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$semiinel, ρ o congruenţă pe $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, $a \in S$, submulţimea $[a]_\rho = \{x \in S | a\rho x\}$ se numeşte *clasă rest în raport cu congruenţa ρ.*

Observaţie 2.4.1. Dacă notăm cu $\mathcal{C}(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ mulţimea tuturor congruenţelor definite pe $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, atunci $\mathcal{C}(S,(\,)_+,(\,)_\circ) = \mathcal{C}(S,(\,)_+)\bigcap \mathcal{C}(S,(\,)_\circ)$, unde $\mathcal{C}(S,(\,)_+)$ respectiv $\mathcal{C}(S,(\,)_\circ)$ sunt mulţimea tuturor congruenţelor definite pe n-semigrupul $(S,(\,)_+)$, respectiv mulţimea tuturor congruenţelor definite pe m-semigrupul $(S,(\,)_\circ)$.

Condiţiile de mai sus pot fi reformulate astfel:

Propoziţie 2.4.1. *O relaţie de echivalenţă ρ într-un (n,m)-semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este o congruenţă dacă şi numai dacă $a, b \in S$ astfel încât $a\,\rho\, b$ implică*

$$(a\, c_1^{n-1})_+ \rho\, (b\, c_1^{n-1})_+ \tag{2.12}$$

pentru orice $c_1, c_2, ..., c_{n-1} \in S$ şi

$$(d_1^{i-1}\, a\, d_i^{m-1})_\circ \rho (d_1^{i-1}\, b\, d_i^{m-1})_\circ \tag{2.13}$$

pentru orice $d_1, d_2, ..., d_{m-1} \in S$.

Următoarea teoremă generalizează pentru $(n,m)-$semiinele rezultatele lui Ušan [133], [135] obţinute pentru $n-$grupuri.

Teoremă 2.4.1. (Maria S.Pop, **Adina Pop** [97]) *Fie $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ un (n,m)-semiinel, $m \geq 3$ care are unitate la dreapta ca sistem de $(m-1)$elemente u_1^{m-1} în $m-$semigrupul $(S,(\,)_\circ)$ şi ρ o relaţie de echivalenţă pe S. Relaţia de echivalenţă ρ este relaţie de congruenţă dacă şi numai dacă:*

i) Pentru orice elemente $c_1, c_2, ..., c_{n-1} \in S$, $d_1, d_2, ..., d_{m-1} \in S$ *şi pentru orice* $a, b \in S$ *relaţia* $a\,\rho\,b$ *implică*

$$(a\,c_1^{n-1})_+\rho\,(b\,c_1^{n-1})_+ \tag{2.14}$$

$$(a\,d_1^{m-1})_\circ\rho\,(b\,d_1^{m-1})_\circ \tag{2.15}$$

şi

$$(d_1\,a\,d_2^{m-1})_\circ\rho(d_1\,b\,d_2^{m-1})_\circ. \tag{2.16}$$

ii) Dacă $(S, (\,)_\circ)$ *este un m-monoid* ($u_1^{m-1} \in U(S, (\,)_\circ)$)*, atunci* ρ *este o relaţie de congruenţă dacă şi numai dacă au loc relaţiile* (2.14) *şi* (2.16).

Demonstraţie. i) Dacă relaţia de echivalenţă ρ este relaţie de congruenţă, conform Propozitiei 2.4.1, rezultă ca sunt îndeplinite relaţiile (2.14),(2.15), (2.16) .
Reciproc, dacaă relaţia de echivalenţă ρ verifică relaţia (2.14), rezultă că relaţia de ρ este o relaţie de congruenţă în $n-$semigrupul $(S, (\,)_+)$.
Rămâne de demonstrat că relaţia $\rho \in \mathcal{C}(S, (\,)_\circ)$. Pentru aceasta, fie $a, b \in S$, $a\,\rho\,b$ care satisface relaţia (2.16). Folosind asociativitatea operaţiei m-are vom obţine

$$\begin{aligned}
a\,\rho\,b \;&\Rightarrow\; (d_2\,a\,u_1^{m-2})_\circ\rho\,(d_2\,b\,u_1^{m-2})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1, (d_2\,a\,u_1^{m-2})_\circ, u_{m-1}, d_3^{m-1})_\circ\rho(d_1, (d_2\,b\,u_1^{m-2})_\circ, u_{m-1}, d_3^{m-1})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1, d_2, (a\,u_1^{m-1})_\circ, d_3^{m-1})_\circ\rho\,(d_1, d_2, (b\,u_1^{m-1})_\circ, d_3^{m-1})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1\,d_2\,a\,d_3^{m-1})_\circ\rho(d_1\,d_2\,b\,d_3^{m-1})_\circ
\end{aligned}$$

Presupunem că $(d_1^{k-1}\,a\,d_k^{m-1})_\circ\,\rho\,(d_1^{k-1}\,b\,d_k^{m-1})_\circ$; pentru orice $k \in \{2, 3, ..., m-1\}$ şi arătăm că $(d_1^k\,a\,d_{k+1}^{m-1})_\circ\,\rho\,(d_1^k\,b\,d_{k+1}^{m-1})_\circ$.
Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
a\rho b \;&\Rightarrow\; (d_2^k\,a\,u_1^{m-k})_\circ\rho\,(d_2^k\,b\,u_1^{m-k})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1, (d_2^k\,a\,u_1^{m-k})_\circ, u_{m-k+1}^{m-1}, d_{k+1}^{m-1})_\circ\rho\,(d_1, (d_2^k\,b\,u_1^{m-k})_\circ, u_{m-k+1}^{m-1}\,d_{k+1}^{m-1})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1^k, (a\,u_1^{m-1})_\circ, d_{k+1}^{m-1})_\circ\rho\,(d_1^k, (b\,u_1^{m-1})_\circ, d_{k+1}^{m-1})_\circ\\
&\Rightarrow\; (d_1^k\,a\,d_{k+1}^{m-1})_\circ\rho(d_1^k\,b\,d_{k+1}^{m-1})_\circ.
\end{aligned}$$

Deci am arătat că

$$a\rho b \Rightarrow (d_1^{i-1}\,a\,d_i^{m-1})_\circ\rho(d_1^{i-1}\,b\,d_i^{m-1})_\circ \tag{2.17}$$

pentru orice $i \in \{2, 3, ..., m-1\}$.

Mai rămâne de arătat că $(d_1^{m-1}\, a)_\circ \rho\, (d_1^{m-1}\, b)_\circ$ pentru orice $a, b \in S$, $d_1, ..., d_{m-1} \in S$.

Deoarece $a\rho b \Rightarrow (d_2^{m-1}\, a\, u_1)_\circ \rho\, (d_2^{m-1}\, b\, u_1)_\circ$ vom avea, conform lui (2.16) că

$$(d_1, (d_2^{m-1} a\, u_1)_\circ, u_2^{m-1})_\circ \rho\, (d_1, (d_2^{m-1} b\, u_1)_\circ, u_2^{m-1})_\circ.$$

Folosind asociativitatea operaţiei m-are, vom avea

$$(d_1^{m-1}, (a\, u_1^{m-1})_\circ)_\circ \rho (d_1^{m-1}, (b\, u_1^{m-1})_\circ)_\circ \Rightarrow (d_1^{m-1}\, a)_\circ \rho\, (d_1^{m-1}\, b)_\circ.$$

În concluzie $\rho \in \mathcal{C}(S, (\,)_\circ)$.

ii) Fie ρ o relaţie de echivalenţă care verifică relaţia (2.16). Dacă m-semigrupul $(S, (\,)_\circ)$ este un m-monoid rezultă că există cel puţin un sistem de $(m-1)$ elemente $u_1^{m-1} \in S$ cu proprietatea că $(a\, u_1^{m-1})_\circ = (u_{m-2}\, u_1^{m-2}\, a)_\circ$ pentru orice $a \in S$.

Atunci din relaţia (2.17) şi

$$a\rho b \Rightarrow (u_{m-2}\, a\, d_1^{m-2})_\circ\, \rho\, (u_{m-2}\, b\, d_1^{m-2})_\circ,$$

rezultă că

$$(u_{m-1}, u_1^{m-3}, (u_{m-2}\, a\, d_1^{m-2})_\circ, d_{m-1})_\circ \rho\, (u_{m-1}, u_1^{m-3}, (u_{m-2}\, b\, d_1^{m-2})_\circ, d_{m-1})_\circ.$$

Folosind asociativitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" vom obţine

$$((u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, a)_\circ, d_1^{m-1})_\circ\, \rho\, ((u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, b)_\circ, d_1^{m-1})_\circ$$

adică $(a\, d_1^{m-1})_\circ\, \rho\, (b\, d_1^{m-1})_\circ$.

Conform punctului i) rezultă că ρ este o congruenţă în $(n, m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$.

$\square$

Ca şi în caz binar are loc urmă toarea teoremă:

Teoremă 2.4.2. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel, ρ o congruenţă pe $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi $S_{/\rho}$ mulţimea tuturor claselor de congruenţă $[a]_\rho$ ale lui S în raport cu congruenţa ρ. Pe mulţimea $S_{/\rho}$ definim o operaţie n-ară $(\,)_+$ şi o operaţie m-ară $(\,)_\circ$ astfel :*

$$([a_1]_\rho, ..., [a_n]_\rho)_+ = [(a_1^n)_+]_\rho$$

$$([a_1]_\rho, ..., [a_m]_\rho)_\circ = [(a_1^m)_\circ]_\rho$$

pentru orice $a_1, a_2, ..., a_p \in S$, $p = max\{n, m\}$. Atunci tripletul $(S_{/\rho}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel numit inelul claselor de congruenţă al lui $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ relativ la congruenţa ρ. Aplicaţia $p : S \to S_{/\rho}, p(a) = [a]_\rho$ este un omomorfism surjectiv. Dacă (n, m)-semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este semicomutativ (comutativ) atunci şi (n, m)-semiinelul $(S_{/\rho}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ are aceeaşi proprietate. Dacă $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$inel, atunci $(S_{/\rho}, (\,)_+, (\,)_\circ$ este un $(n, m)-$inel.

Demonstraţie. Pentru început vom arăta că operaţiile sunt bine definite, nedepinzând de alegerea reprezentanţilor claselor de congruenţă.
Într-adevăr, dacă $a_i' \in [a_i]_\rho$ vom avea $[a_i]_\rho = [a'_i]_\rho$, $i = \{1, 2, ..., p\}$, $p = \max(n, m)$, adică $a_i \rho \, a'_i$,pentru orice $i = \overline{1, p}$.
Deoarece ρ este o relaţie de congruenţă, rezultă că $(a_1^n)_+ \, \rho \, (a'^n_1)_+$ şi $(a_1^m)_\circ \rho \, (a'^m_1)_\circ$. Rezultă că $[(a_1^n)_+]_\rho = [(a'^n_1)_+]_\rho$ şi $[(a_1^m)_\circ]_\rho = [(a'^m_1)_\circ]_\rho$.
În continuare vom arăta că aplicaţia naturală $p : S \to S_{/\rho}$ este un omomorfism surjectiv.
Dacă $a_i \in S$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $p = max(m, n)$ atunci

$$p((a_1^n)_+) = [(a_1^n)_+]_\rho = ([a_1]_\rho, ..., [a_n]_\rho)_+ = (p(a_1), ..., p(a_n))_+$$

şi

$$p((a_1^m)_\circ) = [(a_1^m)_\circ]_\rho = ([a_1]_\rho, ..., [a_m]_\rho)_+ = (p(a_1), ..., p(a_m))_\circ$$

adică aplicaţia p este un omomorfism. Surjectivitatea este evidentă. Rezultă că imaginea omomorfică $(S_{/\rho}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ a semiinelului S este de asemenea un (n, m)-semiinel şi în particular $(S_{/\rho}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-inel dacă $(S, ()_+, ()_\circ)$ este un (n, m)-inel. □

2.5 Ideale. Ideale subtractive

Idealele joacă un rol important atât în teoria semiinelelor cât şi în teoria $(n, m)-$semiinelelor. Numerosşi autori, precum B.Bednarek [12], R. E. Atani , S.E Atani [9], F.E. Alarcón, D. D. Anderson [3], D. Polkowska [4], S. J. Golan [53], U. Hebish, H.J. Weinert [57] au studiat diverse tipuri de ideale în semiinele. O prezentare sistematică a teoriei idealelor definite într-un semiinel a fost dată de S. J. Golan [53] şi U. Hebish, H.J. Weinert [57]. Idealele în semiinele ternare au fost sudiate de J.N. Chaudari, K. J. Ingale [19], T. K. Dutta [40], [42], S. Kar [71]. În 1958 M. Herinksen introduce o clasă mai restrictivă de ideale aşa numita clasă a $k-$idealelor sau clasa idealelor subtractive. Studiul acestor clase a fost continuat de M.K. Sen, M.R. Adhikary [120], U. Hebish, H.J. Weinert [57], F.E. Alarcón, D. D. Anderson [3] etc.

Noţiunea de de k-ideal pentru $(n, m)-$seminele a fost introdusă de Y. Zhu [138]. În acest paragraf dăm câteva proprietăţi ale acestor ideale subtractive, multe exemple şi contraexemple. Definim o relaţie de congruenţă de tip Bourne şi construim inelul claselor de congruenţă în raport cu congruenţa Bourne.

Definiţie 2.5.1. Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel. O submulţime $I \subseteq S$ se numeşte $i-$*ideal* al lui $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ dacă I este un sub-n-semigrup $(I, (\,)_+)$ al lui $(S, (\,)_+)$ (i.e. $I^{[1]} \subseteq S$) şi $(\overset{(i-1)}{S}\, I\, \overset{(m-i)}{S})_\circ \subseteq I$. If I is an $i-$ideal of Soricare ar $i \in \{1, 2, .., m\}$, atunci el se numeşte *ideal* al lui S.

Definiţie 2.5.2. Dacă $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$inel, atunci O submulţime $U \subseteq R$ se numeşte un $i-$ideal U al lui $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ dacă U este un sub-n-grup $(U, (\,)_+)$ al lui$(R, (\,)_+)$ (ceea ce este echivalent cu $U^{[1]} \subseteq U$ şi pentru orice $x \in U$ transversale lui x, $\overline{x} \in U$) şi satisface condiţia $(\overset{(i-1)}{R}\, U\, \overset{(m-i)}{R})_\circ \subseteq U$. Dacă U este un $i-$ideal al lui R pentru orice $i \in \{1, 2, .., m\}$, atunci el se numeşte ideal al lui R.

Observaţie 2.5.1. Deşi conceptul de ideal al unui $(n, m)-$semiinel a fost transferat de la conceptul de ideal al unui $(n, m)-$inel, există (n,m)-inele care conţin ideale in sensul definiţiei date în cazul $(n, m)-$ semiinelelor dar nu sunt ideale în sensul definiţiei din teoria $(n, m)-$ inelelor.

Propoziţie 2.5.1. *Dacă Ida(S) este mulţimea tuturor idempotenţilor aditivi şi Idm(S) este mulţimea tuturor idempotenţilor multiplicativi al unui $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci:*
1) Ida(S) este un ideal al lui S ;
2) Dacă $e \in$Ida$(S) \bigcap$ Idm(S) şi $S_e = \{x \in A;\ \ există\ \ k \in \mathbb{N}; x^{[k]} = e\}$ atunci S_e este un sub-(n, m)-semiinel al lui S;
3) If $e_1, ..., e_p \in$ Ida(S) where $p =$max (n, m) then

$$(S_{e_1}, ..., S_{e_n})_+ \subseteq S_{(e_1^n)_+}$$

$$(S_{e_1}, ..., S_{e_m})_\circ \subseteq S_{(e_1^m)_\circ}.$$

Demonstraţie. 1) Dacă $e_1, ..., e_n \in$ Ida(S), datorită comutativităţii operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", vom avea

$$(e_1^n)_+^{[1]} = (e_1^{[1]}, ..., e_n^{[1]})_+ = (e_1, ..., e_n)_+,$$

ceea ce ne arată că $(e_1^n)_+ \in$ Ida(S) .
Pentru orice $x_1, ..., x_m \in S$, $e \in$Ida(S) şi $i \in \{1, ..., m\}$, conform relaţiei (2.5) obţinem că $(x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ^{[1]} = (x_1^{i-1}\, e^{[1]}\, x_{i+1}^m)\circ = (x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ$, adică $(x_1^{i-1}\, e\, x_{i+1}^m)_\circ \in$Ida$(S)$. În concluzie Ida$(S)$ este un ideal al lui S.
2) Dacă $x_i \in S_e$; $i \in \{1, ..., p\}$ unde $p = \max\,(n, m)$, atunci există $k_i \in \mathbb{N}$ asfel încât $x_i^{[k_i]} = e$. Folosind commutativitatea operaţiei $n-$are obţinem

$$(x_1^n)_+^{[k_1 * k_2 * ... * k_n]} = (x_1^{[k_1 * k_2 * ... * k_n]}, ..., x_n^{[k_1 * k_2 * ... * k_n]})_+$$

$$= ((x_1^{[k_1]})^{[k_2 * ... * k_n]}, (x_2^{[k_2]})^{[k_1 * k_3 * ... * k_n]}, ..., (x_n^{[k_n]})^{[k_1 * k_2 * ... * k_{n-1}]})_+$$

$$= (e^{[k_2*...*k_n]}, e^{[k_1*k_3*...*k_n]}, ..., e^{[k_1*...*k_{n-1}]})_+ = (e, ..., e)_+ = e,$$

adică $(x_1^n)_+ \in S_e$.
De asemenea,

$$(x_1^m)_\circ^{[k_1*...*k_m]} = (...((x_1^m)_\circ^{[k_1]})_\circ^{[k_2]}...)_\circ^{[k_m]} = (...(x_1^{[k_1]} x_2^m)_\circ^{[k_2]}...)_\circ^{[k_m]}$$

$$= (...(x_1^{[k_1]}, x_2^{[k_2]}, x_3^m)_\circ^{[k_3]}...)_\circ^{[k_m]} = ... = (x_1^{[k_1]}, x_2^{[k_2]}, x_3^{[k_3]}, ..., x_m^{[k_m]})_\circ$$

$$= (e, e, ..., e)_\circ = e^{<1>} = e$$

ceea ce ne conduce la $(x_1^m)_\circ \in S_e$.
3) Ca şi in cazul $n-$semigrupurilor [122] arătăm că, dacaă $x_i \in S_{e_i}$, ceea ce este echivalent cu faptul că există $k_i \in \mathbb{N}$; $x_i^{[k_i]} = e_i$; $i \in \{1, ..., p\}$, atunci

$$(x_1^n)_+^{[k_1*...*k_n]} = (x_1^{[k_1*...*k_n]}, ..., x_n^{[k_1*...*k_n]})_+$$

$$= ((x_1^{[k_1]})^{[k_2*...*k_n]}, ..., (x_n^{[k_n]})^{[k_1*k_2*...*k_{n-1}]})_+$$

$$= (e_1^{[k_2*...*k_n]}, e_2^{[k_1*k_3*...*k_n]}, ..., e_n^{[k_1*...*k_{n-1}]})_+ = (e_1, ..., e_n)_+ = (e_1^n)_+,$$

adică $(x_1^n)_+ \in S_{(e_1^n)_+}$.
Analog,

$$(x_1^m)_\circ^{[k_1*k_2*...*k_m]} = (((x_1^m)_\circ^{[k_1]})^{[k_2*...*k_m]} = (x_1^{[k_1]}, x_2^m)_\circ^{[k_2*...*k_m]}$$

$$= ((e_1, x_2^m)_\circ^{[k_2]})^{[k_3*...*k_m]} = ((e_1, x_2^{[k_2]}, x_3^m)_\circ^{[k_3]})^{[k_4*...k_m]}$$

$$= (e_1, e_2, x_3^{[k_3]}, x_4^m)_\circ^{[k_4*...*k_m]} = ... = (e_1, e_2, e_3, ..., e_m)_\circ = (e_1^m)_\circ$$

în concluzie $(x_1^m)_\circ \in S_{(e_1^m)_\circ}$. □

Propoziţie 2.5.2. *Fie $(S, ( )_+, ( )_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel cu reducere. Atunci orice idempotent aditiv este element neutru aditiv .*

Demonstraţie. Fie $e \in Ida(S)$. Rezultă că $e^{[1]} = e$ şi în plus
$(\overset{(n-1)}{e}(\overset{(n-1)}{e} x)_+)_+ = (e^{[1]}, \overset{(n-2)}{e}, x)_+ = (\overset{(n-1)}{e} x)_+$ pentru orice $x \in S$. Deoarece S este un $(n, m)-$ semiinel cu reducere, rezultă că $(\overset{(n-1)}{e} x)_+ = x$ oricare ar fi $x \in S$.
În concluzie e este element neutru aditiv. □

Propoziţie 2.5.3. *Fie $(S, ( )_+, ( )_\circ)$ un $(n, m)-$ semiinel cu proprietatea că $|Ida(S)| \geqslant 1$. Atunci orice ideal al $(n, m)-$semiinelul S conţine cel puţin un idempotent aditiv.*

Demonstraţie. Fie $e \in Ida(S)$ şi $a \in A$. Atunci, A fiind ideal în $(n, m)-$ semiinelul S, rezultă că $(x_1^{m-2}\, a\, e)_\circ \in A$ pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_{m-2} \in S$.
Dar $e^{[1]} = e$ şi conform distributivităţii operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia $n-$ara "$(\,)_+$", vom avea

$$(x_1^{m-2}\, a\, e)_\circ = (x_1^{m-2}\, a\, e^{[1]})_\circ = (x_1^{m-2}\, a\, e)_\circ^{[1]}.$$

Acest lucru demonstrează că $(x_1^{m-2}\, a\, e)_\circ \in Ida(S) \cap A$. □

Următoarea definiţie reprezintă o generalizare a noţiunii date Golan [53], în cazul binar.

Definiţie 2.5.3. Un ideal I al unui $(n, m)-$semiring $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte *ideal tare* dacă $(x_1^n)_+ \in A$ implică $x_i \in A$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$.

Definiţie 2.5.4. Fie un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$. Idealul I al $(n, m)-$semiinel S se numeţe:

i) *complet prim* dacă

$$(\forall\, a_1^m \in S)((a_1^m)_\circ \in I \Rightarrow \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\, ;\, a_i \in I).$$

ii)-semiprim dacă

$$(\forall\, a \in S)(a^{<1>} \in I \Rightarrow\; a \in I).$$

Observăm că orice ideal complet prim este ideal semiprim.

Definiţie 2.5.5. Fie un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ care are unitate ca sistem de $(m-1)$elemente, $u_1^{m-1} \in U(S, (\,)_\circ))$. O submulţime $I \supseteq S$ care este $1-$ideal şi $m-$ideal al lui S se numeşte *ideal complet prim*, dacă $I \neq S$ şi are loc urmăoarea implicaţie:

$$(x_1^m)_\circ \in S \Rightarrow x_1 \in I \text{ sau } x_m \in I \text{ sau} (u_{m-1}\, x_2^{m-1}\, u_{m-1})_\circ \in I.$$

Următoarea definiţie este o generalizare a noţiunii de ideal relativ la o submulţime a unui $n-$semigrup (vezi [100] şi [12]).

Definiţie 2.5.6. Adina Pop [89] Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel şi $I \subseteq H \subseteq S$. Submulţimea I se numeşte *ideal relativ la H*, dacă $I^{[1]} \subseteq I$ şi $(\overset{(i-1)}{H}, I, \overset{(m-i)}{H})_\circ \subseteq I$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

Vom defini în continuare noţiunea de ideal semiprimar al unui $(n, m)-$semiinel, care este o generalizare a noţiunii de ideal semiprimar al unui n-semigrup, definită de noi [92].

Definiţie 2.5.7. Adina Pop [89] O submulţime I a unui $(n,m)-$semiinel $(S,(\ )_+,(\ )_\circ)$ se numeşte *ideal semiprimar* dacă

$$(\forall\, a_1,\ldots,a_m \in A)((a_1^m)_\circ \in I \Rightarrow \exists\, i \in \{1,2,\ldots,m\}\,;\exists\, k_i \in \mathbb{N}; a_i^{<k_i>} \in I).$$

Spunem că $(n,m)-$semiinelul S este semiinel semiprimar dacă toate idealele sale sunt ideale semiprimare. Este evident faptul că orice ideal complet prim al unui $(n,m)-$semiinel este semiprimar.

Definiţie 2.5.8. Adina Pop [89] Fie $(S,(\ )_+,(\ )_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel. Dacă H este o submulţime a lui S se numeşte *radicalul mulţimii H* notat rad$H$ mulţimea

$$\mathrm{rad}H = \{x \in S; \exists k \in \mathbb{N}; x^{<k>} \in H\}.$$

Menţionăm faptul că ,în general rad$I$ nu este un ideal al $(n,m)-$semiinelului A, chiar dacă I este ideal al lui S. Pentru a demonstra urmă toarea Lemă, fără a restrânge generalitatea, vom folosi notaţia $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ în loc de $(a_1^n)_+$, respectiv $\sum\limits_{i=k}^{p} a_i$ în locul secvenţei $a_k, a_{k+1},\ldots,a_p$ of $(a_1^n)_+$.
De asemenea, în scrierea produselor lungi (adică produse având $p \equiv 1\ mod(m-1)$ factori), respectiv sumele lungi (adică sume având $p \equiv 1\ mod(n-1)$ termeni) vom omite parantezele suplimentare (cu alte cuvinte simbolurile $\sum$).

Lema 2.5.1. (**Adina Pop**[89]) *Fie $(n,m)-$semiinelul comutativ $(S,\sum,(\ )_\circ)$. Atunci pentru orice $a_1^n \in S$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$, avem:*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{<k>} = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k(m-1)+1\\ 0\le k_1\le k(m-1)+1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\le k_n\le k(m-1)+1}} \frac{[k(m-1)+1]!}{k_1!\ldots k_n!}(\overset{(k_1)}{a_1},\ldots,\overset{(k_n)}{a_n})_\circ. \tag{2.18}$$

Demonstraţia o omitem deoarece ea este analoagă celei făcute în cazul $(n,m)-$inelelor comutative. (vezi [105]).

Folosind Lema 2.5.1, vom demonstra următoarea teoremă:

Teoremă 2.5.1. (**Adina Pop** [89]) *Fie $(S,\sum,(\ )_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel comutativ. Dacă I este un ideal al $(n,m)-$semiinelului S, atunci rad I este un ideal al $(n,m)-$semiinelului S .*

Demonstraţie. Dacă avem $a_1,\ldots,a_n \in \mathrm{rad}I$, atunci există $p_1,p_2,..,p_n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că
$a_i^{<p_i>} \in I$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Rezultă că există $k = p_1+p_2+\ldots+p_n+\alpha$,unde

$$\alpha = \begin{cases} \frac{n-1}{m-1} & \text{dacă } m-1 \text{ este un divizor al lui } n-1 \\ 1 + [\frac{n-1}{m-1}] & \text{altfel} \end{cases}$$

Prin urmare $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^{<k>} \in I$, şi deci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \in \text{rad } I$.

Acest lucru rezultă pe baza Lemei 2.5.1 şi faptului că în orice produs lung $(\overset{(k_1)}{a_1}, ..., \overset{(k_n)}{a_n})_\circ$ există un $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $k_{i_0} \geq p_{i_0}(m-1)+1$. Altfel, dacă $k_i < p_i(m-1)+1$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$,atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i < (\sum\limits_{i=1}^{n} p_i)(m-1)+n$, ceea ce este echivalent cu $k(n-1)+1 < (\sum\limits_{i=1}^{n} p_i)(m-1)+n$.

Rezultă că $\alpha(m-1) < n-1$ ceea ce este în contradicţie cu alegerea lui $\alpha \in \mathbb{N}$.

Dacă $r_{i_0} = k_i - p_{i_0}(m-1) - 1$, deoarece I este un ideal al lui S, vom avea

$$(\overset{(k_1)}{a_1}, ..., \overset{(k_{i_0})}{a_{i_0}}, ..., \overset{(k_n)}{a_n})_\circ = (\overset{(k_1)}{a_1}, ..., \overset{(r_{i_0})}{a_{i_0}}, a_{i_0}^{<p_{i_0}>}, ..., \overset{(k_n)}{a_n})_\circ \in I \tag{2.19}$$

şi $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i)^{<k>} \in I$. În concluzie, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \in \text{rad}I$.

Dacă $x_1, x_2, ..., x_{m-1} \in S$, şi $a \in \text{rad}I$, atunci există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a^{<k>} \in I$. Din faptul că $(n,m)-$semiinelul $(S, \sum, (\ )_\circ)$ este comutativ şi mulţimea I este ideal al lui S, vom avea $(x_1^{m-1}\, a)_\circ^{<k>} = (x_1^{<k>}, x_2^{<k>}, ..., x_{m-1}^{<k>}, a^{<k>})_\circ \in I$. În concluzie $(x_1^{m-1}, a)_\circ \in \text{rad}I$.

Aşadar, radicalul idealului I, rad$I$ este un ideal al $(n,m)-$semiinelului $(S, \sum, (\ )_\circ)$. $\square$

Această teoremă a fost investigată de G. Crombez in [24] în cazul $(n,n)-$inelelor. M. S. Pop în lucrarea [105] a arătat că proprietatea rămâne adevărată şi pentru $m \neq n$.

Este cunoscut faptul că există o corespondenţă bijectivă între mulţimea idealelor unui $(n,m)-$inel şi congruenţele acestui inel. Acest lucru nu se întâmplă şi in cazul $(n,m)-$semiinelelor, aşa cum vom vedea în cele ce urmează.

Pentru investigarea acestei afirmaţii avem nevoie de următoarele noţiuni.

Definiţie 2.5.9. Dacă A este un ideal al unui $(n,m)-$semiinel $(S, (\ )_+, (\ )_\circ)$, atunci mulţimea

$$\text{cl}A = \{x \in S \mid \text{ există } a_1, \ldots, a_{n-1} \in A \text{ asftel încât } (x\, a_1^{n-1})_+ \in A\}$$

se numeşte $k-$închiderea lui A.

Lema 2.5.2. *Fie A şi B ideale ale unui $(n,m)-$semiinel $(S, (\ )_+, (\ )_\circ)$. Atunci au loc următoarele proprietăti:*

1) cl$A$ este un ideal al lui S şi $A \subseteq$cl$A$;

2) Dacă $A \subseteq B$ atunci cl$A \subseteq$ cl$B$;

3) cl(cl$A$) =cl$A$.

Demonstraţie. 1) Pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{cl}A$, există $a_{i1}, \ldots, a_{i,n-1} \in A$ astfel încât $(x_i\, a_{i1}^{i,n-1})_+ \in A$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Folosind asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $n-$are obţinem:

$$((x_1^n)_+, (a_{11}^{n1})_+, \cdots, (a_{1,n-1}^{n,n-1})_+)_+ \;=\; ((x_1\, a_{11}^{1,n-1})_+, \ldots, (x_n\, a_{n1}^{n,n-1})_+)_+ \in A^{[1]} \subseteq A$$

şi conform definiţiei de mai sus rezultă că $(x_1^n)_+ \in \mathrm{cl}A$.
Deasemenea, deoarece A este un ideal, oricare ar fi $s_1, \ldots, s_m \in S,\ x \in \mathrm{cl}A$ şi $i \in \{1, ..., n\}$ există $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ cu proprietatea $(x\, a_1^{n-1})_+ \in A$ şi $(s_1^{i-1}\, a_j\, s_{i+1}^m)_\circ \in A$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Dar

$$\big((s_1^{i-1} x\, s_{i+1}^m)_\circ, (s_1^{i-1} a_1\, s_{i+1}^m)_\circ, \ldots, (s_1^{i-1} a_{n-1}\, s_{i+1}^m)_\circ\big)_+ =$$

$$= (s_1^{i-1}, (x\, a_1^{n-1})_+\, s_{i+1}^m)_\circ \in A.$$

Prin urmare, rezultă că $(s_1^{i-1}\, x\, s_{i+1}^m)_\circ \in \mathrm{cl}A$ şi deci $\mathrm{cl}A$ este un ideal al lui S.
Deoarece $A^{[1]} \subseteq A$ vom avea şi $A \subseteq \mathrm{cl}A$.

2) Dacă $A \subseteq B$ şi $x \in \mathrm{cl}A$ rezultă că există $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A \subseteq B$ astfel încât $(x a_1^{n-1})_+ \in A \subseteq B$, prin urmare $x \in \mathrm{cl}B$.

3) Având în vedere punctul 2) incluziunea $A \subseteq \mathrm{cl}A$ ne conduce la $\mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$.
Dacă $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$, atunci există $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathrm{cl}A$ cu proprietatea că $\big(x\, x_1^{n-1}\big)_+ \in \mathrm{cl}A$. Conform definiţiei 2.5.9 există $y_1, \ldots y_{n-1} \in A$ şi $y_{i1}, ..., y_{i,n-1} \in A$ astfel încât $(x_i\, y_{i1}^{i,n-1})_+ \in A$ oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ şi $z = \big((x\, x_1^{n-1})_+, y_1^{n-1}\big)_+ \in A$. Atunci, datorită asociativităţii şi comutativităţii operaţiei $n-$are rezultă că

$$\big((...(z\, y_{11}^{1,n-1})_+ ...)_+ y_{n-1,1}^{n-1,n-1}\big)_+ = \big(x(y_1^{n-1}(x_1\, y_{11}^{1,n-1})_+, ..., (x_{n-1}\, y_{n-1,1}^{n-1,n-1})_+)_+\big)_+ \in A$$

şi prin urmare $x \in \mathrm{cl}A$.
Aşadar am arătat că $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}A$ şi în concluzie $\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$. □

Definiţie 2.5.10. Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$semiinel. Dacă $A = \mathrm{cl}A$, atunci idealul A se numeşte *ideal subtractiv, $k-$închis* sau *$k-$ideal* al lui S. Evindent $k-$închiderea idealului A,$\mathrm{cl}A$, este întotdeauna un $k-$ideal.

O definiţie echivalentă a idealului subtractiv, dată de Z. Yongwen în lucrarea [138] este următoarea:

Definiţie 2.5.11. [138] Dacă $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m-)$semiinel, atunci idealul A al lui S este un ideal subtractiv dacă $a_2, \ldots a_n \in A$ şi $(a_1^n)_+ \in A$ implică $a_1 \in A$.

În continuare vom da câteva exemple de ideale, respectiv ideale subtractive.

Exemplul 2.5.1. Fie semiinelul $(\mathbb{N}^*, +, \cdot)$ unde $N^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Mulţimea $\mathbb{N}^*$ împreună cu extinderea n-ară a adunării şi extinderea m-ară a înmulţirii

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k_1 + \ldots + k_n; \ \prod_{j=1}^{m} k_j = k_1 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

formează un $(n, m)-$semiinel comutativ, notat $\left(\mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n}, \prod\limits_{j=1}^{m}\right)$ şi îl vom numi $(n, m)-$semiinelul derivat din semiinelul $(\mathbb{N}^*, +, \cdot)$.
Orice sub-n-semigrup al $n-$semigrupului comutativ $(\mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n})$ de forma $k\mathbb{N}^*$ este un ideal al acestui $(n, m)-$semiinel. De asemenea , pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ submulţimea $k\mathbb{N}^*$; $k \in \mathbb{N}^*$ este ideal subtractiv al $(n, m)-$semiinelulului comutativ $\left(\mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n}, \prod\limits_{j=1}^{m}\right)$.
Submulţimile $A_b = \{a \in \mathbb{N}^*; a \geq b\}$, unde $b, \in \mathbb{N}^*$ şi $A_{k,b} = k\mathbb{N}^* \cap A_b$ sunt alte exemple de ideale în acelaşi $(n, m)-$semiinel dar nu sunt ideale subtractive.
$\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ este ideal dar nu ideal subtractiv al $(n, m)-$semiinelului derivat.
Mulţimea idealelor $(n, m)-$semiinelului $\left(\mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n}, \prod\limits_{j=1}^{m}\right)$ nu este epuizată de aceste tipuri de ideale.

Exemplul 2.5.2. Fie $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ înzestrată cu două operaţii, una $n-$ară aditivă, respectiv binară multiplicativă, definite după cum urmează

$$(\,)_+ : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}; \ (k_1^n)_+ = k_1 + \ldots + k_n + 1$$

respectiv

$$* : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}; \ k_1 * k_2 = (n-1)k_1k_2 + k_1 + k_2.$$

Tripletul $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$ este un $(n, 2)-$semiinel commutativ, cu element neutru multiplicativ 0. Sub-n-semigrupul ciclic al $n-$semigrupului aditiv $(\mathbb{N}, (\,)_+)$ generat de $k \in \mathbb{N}$ este $\{k^{[p]}; p \in \mathbb{N}\}$, unde $k^{[p]} = (n-1)kp + k + p = k * p$; $p \in \mathbb{N}$. Acest sub-n-semigrup îl vom nota $k * \mathbb{N}$. Deoarece $x * y = (k * p) * y = k * (p * y) \in k * \mathbb{N}$ oricare ar fi $x \in k * \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{N}$, mulţimea $k*\mathbb{N} = [kn-(k-1)]\mathbb{N}+k$ este un ideal al $(n, 2)-$semiinelului $(\mathbb{N},(\,)_+, *)$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ fixat. Observăm că $0 * \mathbb{N} = \mathbb{N}$; $1 * \mathbb{N} = n\mathbb{N} + 1$; $2 * \mathbb{N} = (2n-1)\mathbb{N} + 2$; $3 * \mathbb{N} = (3n-2)\mathbb{N} + 3$; şi aşa mai departe.
Mulţimea $(n-2)\mathbb{N}^* - 1$, $n \geq 3$ este de asemenea, ideal al $(n, 2)-$semiinelului $\mathbb{N}$care nu derivă din cele de tipul $k * \mathbb{N}$.
Şi în acest caz $A_b = \{a \in \mathbb{N}^*; a \geq b\}$ este un ideal al $(n, 2)-$semiinelului $(\mathbb{N},(\,)_+, *)$

Exemplul 2.5.3. Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ înzestrată cu operaţiile definite în Exemplul 2.5.2 , $(\mathbb{Z}, (\,)_+, *)$ este un $(n, 2)-$inel, iar $k * \mathbb{Z}$; oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ fixat este

un ideal al $(n, 2)-$ inelului $(\mathbb{Z}, (\,)_+, *)$.
Remarcăm faptul că, în acest caz $(n-2)\mathbb{Z} - 1 = (-1) * \mathbb{Z}$.

Exemplul 2.5.4. Dacă considerăm $(n, m)-$semiinelul $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ definit în Exemplul 2.1.8, operaţia $n-$ară fiind aceeaşi cu cea definită în Exemplul 2.5.2, idealele acestui $(n, m)-$semiinel coincid cu idealele $(n, 2)-$semiinelului $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$, adică $k * \mathbb{N}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ şi $(n-2)\mathbb{N}^* - 1$, unde $n \geq 3$.

Exemplul 2.5.5. Fie mulţimea claselor de resturi modulo 2, $\mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ pe care definim o operaţie ternară aditivă,

$$(\,)_+ : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2;\ (x_1, x_2, x_3)_+ = x_1 + x_2 + x_3 + \widehat{1}$$

şi o operaţie mutiplicativă

$$(\,)_\circ : \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2;\ (x_1, x_2, x_3, x_4)_\circ = x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Tripletul $(\mathbb{Z}_2, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(3, 4)-$corp comutativ fără idempotenţi aditivi, deci $\mathrm{Ida}(\mathbb{Z}_2) = \emptyset$ şi care are un singur idempotent multiplicativ, adică $\mathrm{Idm}(\mathbb{Z}_2) = \{\widehat{0}\}$. Acest $(3, 4)-$corp nu are ideale proprii.
Dacă considerăm tripletul $(\mathbb{Z}_2, (\,)_*, (\,)_\circ)$ în care înlocuim operaţia ternară aditivă cu operaţia ternară definită astfel $(x_1, x_2, x_3)_* = x_1 + x_2 + x_3$, iar operaţia multiplicativă $(\,)_\circ$ rămâne aceeasi obţinem tot un $(3, 4)-$corp comutativ, $\mathrm{Ida}(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ (care sunt şi elemente neutre aditive), $\mathrm{Idm}(\mathbb{Z}_2) = \{\widehat{0}\}$, dar acesta nu este element zero al $(3, 4)-$inelului $(\mathbb{Z}_2, (\,)_*, (\,)_\circ)$. Mulţimea $\{\widehat{0}\}$ este un sub-$(3, 4)$-inel dar nu este un ideal al $(3, 4)-$inelului $\mathbb{Z}_2$ mai sus definit.

Exemplul 2.5.6. (**Adina Pop** [89]) Fie mulţimea $S = \{a, b, c\}$ înzestrată cu operaţia binară $+ : S^2 \to S$, definită astfel:

$$x + a = a + x = x,\ x + c = c + x = c \ \text{ oricare ar fi } x \in S \text{ şi} b + b = a$$

şi operaţia ternară $(\,)_\circ : S^3 \to S$ definită după cum urmează

$$(x_1, x_2, x_3)_\circ = \begin{cases} c \text{ dacă } x_1 = x_2 = x_3 = c \\ a \text{ dacă există } x_i \neq c \end{cases}$$

Tripletul $(S, +, (\,)_\circ)$ este un $(2, 3)-$semiinel comutativ, unde $\mathrm{Ida}(S) = \mathrm{Idm}(S) = \{a, c\}$, iar a este element zero al acestui $(2, 3)-$semiinel. Mulţimile $\{a\}; \{a, c\}; \{a, b\}$ şi S sunt ideale ale $(2, 3)-$semiinelui S. Deoarece $\mathrm{cl}\{a\} = \{a\}$; $\mathrm{cl}\{a, b\} = \{a, b\}$ dar $\mathrm{cl}\{a, c\} = S$, rezultă că $\{a\}$ şi $\{a, b\}$ sunt ideale subtractive proprii ale lui S.

Exemplul 2.5.7. Dacă considerăm mulţimea tuturor întregilor negativi împreună cu 0, notată $\mathbb{Z}_0^-$, atunci tripletul $\mathbb{Z}_0^-$ împreună cu adunarea obişnuită şi operaţia $(2m+1)-$mutiplicativă

$$(\,)_\circ : {\mathbb{Z}_0^-}^{2m+1} \to \mathbb{Z}_0^-;\ (x_1^{2m+1})_\circ = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m+1}$$

, formează un $(2, 2m+1)-$semiinel comutativ cu element zero, 0 şi un element neutru multiplicativ -1.
Dacă $m = 1$ obţinem $(2, 3)-$semiinelul aşa numit " semiinelul ternar " definit şi investigat de Kar S [71].
Submulţimile $k\mathbb{Z}_0^-$; unde $k \in \mathbb{N}$ sunt ideale subtractive ale $(2, 2m+1)-$semiinelului $\mathbb{Z}_0^-$.

Exemplul 2.5.8. Fie mulţimea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ cu operaţiile $(\,)_+ : A^3 \to A$, $\circ : A^2 \to A$ definite astfel:

$$(a_1^3)_+ = \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 & \text{dacă } a_1 + a_2 + a_3 \leq 3 \\ r \equiv a_1 + a_2 + a_3 (\bmod 2);\ 2 \leq r < 4 & \text{dacă } a_1 + a_2 + a_3 \geq 4. \end{cases}$$

$$a_1 \circ a_2 = \begin{cases} a_1 \cdot a_2 & \text{dacă } a_1 \cdot a_2 \leq 3 \\ r \equiv a_1 \cdot a_2 (\bmod 2);\ 2 \leq r < 4 & \text{dacă } a_1 \cdot a_2 \geq 4. \end{cases}$$

Tripletul $(A, (\,)_+, \circ)$ este un $(3, 2)-$semiinel comutativ cu element zero, 0, şi cu element neutru multiplicativ (unitate) 1.
Mulţimea idempotenţilor aditivi $\mathrm{Ida}(A) = \{0, 2, 3\}$ este un ideal al $(3, 2)-$semiinelui A, dar nu este un ideal subtractiv deoarece $\mathrm{cl}\{0, 2, 3\} = S \neq \mathrm{Ida}(A)$.

Acest exemplu este o particularizare pentru $k = 4$ şi $i = 2$ a Exemplului 2.1.3.

Observaţie 2.5.2. Mulţimea $\mathrm{Ida}(S)$, în general, nu este ideal subtractiv. Într-adevăr, acest lucru se observă în Exemplul 2.5.6,unde $\mathrm{Ida}(S) = \{a, c\}$, iar $\mathrm{cl}\{a, c\} = S$ şi Exemplul 2.5.8.

Propoziţie 2.5.4. *Fie un $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, U un sub-(n, m)-semiinel S şi A un ideal al lui S. Atunci:*

i) $U \cap A$ este mulţimea vidă sau $U \cap A$ este un ideal al $(n, m)-$ semiinelului $(U, (\,)_+, (\,)_\circ)$.

ii) Dacă A este un $k-$ideal, atunci $U \cap A$ este un $k-$ ideal sau mulţimea vidă.

Demonstraţie. i) Presupunem că $U \cap A \neq \varnothing$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in U \cap A$, deoarece $(U, (\,)_+)$ şi $(A, (\,)_+)$ sunt, în particular sub-n-semigrupuri ale lui S rezultă că $(x_1^n)_+ \in U \cap A$.

Fie $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots u_m \in U$ şi $x \in U \cap A$. Deoarece $(U, (\,)_\circ)$ este un sub-n-semigrup rezultă că $(u_1^{i-1}\, x\, u_{i+1}^m) \in U$.
Deoarece A este un ideal al $(n, m)-$ semiinelului S şi $U \subseteq S$ deducem că $(u_1^{i-1}\, x\, u_{i+1}^m)_\circ \in A$ şi în concluzie $(u_1^{i-1} x\, u_{i+1}^m)_\circ \in U \cap A$.

ii) Presupunem că $U \cap A = \varnothing$. Fie elementele $y_2, ..., y_m \in U \cap A$, şi $x \in U$ cu proprietatea că $(x\, y_2^m)_+ \in U \cap A$. Deoarece A este un $k-$ ideal, rezultă că $x \in A$. În concluzie $x \in U \cap A$ ceea ce ne arată că $U \cap A$ este un $k-$ideal al $(n, m)-$ semiinelului U. $\square$

Observaţie 2.5.3. Idealul $A \cup B \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} (\overset{(i)}{A}, \overset{(n-i)}{B})_+$ nu este în general $k-$închis.
Într-adevăr, dacă considerăm Exemplul 2.5.1, submulţimile $2\mathbb{N}^*$, $3\mathbb{N}^*$ sunt ideale subtractive, dar $2\mathbb{N}^* \cup 3\mathbb{N}^* \cup (\overset{(i)}{2\mathbb{N}^*}, \overset{(n-i)}{3\mathbb{N}^*})_+ = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ nu este ideal subtractiv.

Lema 2.5.3. *Fie $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n, m)-$inel. Atunci un ideal A al $(n, m)-$semiinelului R este un ideal al $(n, m)-$inelului R dacă şi numai dacă A este ideal subtractiv.*

Demonstraţie. Dacă mulţimea A este un ideal al $(n, m)-$inelului R, atunci oricare ar fi $x \in \mathrm{cl}A$ există $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(x a_1^{n-1})_+ = a_n \in A$. Deoarece $(A, (\,)_+)$ este un $n-$grup, rezultă că ecuaţia are o unică soluţie în A, adică $x \in A$.
Prin urmare $\mathrm{cl}A \subseteq A$ şi în concluzie $\mathrm{cl}A = A$.

Reciproc, fie A un ideal subtractiv în $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$, privit ca $(n, m)-$semiinel. Atunci oricare ar fi $x \in A$ =cl$A$, există transversala lui x, şi $\overline{x} \in R$. Deoarece $\overline{x}$ verifică relaţia

$$\left(\overline{x} \overset{(n-1)}{x}\right)_+ = x \in A,$$

atunci, conform Definiţiei 2.5.9 $\overline{x}$ $\in$cl$A = A$ .Rezultă că perechea $(A, (\ )_+)$ este un sub$-n-$grup al lui $(R, (\,)_+)$, . În concluzie A este un ideal de $(n, m)-$inel.
Prin urmare, conceptul de ideal subtractiv într-un $(n, m)-$inel este superfluu. $\square$

Propoziţie 2.5.5. *Dacă tripletul $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$ inel, submulţimea A este un ideal al $(n, m)-$semiineluilui R, atunci clA este un ideal de $(n, m)-$inel.*

Demonstraţie. Conform Lemei 2.5.2 rezultă că cl$A$ este un ideal subtractiv .Atunci, conform Lemei 2.5.3, rezultă că cl$A$ este un ideal de $(n, m)-$inel. $\square$

Demonstraţie. Let A be an ideal în $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ privit ca $(n, m)-$semiinel. Atunci $\overline{e} \in R$ şi pentru orice $a \in A$, tinând seama de regulile de calcul în $(n, m)-$inele, vom avea $\overline{a} = \overline{(a, \overset{(m-1)}{e})_\circ} = (a, \overline{e}, \overset{(m-2)}{e})_\circ \in A$, ceea ce ne arată că. $(A, (\,)_+, ^-)$ este un sub-n-grup al lui $(R, (\,)_+)$. $\square$

Cu ajutorul acestor leme vom demonstra următoarea teoremă:

Teoremă 2.5.2. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel şi A un ideal al lui $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$.*
1. Relaţia definită astfel:

$$s \, \rho_A \, s' \Leftrightarrow \exists a_1, \ldots, a_{n-1}, a_1^{'}, \ldots, a_{n-1}^{'} \in A \text{ astfel încât } (s \, a_1^{n-1})_+ = (s' \, a_1'^{n-1})_+$$

defineşte o congruenţă ρ_A pe S. În particular $a \, \rho_A \, a'$ pentru orice $a, a' \in A$. Congruenţa ρ_A generalizează aşa numita congruenţă Bourne definită pe semiinelele obişnuite.

2. Dacă $a \in A$, atunci clasa rest în raport cu congruenţa ρ_A, $[a]_{\rho_A}$ este un ideal al semiinelului $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şiîn plus $[a]_{\rho_A}$ =clA.

Mulţimea claselor de congruenţă $S/\rho_A = \{[a]_{\rho_A}; a \in S\}$ este un $(n,m)-$semiinel $(S/\rho_A, (\,)_+, (\,)_\circ)$ cu element zero, clA.

3. Mai mult decât atât, congruenţa $\rho_{clA} = \rho_A$ şi

$$\rho_{clA} = \rho_{clB} \Leftrightarrow clA = clB.$$

Demonstraţie. Relaţia ρ_A definită pe S este evident reflexivă şi simetrică.
În continuare, vom arăta că relaţia ρ_A este şi tranzitivă.
Dacă $s \, \rho_A \, s'$ şi $s' \, \rho_A \, s''$, atunci

$$(s \, a_1^{n-1})_+ = (s' \, a_1'^{n-1})_+ \text{şi} (s' \, b_1^{n-1})_+ = (s'' \, b_1'^{n-1})_+$$

unde $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_1', \ldots, a_{n-1}', \, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_1', \ldots, b_{n-1}' \in A$.

Folosind comutativitatea şi asociativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$" vom avea

$$\begin{aligned} ((s \, a_1^{n-1})_+, b_1^{n-1})_+ &= ((s' a_1'^{n-1})_+, b_1^{n-1})_+ = (s' b_1^{n-1})_+, a_1'^{n-1})_+ \\ &= ((s'' b_1'^{n-1})_+, a_1'^{n-1})_+ \end{aligned}$$

Dacă aplicăm încă o dată asociativiatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", obţinem

$$(s, (a_1^{n-1} b_1)_+, b_2^{n-1})_+ = (s'', (b_1'^{n-1} a_1')_+, a_2'^{n-1})_+.$$

Deoarece

$$(\, a_1^{n-1} b_1)_+, b_2, \ldots, b_{n-1}, (b_1'^{n-1} a_1')_+, a_2', \ldots, a_{n-1}' \in A.$$

rezultă că $s \, \rho_A \, s''$ şi în concluzie ρ_A este o relaţie de echivalenţă.

Dacă $s_i\,\rho_A\,s'_i$; $i \in \{1,\ldots,p\}$ şi p =max(n,m), atunci există $a_{ij}, a'_{ij} \in A$ astfel încât $(s_i\,a_{i1}^{i,n-1})_+ = (s'_i\,a'^{i,n-1}_{i1})_+$ unde $i \in \{1,...,p\},\ j \in \{1,...,n-1\}$.

Deoarece $A^{[1]} \subseteq A$ şi datorită asociativităţii şi comutativităţii operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", vom avea

$$((s_1^n)_+, (a_{11}^{n1})_+, \ldots (a_{1,n-1}^{n,n-1})_+)_+ = ((s_1'^m)_+, (a'^{n1}_{11}), \ldots, (a'^{n,n-1}_{1,n-1})_+)_+,$$

ceea ce ne arată că relaţia de echivalenţă ρ_A este compatibilă cu operaţia $n-$ară aditivă "$(\,)_+$", deci $(s_1^n)_+\,\rho_A\,(s_1'^m)_+$.

Deoarece $(s_1\,a_{11}^{1,n-1})_+ = (s'_1\,a'_{11}{}^{1,n-1})_+$ rezultă că

$$((s_1 a_{11}^{1,n-1})_+, s_2^m)_\circ = ((s'_1 a'^{1,n-1}_{11})_+, s_2^m)_\circ.$$

Folosind distributivitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$", vom obţine

$$((s_1^m)_\circ, (a_{11} s_2^m)_\circ, \ldots, (a_{1,n-1} s_2^m)_\circ)_+ = ((s'_1 s_2^m)_\circ, (a'_{11} s_2^m)_\circ, \ldots, (a'_{1,n-1} s_2^m)_\circ)_+.$$

Din faptul că A este un ideal al $(n,m)-$semiinelului S, rezultă că $(a_{1j} s_2^m)_\circ, (a'_{1j} s_2^m)_\circ \in A$ pentru orice $j \in \{1,...,n-1\}$, ceea ce ne conduce la $(s_1^m)_\circ \rho_A\,(s'_1 s_2^m)_\circ$.
Analog, din faptul că $s_2 \rho_A s'_2$ resultă că $(s'_1 s_2 s_3^m)_\circ \rho_A (s'_1 s'_2 s_3^m)_\circ$ şi aşa mai departe.
Din $s_m\,\rho_A\,s'_m$ obţinem că $(s'_1 \ldots s'_{m-1}\,s_m)_\circ\,\rho_A\,(s'_1 \ldots s'_{m-1}\,s'_m)_\circ$.
Datorită tranzitivităţii relaţiei ρ_A vom avea $(s_1^m)_\circ \rho_A (s_1'^m)_\circ$, adică relaţia de echivalenţă ρ_A este compatibilă cu operaţia $m-$ară multiplicativă "$(\,)_\circ$".

Notăm cu S/ρ_A mulţimea tuturor claselor de congruenţă, adică $S/\rho_A = \{[s]_{\rho_A}; s \in S\}$. Datorită comutativităţii operaţiei $n-$are "$(\,)_+$" vom avea $(a \overset{(n-2)}{a} a')_+ = (a' \overset{(n-2)}{a} a)_+$, pentru orice $a,\ a' \in A$, adică $a\,\rho_A\,a'$.

2) Considerăm un element $a \in A$ şi clasa de congruenţă cu reprezentantul a, adică $[a]_{\rho_A}$. Este evident că $A \subseteq [a]_{\rho_A}$. În continuare vrem să arătăm că $[a]_{\rho_A}$ =cl$A$. Într-adevăr, dacă alegem un element $x \in [a]_{\rho_A}$, atunci $a\,\rho_A\,x$ ceea ce este echivalent cu faptul că există $a_2, \ldots, a_n, a'_2, \ldots, a'_n \in A$ astfel încât $(a\,a_2^n)_+ = (x\,a_2'^n)_+$.
Deoarece $(a\,a_2^n)_+ \in A$ implică $(x\,a_2'^n)_+ \in A$, rezultă că $x \in$cl$A$ şi $[a]_{\rho_A} \subseteq$ cl$A$.

Reciproc, dacă $x \in$ cl$A$ atunci există elementele $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $a_n = (x\,a_1^{n-1})_+ \in A$.

Adăugând un element oarecare $a \in A$, obţinem

$$(a \overset{(n-2)}{a} a_n)_+ = (x, (a_1^{n-1} a)_+, \overset{(n-2)}{a})_+.$$

Deoarece $(a_1^{n-1}\,a)_+ \in A$, rezultă că $a\,\rho_A\,x$, adică $x \in [a]_{\rho_A}$ şi cl$A \subseteq [a]_{\rho_A}$. Prin urmare $[a]_{\rho_A}$ =cl$A$.

Pe mulţimea claselor de congruenţă S/ρ_A definim două operaţii

$$([s_1]_{\rho_A}, \ldots, [s_n]_{\rho_A})_+ = [(s_1^n)_+]_{\rho_A}$$

şi

$$([s_1]_{\rho_A}, \ldots, [s_m]_{\rho_A})_\circ = [(s_1^m)_\circ]_{\rho_A}.$$

Se verifică uşor că operaţiile sunt bine definite, adică nu depind de alegerea reprezentanţilor. În plus, $(S/\rho_A, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$semiinel cu element zero şi anume $[a]_{\rho_A}$ =cl$A$.

Într-adevăr, deoarece pentru orice $a \in A$ şi $s \in S$ avem

$$((s \overset{(n-1)}{a})_+ \overset{(n-1)}{a})_+ = (s\, a^{[1]} \overset{(n-2)}{a})_+,$$

ceea ce este echivalent cu $(s \overset{(n-1)}{a})_+ \, \rho_A \, s$ rezultă că $([s]_{\rho_A} \overset{(n-1)}{[a]}_{\rho_A})_+ = [s]_{\rho_A}$ adică $[a]_{\rho_A}$ este un element neutru aditiv.
Mai mult, el este element zero în S/ρ_A deoarece din $(s_1^{i-1}\, a\, s_{i+1}^m)_\circ \in A$, oricare ar fi $s_1, \ldots, s_m \in S$ şi $a \in A$, obţinem

$$[(s_1^{i-1}\, a\, s_{i+1}^m)_\circ]_{\rho_A} = ([s_1]_{\rho_A} \ldots [s_{i-1}]_{\rho_A} [a]_{\rho_A} [s_{i+1}]_{\rho_A} \ldots [s_m]_{\rho_A})_\circ = [a]_{\rho_A}$$

3) Deoarece $A \subseteq$ cl$A$, tinând seama de definiţia relaţiei ρ_A rezultă că $\rho_A \subsetneq \rho_{\mathrm{cl}A}$. Pentru a arăta că $\rho_{\mathrm{cl}A} \subseteq \rho_A$, presupunem că $s\, \rho_{\mathrm{cl}A}\, s'$ unde $s, s' \in S$. Rezultă că există $a_i, a_i' \in$ cl$A$ cu proprietatea că $(s\, a_1^{n-1})_+ = (s'\, a_1'^{n-1})_+$. Deoarece $a_i, a_i' \in$ cl$A$ rezultă, conform Definiţiei 2.5.9 că există $b_{i1}', \ldots, b_{i,n-1}' \in A$, respectiv $b_{i1}', \ldots, b_{i,n-1}' \in A$; astfel încât $(a_i\, b_{i1}^{i,n-1})_+ \in A$ şi $(a_i' b_{i1}'^{i,n-1})_+ \in A$ oricare ar fi $i \in \{1, \ldots, n-1\}$Vom avea

$$\begin{aligned}
&((...(((\ldots((s\, a_1^{n-1})_+, b_{11}^{1,n-1})_+ \ldots)_+, b_{n-1,1}^{n-1,n-1})_+, b_{11}'^{1,n-1})_+ \ldots)_+, b_{n-1,1}'^{n-1,n-1})_+ \\
= &((...(((\ldots((s'\, a_1'^{n-1})_+, b_{11}'^{1,n-1})_+ \ldots)_+ b_{n-1,1}'^{n-1,n-1})_+, b_{11}^{1,n-1})_+ \ldots)_+, b_{n-1,1}^{n-1,n-1})_+.
\end{aligned}$$

Folosind asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", obţinem

$$\begin{aligned}
&(s, ((a_1\, b_{11}^{1,n-1})_+, b_{11}'^{1,n-1})_+, \ldots, ((a_{n-1}\, b_{n-1,1}^{n-1,n-1})_+, b_{n-1,1}'^{n-1,n-1})_+)_+ \\
= &(s', ((a_1'\, b_{11}'^{1,n-1})_+, b_{11}^{1,n-1})_+, \ldots, ((a_{n-1}'\, b_{n-1,1}'^{n-1,n-1})_+, b_{n-1,1}^{n-1,n-1})_+)_+
\end{aligned}$$

Deoarece

$$((a_i\, b_{i1}^{i,n-1})_+, b_{i1}'^{i,n-1})_+, ((a_i'\, b_{i1}'^{i,n-1})_+, b_{i1}^{i,n-1})_+ \in A$$

oricare ar fi $i = 1, \ldots, n-1$ rezultă că $s\, \rho_A\, s'$ şi deci $\rho_{\mathrm{cl}A} \subseteq \rho_A$.

Fie $\rho_{\mathrm{cl}A} = \rho_{\mathrm{cl}B}$.
Atunci $(S/\rho_{clA}, (\,)_+, (\,)_\circ) = (S/\rho_{\mathrm{cl}B}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi atât cl$A$ cât şi cl$B$ conţin elementele din S care formeză clasa zero, ceea ce ne conduce la cl$A$ =cl$B$. $\square$

Lema 2.5.2 respectiv Teorema 2.5.2 ne arată că definiţia congruenţei unui $(n, m)-$semiinel determinată de un ideal al semiinelului reprezintă o generalizare a noţiunii de congruenţă definită în cazul unui $(n, m)-$inel cu ajutorul unui ideal de inel.

Observăm că în cazul $(n, m)-$semiinelelor, clasele de congruenţă $[s]_{\rho_A}$ nu sunt neapărat egale cu $(s \overset{(n-1)}{A})_+$, dar cu siguranţă conţin aceste clase.

Exemplul 2.5.9. Pe mulţimea $\mathbb{N}$ definim operaţia ternară

$$(\,)_+ : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N};\ (k_1^3)_+ = k_1 + k_2 + k_3 + 1$$

şi operaţia binară

$$k * l = 2kl + k + l$$

. Tripletul $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$ ete un $(3, 2)$-semiinel comutativ, fără element neutru aditiv care are element neutru multiplicatv şi anume pe 0.

Submulţimea $A = 2 * \mathbb{N} = 5\mathbb{N} + 2 = \{2, 7, 12, 17, \dots\}$ este un ideal subtractiv al acestui $(3, 2)$-semiinel. Relaţia de congruenţă relativ la idealul A, ρ_A ete definită astfel

$$x\rho_A y \Leftrightarrow (\exists)k_1, k_2, l_1, l_2 \in A \text{ astfel încât } (x\, k_1\, k_2)_+ = (y\, l_1\, l_2)_+ \Leftrightarrow x + 5k = y + 5l$$

unde $k = k_1 + k_2$, respectiv $l = l_1 + l_2$.

Rezultă că $x - y \in 5\mathbb{N}$ sau $y - x \in 5\mathbb{N}$ după cum $x \geq y$, respectiv $y \geq x$.

Se verifică uşor că în raport cu această relaţie de congruenţă ρ_A clase de congruenţă vor fi

$$[0]_{\rho_A} = 5\mathbb{N};\ [1]_{\rho_A} = 5\mathbb{N} + 1\,;\, [2]_{\rho_A} = 5\mathbb{N} + 2\,;\, [3]_{\rho_A} = 5\mathbb{N} + 3\, [4]_{\rho_A} = 5\mathbb{N} + 4.$$

Mulţimea factor

$$\mathbb{N}/\rho_A = \{5\mathbb{N} = \hat{0}, 5\mathbb{N} + 1 = \hat{1}, 5\mathbb{N} + 2 = \hat{2}, 5\mathbb{N} + 3 = \hat{3}, 5\mathbb{N} + 4 = \hat{4}\}$$

este un $(3, 2)$-inel în raport cu operaţia ternară

$$(\,)_+ : \mathbb{N}/{\rho_A}^2 \to \mathbb{N}/\rho_A;\ (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} + \hat{1}$$

iar operaţia multiplicativă

$$(\,)_* : \mathbb{N}^2_{/\rho_A} \to \mathbb{N}_{/\rho_A};\ \hat{x} * \hat{y} = 2\hat{x}\hat{y} + \hat{x} + \hat{y}.$$

Acest $(3, 2)$-inel are element neutru aditiv care este şi element zero şi anume pe $A = \hat{2}$ şi cu unitate multiplicativa $\hat{0}$.

Oricare ar fi $\hat{x} \in \mathbb{N}_{/\rho_A}$, există elementul transversal $\bar{\hat{x}}$ şi anume $\bar{\hat{0}} = \hat{4}$; $\bar{\hat{1}} = \hat{3}$; $\bar{\hat{2}} = \hat{2}$; $\bar{\hat{2}} = \hat{1}$; $\bar{\hat{4}} = \hat{0}$.

Dacă considerăm clasa de congruenţă

$$[0]_{\rho_A} = \{x \in \mathbb{N};\, 0\rho_A x\} = 5\mathbb{N} = \{0, 5, 10, 15, \ldots\},$$

şi

$$(0AA)_+ = 5\mathbb{N} + 5 = \{5, 10, 15, \ldots\}$$

observăm că $(0AA)_+ \subseteq [0]_{\rho_A}$.

Analog, se observă că

$(1AA)_+ = 5\mathbb{N} + 6 = \{6, 11, 16, \ldots\} \subseteq [1]_{\rho_A}$

$(2AA)_+ = 5\mathbb{N} + 7 \subseteq [2]_{\rho_A}$

$(3AA)_+ = 5\mathbb{N} + 8 \subseteq [3]_{\rho_A}$

$(4AA)_+ = 5\mathbb{N} + 9 \subseteq [4]_{\rho_A}$

2.6 Ideale de partiţionare

Atunci când se studiază ideale în semiinele este natural să considerăm semiinelul factor în raport cu un ideal al semiinelului. Se ştie că, dacă I este un ideal al unui semiinel S colecţia $\{q + I | q \in S\}$ de mulţimi $q + I = \{q + i | i \in I\}$ nu este, în general o parţiţie a lui S. În 1969, P.J. Allen a introdus noţiunea de $Q-$ideal şi a prezentat construcţia semiinelului factor în raport cu un $Q-$ideal. Studiul lor a fost continuat de D.R. Latorre [76] şi de alţii. În cazul semiinelelor ternare ($(2, 3)-$semiinele) Kar [71] ¸ Chaudhari şi si Ingale [19] au continuat studiul $Q-$idealelor.

În acest paragraf vom generaliza unele proprietăţi din cazul binar. Precizăm că, spre deosebire de lucrările lui Kar [71] ¸ Chaudhari şi si Ingale [19], în care operaţia aditivă este binară, cu element zero absorbant, noi am demonstrat teoreme analoage în condiţii mai puţin restrictive şi anume pentru $(n, m)-$semiinele , cu reducere şi care au cel puţin un idempotent aditiv. rezultatele şi exemplele prezentate în acest paragraf sunt contribuţii personale ale autorului.

Definiţie 2.6.1. Un ideal A al unui $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte $Q-$*ideal*, dacă există o submulţime nevidă Q a lui S cu proprietatea că mulţimea $S_{Q(A)} = \{(q\overset{(n-1)}{A})_+; q \in Q\}$ este o partiţionare a lui S în submulţimi disjuncte , adică :

1) $S = \bigcup\limits_{q \in Q} (q\overset{(n-1)}{A})_+$;

2) Dacă $q_1, q_2 \in Q$ atunci $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \bigcap (q_2 \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $q_1 = q_2$.

Exemplul 2.6.1. În $(2,3)-$semiinelul S din Exemplul 2.5.6, mulţimea $A = \{a, b\}$ este un $Q-$ideal, unde putem alege mulţimea $Q = \{a, c\}$ sau $Q = \{b, c\}$. Dacă $A = \{a\}$, atunci idealul A este un $S-$ideal. Dacă mulţimea $A = \{a, c\}$, atunni ea nu este un $Q-$ideal.

Exemplul 2.6.2. Fie $(S, \leq)$ o mulţime nevidă bine ordonată, unde 0 este cel mai mic element. Pe mulţimea S definim două operaţii $(\,)_+ : S^n \to S$, respectiv $(\,)_\circ : S^m \to S$ după cum urmează

$$(a_1^n)_+ = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

şi

$$(a_1^m)_\circ = \min\{a_1, a_2, ..., a_m\}.$$

Atunci tripletul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel comutativ.
Elementul 0 este element neutru relativ la operaţia $n-$ară $(\,)_+$ şi totodată element zero . Pentru orice $r \in S$, mulţimea $A_r = \{x \in S; x \leq r\}$ este un ideal al lui S.
Deoarece

$$(x, \overset{(n-1)}{A_r})_+ = \begin{cases} A_r \text{ if } x \leq r \\ \{x\} \text{ if } x > r \end{cases}$$

atunci A_r este un $Q-$ideal unde $Q = \{0\} \cup \{x \in S; x > r\}$.

Exemplul 2.6.3. În $(n, m)-$semiinelul$\left(\mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n}, \prod\limits_{j=1}^{m}\right)$ din Exemplul 2.5.1, idealul $k\mathbb{N}^*$ este un $Q-$ideal, unde mulţimea Q este $Q = \{0, ..., k(n-1) - 1\}$.

Exemplul 2.6.4. În $(n, 2)-$semiinelul $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$ din Exemplul 2.5.2 am arătat că mulţimea $A_k = k * \mathbb{N}$ este un ideal al $(n, 2)-$semiinelului $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$ fixat. Deoarece

$$(q \overset{(n-1)}{A_k})_+ = \{(q, k * x_1, ..., k * x_{n-1})_+; x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{q + k[q(n-1) + 1](x_1 + ... + x_{n-1} + 1); x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{N}\}$$

idealul A_k nu este este un $Q-$ideal. Într-adevăr, există elemente $x \in \mathbb{N}$ şi anume $x < k(n-1)+1$, care nu aparţin nici unei clase $(q \overset{(n-1)}{A_k})_+$. Deoarece $x\, \rho_{A_k}\, y \Leftrightarrow x \equiv y(\text{mod}(n-1)k + 1)$, clasele de echivalenţă în raport cu ρ_{A_k} sunt de forma $r + [(n-1)k + 1]\mathbb{N}$ cu $r \in \{0, 1, ..., (n-1)k\}$ iar

$$\bigcup_{q \in Q} (q \overset{(n-1)}{A_k})_+ = \bigcup_{q \in Q} (q + [(n-1)k + 1]\mathbb{N}^*) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, ..., (n-1)k\}$$

În continuare vom da unele caracterizări ale idealelor de partiţionare.

Lema 2.6.1. *Fie A un $Q-$ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$. Dacă $x \in S$, atunci există un unic $q \in Q$ cu proprietatea că $(x \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$.*

Demonstraţie. Dacă $x \in S$, atunci există un $q \in Q$ cu proprietatea că $x \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$ ceea ce este echivalent cu faptul că există $a_1, ..., a_{n-1} \in A$ astfel încât $x = (q\, a_1^{n-1})_+$.
Dacă $y \in (x \overset{(n-1)}{A})_+$, atunci există $a'_1, ..., a'_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $y = (a\, a'^{n-1}_1)_+$.
Prin urmare $y = ((q\, a_1^{n-1})_+, a'^{n-1}_1)_+ = (q, (a_1^{n-1}\, a'_1)_+, a'^{n-1}_2)_+ \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$.
În concluzie $(x \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$.
Unicitatea rezultă imediat din Definiţia 2.6. □

Observaţie 2.6.1. Conform Lemei 2.6.1, dacă A este un ideal de partiţionare a unui $(n,m)-$ semiinel $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ rezultă că există o aplicaţie surjectivă $\varphi_A : S \to S_{Q(A)}$; $\varphi_A(x) = (q \overset{(n-1)}{A})_+$ cu proprietatea că $(x \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$.

Următoarea propoziţie reprezintă generalizarea Propoziţiei 7.18 a lui Golan [53].

Propoziţie 2.6.1. *Dacă A este un $Q-$ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$,atunci are loc $s\,\rho_A s' \Leftrightarrow \varphi_A(s) = \varphi_A(s') \Leftrightarrow s\, ker\varphi_a\, s'$.*

Demonstraţie. Dacă $s\,\rho_A\, s'$ atunci există elementele $a_1, \ldots, a_{n-1}$, $a'_1, \ldots, a'_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(s\, a_1^{n-1})_+ = (s'\, a'^{n-1}_1)_+$. Rezultă, conform Lemei 2.6.1, că există $q, q' \in Q$ unice cu proprietatea că $(s \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$ respectiv $(s' \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$.
Deoarece $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q' \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$, conform Definiţiei 2.6, vom avea $q = q'$ şi în concluzie $\varphi(s) = \varphi(s') = (q \overset{(n-1)}{A})_+$.

Reciproc, presupunem că $\varphi(s) = \varphi(s') = (q \overset{(n-1)}{A})_+$. Atunci există elementele $a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_1, \ldots, a'_{n-1} \in A$, $b_1, \ldots, b_{n-1}, b'_1, \ldots, b'_{n-1} \in A$ astfel încât $(s\, a_1^{n-1})_+ = (q\, b_1^{n-1})_+$ şi $(s'\, a'^{n-1}_1)_+ = (q\, b'^{n-1}_1)_+$. Folosind asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", vom avea

$$((s\, a_1^{n-1})_+,\, b'^{n-1}_1)_+ = ((q\, b_1^{n-1})_+,\, b'^{n-1}_1)_+$$

respectiv

$$((s'\, a'^{n-1}_1)_+,\, b_1^{n-1})_+ = ((q\, b'^{n-1}_1)_+,\, b_1^{n-1})_+ = ((q\, b_1^{n-1})_+,\, b'^{n-1}_1)_+.$$

Prin urmare,

$$((s\, a_1^{n-1})_+,\, b'^{n-1}_1)_+ = ((s'\, a'^{n-1}_1)_+,\, b_1^{n-1})_+.$$

Deoarece

$$(s, (a_1^{n-1}\, b_1')_+,\, b_2'^{\,n-1})_+ = (s', (\, a_1'^{\,n-1}\, b_1)_+,\, b_2^{n-1})_+$$

şi din faptul că A este ideal al $(n,m)-$semiinelului S rezultă că $(a_1^{n-1}\, b_1')_+,\ (a_1'^{\,n-1}\, b_1)_+ \in A$.

În concluzie $s\, \rho_A\, s'$. □

Teoremă 2.6.1. *Dacă A este un $Q-$ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi η este o relaţia de echivalenţă definită de partiţia $\{(q \overset{(n-1)}{A})_+; q \in Q\}$, atunci $\eta = \rho_A$, unde ρ_A este congruenţa definită în Teorema 2.5.2.*

Demonstraţie. Dacă $x\, \eta\, y$ ceea ce este echivalent cu faptul că există $q \in Q$ astfel încât $x, y \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$, atunci există $a_i, a_i' \in A$,$i \in \{1, ..., n-1\}$ cu proprietatea că $x = (q\, a_1^{n-1})_+$ şi $y = (q\, a_1'^{\,n-1})_+$. Datorită asociativităţii şi comutativităţii operaţiei $n-$are, avem

$$(x\, a_1'^{\,n-1})_+ = ((q\, a_1^{n-1})_+, a_1'^{\,n-1})_+ = ((q\, a_1'^{\,n-1})_+, a_1^{n-1})_+ = (y\, a_1^{n-1})_+,$$

ceea ce este echivalent cu $x \rho_A y$.

Reciproc, presupunem că $x \in (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+$; $y \in (q_2 \overset{(n-1)}{A})_+$, adică există $a_i, a_i' \in A$, $i \in \{1, ..., n-1\}$ astfel încât $x = (q_1\, a_1^{n-1})_+$, $y = (q_2\, a_1'^{\,n-1})_+$ şi $x\, \rho_A\, y$. Atunci există $b_i, b_i' \in A$; $i \in \{1, ..., n-1\}$ cu proprietatea că $(x\, b_1^{n-1})_+ = (y\, b_1'^{\,n-1})_+$. Prin urmare avem

$$(q_1, (a_1^{n-1}\, b_1)_+, b_2^{n-1})_+ = ((q_1\, a_1^{n-1})_+, b_1^{n-1})_+ = (x\, b_1^{n-1})_+ = (y\, b_1'^{\,n-1})_+$$

$$= (q_2\, a_1'^{\,n-1})_+, b_1'^{\,n-1})_+ = (q_2, (a_1'^{\,n-1}, b_1')_+, b_2'^{\,n-1})_+ \in (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q_2 \overset{(n-1)}{A})_+.$$

În concluzie $q_1 = q_2$, şi deci $x\, \eta\, y$. □

Propoziţie 2.6.2. *Fie A un $Q-$ideal al $(n,m)-$semiinelului S şi fie $S_{Q(A)} = \{(q \overset{(n-1)}{A})_+; q \in Q\}$. Atunci $S_{Q(A)}$ formează un $(n,m)-$semiinel relativ la operaţiile $n-$are şi $m-$are definite după cum urmează:*

$$((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, ..., (q_n \overset{(n-1)}{A})_+)_+ = (q \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $q \in Q$ este unicul element cu proprietatea că $((q_1^n)_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$
şi

$$((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, ..., (q_m \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $q' \in Q$ este unicul element astfel încât $((q_1^m)_\circ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$.

Acest $(n,m)-$semiinel $S_Q(A)$ se numeşte $(n,m)-$*semiinelul factor al lui* S *relativ la* $Q-$idealul A.
Dacă $(n,m)-$semiinelul S este semicomutativ (comutativ), atunci aceeaşi proprietatea o are şi $(n,m)-$semiinelul $S_{Q(A)}$.

Următoarea teoremă reprezintă o generalizare a Propoziţiei 7.17 a lui Golan [53] pentru semiinelele binare precum şi Lema (2.3) a lui Chaudhari şi Ingale [19]. Noi arătăm ca nu este necesară existenţa elementului zero.

Teoremă 2.6.2. *Dacă* $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ *este un* $(n,m)-$ *semiinel cu reducere, cu proprietatea că* $|Ida(S)| \geqslant 1$*, iar* A *este un* $Q-$ *ideal al lui* S*, atunci există un unic element* $q_0 \in Q$ *cu proprietatea că* $A = (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$.

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 2.5.3 , rezultă că A conţine cel puţin un idempotent aditiv e. Deoarece $(n,m)-$ semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este cu reducere,conform Propoziţiei 2.5.2 rezultă că $e \in A$ este element neutru aditiv. Pe de altă parte $e \in S$. Deoarece A este un $Q-$ ideal rezultă că există un unic $q_\circ \in Q$ astfel încât $e \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$, ceea ce este echivalent cu faptul că există $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ cu proprietatea că $e = (q_0\, a_1^{n-1})_+$.
Atunci, oricare ar fi $b \in A$ există un unic $q \in Q$ astfel încât $b \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$.
Dar, folosind comutativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$" obţinem

$$b = (b \overset{(n-1)}{e})_+ = (b,(q_0\, a_1^{n-1})_+, \overset{(n-2)}{e})_+ = (q_0,(b\, a_1^{n-1})_+, \overset{(n-2)}{e})_+ \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+.$$

Prin urmare, $b \in (q \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$ ceea ce implică $q = q_0$, adică $b \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$, oricare ar fi $b \in A$.
Rezultă de aici că

$$A \subseteq (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ \tag{2.20}$$

Pentru a arăta incluziunea inversă, vom arăta mai întâi că $q_0^{[1]} \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$.
Într-adevăr, fie $q' \in Q(A)$, q' unic şi $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $q_0^{[1]} = (q'\, c_1^{n-1})_+$. Folosind asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$" precum şi cele de mai sus, vom avea:

$$\begin{aligned} q_0 &= (q_0 \overset{(n-1)}{e})_+ = (q_0,(q_0\, \overset{(n-1)}{a_1^{n-1}})_+)_+ = ((\ldots((q_0^{[1]}\, a_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ \\ &= ((\ldots((q'\, c_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ = (q',(c_1\, a_1^{n-1})_+, \ldots (c_{n-1}\, a_1^{n-1})_+)_+ \\ &\in (q' \overset{(n-1)}{A})_+. \end{aligned}$$

Aşadar $q_0 \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q' \overset{(n-1)}{A})_+$ ceea ce ne conduce la $q_0 = q'$.
Rezultă că $q_0^{[1]} = (q_0\, c_1^{n-1})_+$. Atunci

$$
\begin{aligned}
(q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ &= ((q_0, \overset{(n-1)}{e})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ = ((q_0(q_0\, \overset{(n-1)}{a_1^{n-1}})_+)_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \\
&= (((\ldots((q_0^{[1]}\, a_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \\
&= (((\ldots(((q_0\, c_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+\, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \\
&= (((\ldots(((q_0\, a_1^{n-1})_+, c_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \\
&= (((\ldots((e\, c_1^{n-1})_+, a_1^{n-1})_+ \ldots)_+, a_1^{n-1})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (A \overset{(n-1)}{A})_+ \\
&= A^{[1]} \subseteq A
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Din (2.20) şi (2.21) rezultă că există $(q_\circ \overset{(n-1)}{A})_+ = A$. $\square$

Deoarece

Corolar 2.6.1. *Fie $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ cu reducere şi $|Ida(S)| \geqslant 1$. Dacă A este un $Q-$ideal al $(n,m)-$semiinelului S atunci idealul A este subtractiv şi element zero în $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$.*

Demonstraţie. Dacă avem elementele $a_1 \in S$, $a_2, \ldots, a_n \in A$ şi $(a_1^n)_+ \in A$, atunci pentru orice $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A$ vom avea

$$((a_1^n)_+,\, b_1^{n-1})_+ = (a_1, (a_2^n\, b_1)_+,\, b_2^{n-1})_+,$$

adică $(a_1^n)_+ \rho_A\, a_1$.

Conform Propoziţiei 2.6.1, rezultă că $\varphi((a_1^n)_+) = \varphi(a_1) = (q \overset{(n-1)}{A})_+$ unde $q \in Q$. Aşadar, conform Observaţiei 2.6.1 $(a_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$, respectiv $((a_1^n)_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$.
Pe de altă parte există un unic $q_0 \in Q$ cu proprietatea că $A = (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$.
Deoarece $((a_1^n)_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq A$, vom avea $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$ ceea ce ne conduce la $q = q_0$.
Rezultă că $(a_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q_0, \overset{(n-1)}{A})_+$.
Deoarece $(n,m)-$semiinelul S este cu reducere şi în plus $|Ida(S)| \geqslant 1$, conform Propoziţiilor 2.5.3, respectiv 2.5.2 rezultă ca există în A un element neutru aditiv, pe care îl notăm cu cu e. Prin urmare există $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(a_1, \overset{(n-1)}{e})_+ = (q_0 \overset{(n-1)}{b_1})_+$, ceea ce ne arată că

$$a_1 = (q_0 \overset{(n-1)}{b_1})_+ \in (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ = A.$$

Pentru a arăta că A este element zero în $(n,m)-$semiinelul $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$, considerăm clasele de echivalenţă $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+$,...,$(q_{i-1} \overset{(n-1)}{A})_+$,$A = (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$,...,$(q_{m-1} \overset{(n-1)}{A})_+ \in S_{Q(A)}$,. Conform Propoziţiei 2.6.2, vom avea

$$((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, ...(q_0 \overset{(n-1)}{A})_+, ..., (q_{m-1} \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $q' \in Q$ este unicul element astfel încât $((q_1^{i-1}\, q_0\, q_i^{m-1})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$.
Pe de altă parte, idealul A fiind subtractiv, din faptul că $A = (q_0 \overset{(n-1)}{A})_+$, rezultă că $q_0 \in A$. Prin urmare $(q_1^{i-1}\, q_0\, q_i^{m-1})_\circ \in A$. Rezultă că

$$((q_1^{i-1}\, q_0\, q_i^{m-1})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq A^{[1]} \subseteq A.$$

Aşadar, $(q_0 \overset{(n-1)}{A})_+ \cap q' \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$şi conform Definiţiei vom avea $q_0 = q'$
În conluzie $A = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$, adică A este element zero în $(n,m)-$semiinelul $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$. $\square$

Reciproca nu este în general adevărată.

Exemplul 2.6.5. Considerând $(n,m)-$inelul $(\mathbb{Z}^*, (\,)_+, (\,)_\circ)$ unde $(\,)_+ : \mathbb{Z}^{*n} \to \mathbb{Z}^*$ $(a_1^n)_+ =$ c.m.m.d.c $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ iar operaţia $n-$ară este $(\,)_\circ : \mathbb{Z}^{*m} \to \mathbb{Z}^*; (a_1^m)_\circ =$ c.m.m.m.c $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ idealul $2\mathbb{Z}^*$ al $(n,m)-$semiinelului $\mathbb{Z}^*$ este subtractiv dar nu este de partiţionare.

Ca şi un corolar obţinem generalizarea Corolarul 7.19 a lui Golan [53]

Corolar 2.6.2. *Fie $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ cu element neutru aditiv,0, care este şi element zero. Dacă A este un $Q-$ideal , atunci A este ideal subtractiv şi element zero în $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$.*

Mulţimea $Q(A)$ nu este unic determinată de idealul de partiţionare A.

Propoziţie 2.6.3. *Dacă $Q(A)$ şi $Q'(A)$ sunt două mulţimi de partiţionare, atunci $(n,m)-$semiinelele $S_{Q(A)}$ şi $S_{Q'(A)}$ sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Într-adevăr, aplicaţia

$$f : S_{Q(A)} \to S_{Q'(A)},\ f((q \overset{(n-1)}{A})_+) = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $q' \in Q'(A)$ este un unic element cu proprietatea că $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$ este un izomorfism.
Pentru început să aratăm că aplicaţia este bine definită, adică nu depinde de alegerea

reprezentanţilor. Dacă alegem un element $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \in S_{Q(A)}$ cu proprietatea că $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ = (q \overset{(n-1)}{A})_+$, atunci $q_1 = q$. Prin urmare

$$f((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+) = (q_1' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $q_1' \in Q'(A)$ şi $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q_1' \overset{(n-1)}{A})_+$. Rezultă că $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q_1' \overset{(n-1)}{A})_+$ şi în concluzie $(q_1' \overset{(n-1)}{A})_+ = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$.

Considerând elementele $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_p \overset{(n-1)}{A})_+ \in S_{Q(A)}$ unde $p = \max(n, m)$, vom avea

$$f(((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_n \overset{(n-1)}{A})_+)_+) = f((q^* \overset{(n-1)}{A})_+) = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde $((q_1^n)_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q^* \overset{(n-1)}{A})_+$, $q^* \in Q(A)$ fiind un unic element care îndeplineşte acestă condiţie.
În plus $(q^* \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$, unde $q' \in Q'(A)$ este unicul element cu această proprietate.
Dar

$$f((q_i \overset{(n-1)}{A})_+) = (q_i' \overset{(n-1)}{A})_+$$

unde elementele unice $q_i' \in Q'(A)$; $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$; $p = \max(n, m)$ satisfac condiţiile $(q_i \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q_i' \overset{(n-1)}{A})_+$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.
Rezultă că

$$((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_n \overset{(n-1)}{A})_+)_+ = (q^* \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq ((q_1' \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_n' \overset{(n-1)}{A})_+)_+ = (q'' \overset{(n-1)}{A})_+$$

Aşadar,

$$(f((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+), \ldots, f((q_n \overset{(n-1)}{A})_+))_+ = ((q_1' \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_n' \overset{(n-1)}{A})_+)_+ = (q'' \overset{(n-1)}{A})_+.$$

cu proprietatea că $(q^* \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q'' \overset{(n-1)}{A})_+$. Dar $(q^* \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$ şi conform Definiţiei vom avea $q' = q''$. În concluzie

$$f(((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_n \overset{(n-1)}{A})_+)_+) = (f((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+), \ldots, f((q_n \overset{(n-1)}{A})_+))_+.$$

Analog se arată că

$$f(((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+, \ldots, (q_m \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ) = (f((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+), \ldots, f((q_m \overset{(n-1)}{A})_+))_\circ.$$

Aşadar f este un omomorfism de $(n, m)-$semiinele.

În continuare vom arăta că f este un omomorfism injectiv.
Fie
$$f((q_1 \overset{(n-1)}{A})_+) = f((q_2 \overset{(n-1)}{A})_+) = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$
unde $q' \in Q'(A)$ este unic cu această proprietate.

Deoarece
$$(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$
şi
$$(q_2 \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q' \overset{(n-1)}{A})_+$$
rezultă că există elementele $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots b_{n-1}, c_1, \ldots, c_{n-1} \in A$, $d_1, \ldots, d_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(q_1\, a_1^{n-1})_+ = (q'\, b_1^{n-1})_+$ şi $(q_2\, c_1^{n-1})_+ = (q'\, d_1^{n-1})_+$.

Folosind asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_+$", vom avea
$$\begin{aligned} ((q_1 a_1^{n-1})_+, d_1^{n-1})_+ &= ((q' b_1^{n-1})_+, d_1^{n-1})_+ = ((q' d_1^{n-1})_+, b_1^{n-1})_+ \\ &= ((q_2 c_1^{n-1})_+, b_1^{n-1})_+ \end{aligned}$$
ceea ce ne conduce la
$$(q_1, (a_1^{n-1} d_1)_+, d_2^{n-1})_+ = (q_2, (c_1^{n-1} b_1)_+, b_2^{n-1})_+.$$
Deoarece A este un ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ rezultă că
$$(a_1^{n-1} d_1)_+,\ (c_1^{n-1} b_1)_+ \in A$$
şi deci $q_1 \rho_A\, q_2$ ceea ce ne conduce la $(q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ = (q_2 \overset{(n-1)}{A})_+$.
Să arătăm, în continuare, că f este surjectivă. Fie $(q' \overset{(n-1)}{A})_+ \in S_{Q'(A)}$. Deoarece $q' \in S$, rezultă că există un unic element $q \in Q(A)$ astfel încât $(q' \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q \overset{(n-1)}{A})_+$.
Dar există un $q'' \in Q'(A)$ cu proprietatea că $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq (q'' \overset{(n-1)}{A})_+$.
Deoarece $(q' \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q'' \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$ rezultă că $q' = q''$ şi $(q' \overset{(n-1)}{A})_+ = (q'' \overset{(n-1)}{A})_+$. Deci există $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \in S_{Q(A)}$, astfel încât $f((q \overset{(n-1)}{A})_+) = (q' \overset{(n-1)}{A})_+$.

Prin urmare f este un omomorfism surjectiv. □

Această propoziţie ne arată că $(n,m)-$inelul factor $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este independent de alegerea submulţimii $Q(A)$.

Analog cazului semiinelelor ternare (Teorema 2.5 a lui Chaudhari, Ingale [19]) se demonstrează că, dacă Q şi Q' sunt două mulţimi de partiţionare relativ la acelaşi $Q-$ideal A al unui $(n,m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci mulţimile factor corespunzătoare sunt, de fapt, egale, adică $S_{Q(A)} = S_{Q'(A)}$.

Exemplul 2.6.6. Fie mulţimea claselor de resturi modulo 6, $\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ înzestrată cu o operaţie ternară

$$(\,)_+ : \mathbb{Z}_6^3 \to \mathbb{Z}_6, \qquad (x_1, x_2, x_3)_+ = x_1 + x_2 + x_3$$

şi operaţia binară multiplicativă obişnuită " $\cdot$ ".

Atunci $(\mathbb{Z}, (\,)_+, \cdot)$ este un $(3,2)$-inel comutativ. Mulţimea idempotenţilor aditivi este $Ida(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{0}, \hat{3}\}$ care sunt şi elemente neutre aditive, iar $\hat{0}$ este element zero al inelului.

Mulţimea idempotenţilor multiplicativi este $Idm(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}\}$ 1 este element neutru multiplicativ al inelului.

Mulţimea $I_1 = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ este un ideal subtractiv al $(3,2)$-inelului $\mathbb{Z}_6$.

Mulţimea $I_2 = \{\hat{0}, \hat{3}\}$ este un ideal subtractiv al $(3,2)$-inelului $\mathbb{Z}_6$.

Idealul I_2 este un ideal de partiţionare în raport cu mulţimea $Q_1 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ şi $Q_2 = \{\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$. Atunci

$$\mathbb{Z}_{6_{Q_1(I_2)}} = \{(q, I_2, I_2)_+ | q \in Q_1\} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}, \}.$$

respectiv

$$\mathbb{Z}_{6_{Q_2(I_2)}} = \{(q', I_2, I_2)_+ | q' \in Q_2\} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}, \}.$$

Observăm că $\mathbb{Z}_{6_{Q_1(I_2)}} = \mathbb{Z}_{6_{Q_2(I_2)}}$ dar $Q_1 \neq Q_2$

Exemplul 2.6.7. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_6$ al claselor de resturi modulo 6 definim operaţiile ternare:

$$\begin{aligned} (\,)_+ : \mathbb{Z}_6^3 \to \mathbb{Z}_6 \quad &, \qquad (x_1^3)_+ = x_1 + x_2 + x_3 \\ (\,)_\circ : \mathbb{Z}_6^3 \to \mathbb{Z}_6 \quad &, \qquad (x_1^3)_\circ = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{aligned}$$

Atunci $(\mathbb{Z}_6, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(3,3)$-inel comutativ, mulţimea idempotenţilor aditivi este $Ida(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{0}, \hat{3}\}$ care sunt şi elemente neutre aditive, 0 este element zero, iar mulţimea idempotenţilor multiplicativi este $Idm(\mathbb{Z}_6) = \mathbb{Z}_6$.

$(3,3)$-inelul $(\mathbb{Z}_6, ()_+, ()_\circ)$ nu este un inel strict, iar $\hat{1}$ este element neutral multiplicativ.

Submulţimea $I = \{\hat{0}, \hat{3}\}$ este un ideal subtractiv al acestui inel. Mai mult, el este un ideal de partiţionare relativ la următoarele mulţimi

$$Q_1 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}; \quad Q_2 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{5}\}; \quad Q_3 = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}; \quad Q_4 = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{5}\}$$

$\mathbb{Z}_{6_{Q_1(I)}} = \{(\hat{0}, I, I)_+, (\hat{1}, I, I)_+, (\hat{2}, I, I)_+\} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}\}$
$\mathbb{Z}_{6_{Q_2(I)}} = \{(\hat{0}, I, I)_+, (\hat{1}, I, I)_+, (\hat{5}, I, I)_+\} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}\}$
$\mathbb{Z}_{6_{Q_3(I)}} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}\}$
$\mathbb{Z}_{6_{Q_4(I)}} = \{\{\hat{0}, \hat{3}\}, \{\hat{1}, \hat{4}\}, \{\hat{2}, \hat{5}\}\}$

Observăm cămulţimile factor sunt izomorfe şi chiar egale ca mulţimi cu toate că ele nu coincid ca şi clase cu reprezentant de tipul $(q, I, I)_+$.

Observaţie 2.6.2. Observăm că, dacă $(n, m)-$ semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este cu reducere şi $|Ida(S)| \geqslant 1$ sau $(n, m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ are element neutru aditiv care este şi element zero, atunci aplicaţia $\varphi_A : S \to S_{Q(A)}$, $\varphi_A(x) = (q \overset{(n-1)}{A})_+$ induce o bijecţie între $S_{/_{\rho(A)}}$ şi $S_{Q(A)}$.

Teoremă 2.6.3. *Fie A un $Q-$ideal al unui $(n, m)-$semiinel $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ cu element neutru multiplicativ e. Dacă $e \in (q^* \overset{(n-1)}{A})_+$, unde q^* este un element din mulţimea Q, atunci $(q^* \overset{(n-1)}{A})_+$ este un element neutru multiplicativ al $(n, m)-$semiinelului factor $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$.*

Demonstraţie. Deoarece $e \in (q^* \overset{(n-1)}{A})_+$ rezultă că există $a_2, a_3, \ldots, a_n \in A$ cu proprietatea că $e = (q^* a_2^n)_+$.

Dacă $q \in Q$, atunci

$$q = (\overset{(i-1)}{e}\, q\, \overset{(m-i)}{e})_\circ = ((q^* \overset{(i-1)}{a_2^n})_+\, q\, (q^* \overset{(m-i)}{a_2^n})_+)_\circ.$$

Aplicând distributivitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$", faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$" deducem că avem de adunat n^{m-1} produse de tipul $(x_1^m)_\circ$ în care exceptând primul produs $(\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ$, toate celelalte conţin cel puţin un element din idealul A şi prin urmare aparţin lui A. Ţinând seama de faptul că $A^{[1]} \subseteq A$,de aici rezultă că

$$q \in ((\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+.$$

Atunci

$$(q \overset{(n-1)}{A})_+ = (((\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+ \overset{(n-1)}{A})_+ \subseteq$$
$$\subseteq (\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+$$

Aplicând distributivitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_+$" faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$" asupra $((q^* \overset{(n-1)}{A})_+, (q \overset{(n-1)}{A})_+, (q^* \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ$ vom obţine o sumă de n^m produse de tipul $(x_1^m)_+$ în care ne apare un produs $(\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ$, iar toţi ceilalţi termeni aparţin idealului A.

Prin urmare,

$$((q^* \overset{(n-1)}{A})_+, (q \overset{(n-1)}{A})_+, (q^* \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ = (\overset{(i-1)}{q^*}\, q\, \overset{(m-i)}{q^*})_\circ \overset{(n-1)}{A})_+,$$

adică

$$(q \overset{(n-1)}{A})_+ = ((q^* \overset{(n-1)}{A})_+, (q \overset{(n-1)}{A})_+, (q^* \overset{(n-1)}{A})_+)_\circ$$

ceea ce ne arată că $(q^* \overset{(n-1)}{A})_+$ este un element neutru multiplicativ în $(n,m)-$semiinelul $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$. □

Propoziţie 2.6.4. *Fie A un $Q-$ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ în care există un idempotent multiplicativ x astfel încât $x \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$. Atunci mulţimea $(q \overset{(n-1)}{A})_+$ este un idempotent multiplicativ în $(n,m)-$semiinelul factor $(S_{Q(A)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$.*

Demonstraţie. Fie $(q \overset{(n-1)}{A})_+^{<1>} = (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+$, unde $q_1 \in Q$ este unicul element cu proprietatea că $q^{<1>} \in (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+$. Atunci există elementele $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ astfel încât $q^{<1>} = (q_1\, a_1^{n-1})_+$. Deoarece $x \in (q \overset{(n-1)}{A})_+$, rezultă că există $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $x = (q\, b_1^{n-1})_+$. Dar x este un idempotent multiplicativ, prin urmare

$$x = x^{<1>} = (q\, b_1^{n-1})_+^{<1>} = ((q\, b_1^{n-1})_+, \ldots, (q\, b_1^{n-1})_+)_\circ.$$

Conform distributivită ţii operaţiei $m-$are ”$(\,)_\circ$” faţa de operaţia $n-$ară ”$(\,)_+$” elementul x se scrie ca o sumă de n^m produse de tipul $(y_1^m)_\circ$. Exceptând primul produs, $q^{<1>}$, celelalte produse conţin cel puţin un element din idealul A şi prin urmare aparţin lui A. Aceasta demonstrează că

$$x = x^{<1>} \in (q^{<1>} \overset{(n-1)}{A})_+.$$

De aici, deducem că există $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in A$ astfel încât $x = (q^{<1>} c_1^{n-1})_+$.
Rezultă că

$$x = ((q_1 a_1^{n-1})_+, c_1^{n-1})_+ = (q_1, (a_1^{n-1} c_1)_+, c_2^{n-1})_+ \in (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+.$$

Deoarece A este un $Q-$ideal şi $(q \overset{(n-1)}{A})_+ \cap (q_1 \overset{(n-1)}{A})_+ \neq \emptyset$, rezultă că $q = q_1$.În concluzie $(q \overset{(n-1)}{A})_+^{<1>} = (q \overset{(n-1)}{A})_+$. □

Terema 2.6.3 şi Propoziţia 2.6.4 ne permit să demonstrăm următorul rezultat:

Teoremă 2.6.4. *Fie $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ comutativ care are un element neutru aditiv 0, care este şi element zero, şi un element neutru multiplicativ e iar I un $Q-$ideal în*
$(n,m)-$semiinelul S. Atunci I este ideal prim, dacă şi numai dacă semiinelul factor $S_{Q(I)} = \{(q \overset{(n-1)}{I})_+ | q \in Q\}$ nu are divizori ai lui zero.

Demonstraţie. Presupunem că I este un $Q-$ideal prim în S. Deoarece $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ are element neutru multiplicativ e, rezultă, conform Teoremei 2.6.3, că şi $(S_{Q(I)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$ semiinel comutativ, cu element neutru multiplicativ $(q^* \overset{(n-1)}{I})_+$ şi element zero $I = (q_0, \overset{(n-1)}{I})_+$ unde $q^*, q_0 \in Q$ sunt unice cu această proprietate. Arătăm în continuare că $(n,m)-$semiinelul $(S_{Q(I)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este fără divizori ai lui zero.
Pentru aceasta considerăm clasele $(q_i \overset{(n-1)}{I})_+ \in S_{Q(I)}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ cu proprietatea că

$$((q_1 \overset{(n-1)}{I})_+, \ldots, (q_m \overset{(n-1)}{I})_+)_\circ = I.$$

Rezultă că $((q_1^m)_\circ \overset{(n-1)}{I})_+ \subseteq (q_0 \overset{(n-1)}{I})_+ = I$. Conform Corolarului 2.6.2, I este un ideal subtractiv şi prin urmare vom avea $(q_1^m)_\circ \in I$.

Deoarece I este ideal prim, rezultă că există $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel încât $q_i \in I$. Deci $(q_i \overset{(n-1)}{I})_+ = I$ unde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. În concluzie, $(n,m)-$ semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este fară divizori ai lui zero.

Reciproc, presupunem că $(n,m)-$semiinelul $(S_{Q(I)}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un semidomeniu de integritate şi $(a_1^m)_\circ \in I$. Deoarece $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S$, rezultă că există $q_1, q_2, \ldots, q_m \in Q$ cu proprietatea că $a_i \in (q_i \overset{(n-1)}{I})_+$ adică există $b_{i1}^{i,n-1} \in I$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel încât $a_i = (q_i\ b_{i1}^{i,n-1})_+$.

Avem

$$((q_1 \overset{(n-1)}{I})_+, \ldots, (q_m \overset{(n-1)}{I})_+)_\circ = (q^* \overset{(n-1)}{I})_+$$

adică $((q_1^m)_\circ, \overset{(n-1)}{I})_+ \subseteq (q^* \overset{(n-1)}{I})_+$. Pe de altă parte,

$$(a_1^m)_\circ = ((q_1\, b_{11}^{1,n-1})_+, \ldots (q_m\, b_{m1}^{mn-1})_+)_\circ.$$

Pe baza distributivităţii operaţiei $m-$are "$(\,)_+$" faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$" avem de adunat n^m produse de tipul $(x_1^m)_\circ$ în care primul produs este $(q_1^m)_\circ$, iar celelalte produse conţin cel puţin un element din I şi prin urmare aparţin lui I.
Deoarece $I^{[1]} \subseteq I$ vom avea

$$(a_1^m)_\circ = ((q_1^m)_\circ, (q_1 b_{21} q_2^{m-1})_\circ, (q_1\, q_2\, b_{31}\, q_3^{m-1})_\circ \ldots (b_{1n-1}^{m,n-1})_\circ)_+ \in ((q_1^m)_\circ \overset{(n-1)}{I})_+$$

Rezultă că există $i_1^{n-1} \in I$ astfel încât $(a_1^m)_\circ = ((q_1^m)_\circ, i_1^{n-1})_+$. Dar $(a_1^m)_\circ \in I$. Prin urmare $((q_1^m)_\circ, i_1^{n-1})_+ \in I$. Deoarece I este ideal de partiţionare rezultă că este şi $k-$ideal şi prin urmare $(q_1^m)_\circ \in I = (q_0 \overset{(n-1)}{I})_+$. Rezultă că $(q_0 \overset{(n-1)}{I})_+ \cap (q_* \overset{(n-1)}{I})_+ \neq \emptyset$ deci $q_0 = q^*$ adică $(q^* \overset{(n-1)}{I})_+ = I$.

Deoarece $(n,m)-$semiinelul $S_{Q(I)}$ nu are divizori ai lui zero, rezultă că există $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ cu proprietatea că $(q_i \overset{(n-1)}{I})_+ = I$.

În concluzie există $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel încât $q_i \in I$ ceea ce ne conduce la faptul că $a_i = (q_i\, b_{i1}^{in-1})_+ \in I$. Deci I este ideal prim. $\square$

2.7 Reduceri şi extinderi de $n-$monoizi şi $(n, m)-$semiinele

Reducerile şi extinderile unor structuri n-are au fost subiectul a numeroase articole în bibliografia de specialitate. Se pot construi astfel alte structuri similare înzestrate însă cu operaţii de aritate diferită, pe de altă parte anumite proprietăţi ale structurilor reduse (chiar structuri binare uneori) pot da indicaţii despre proprietăţi ale structurilor n-are iniţiale.

În prealabil vom prezenta noţiuni şi rezultate referitoare la redusa binară a unui $n-$semigrup ($n-$grup) şi extinderea unui semigrup (grup) la $n-$semigrupuri ($n-$grupuri). Completăm aceste rezultate, referindu-ne în mod special la cele două modalităţi de reducere (de tip Post [110] şi Zupnik [141]) ale $n-$monoizilor la monoizii uzuali justificând totodată definiţia datăde noi $n-$monoizilor în lucrarea [95].

Dacă $(A, \cdot)$ este un semigrup, atunci extinderea sa $n-$ară $(A, (\,)_\circ)$, cu

$$(a_1^n)_\circ = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n, \tag{2.22}$$

este un $n-$semigrup, iar dacă $(A, \cdot)$ este grup atunci extinderea sa $n-$ară este un $n-$grup cu element neutru.

Am văzut însă (Exemplul 1.1.2) că nu orice $n-$semigrup poate fi obţinut ca extindere $n-$ară a unui semigrup.

Dörnte [33] arată că fiecare $n-$grup cu element neutru este extinderea $n-$ară a unui grup, iar Post [110] reia studiul acestei probleme în cazul general al $n-$grupurilor (nu neapărat cu element neutru) şi demonstrează următoarea teoremă citată în literatură sub numele de teorema lui Post.

Teoremă 2.7.1. [110] *Pentru orice $n-$grup $(G, (\,)_\circ)$ există un bigrup $(G^*, *)$ şi un subgrup normal G_0 al lui G^* cu proprietăţile*

1) G este o clasă de echivalenţă a lui G^* în raport cu G_0.

2) G^*/G_0 este grup ciclic generat de clasa de echivalenţă G, în plus, $G^*/G_0 \simeq (\mathbb{Z}_{n-1}, +)$.

3) Produsul $n-$ar coincide pe mulţimea de bază G a $n-$grupului cu efectuarea produsului binar de n factori.

Spunem că am scufundat izomorf $n-$grupul $(G, (\,)_\circ)$ în bigrupul $(G^*, *)$. $(G^*, *)$ se numeşte bigrup înfăşurător al lui $(G, ()_\circ)$ (sau acoperirea Post a lui G, sau bigrupul de acoperire liberă a lui G, după alţi autori), iar subgrupul normal $(G_0, *)$ se numeşte bigrupul asociat $n-$grupului $(G, ()_\circ)$.

Post demonstrează în continuare că toate înfăşurătoarele unui $n-$grup sunt izomorfe între ele şi, de asemenea, toate bigrupurile asociate unui $n-$grup sunt izomorfe.

Hosszú [60] arată că introducerea elementelor care nu aparţin mulţimii de bază a $n-$grupului G poate fi evitată, adică se poate construi un bigrup chiar pe mulţimea G astfel încât produsul $n-$ar să poată fi obţinut cu ajutorul operaţiei binare de grup şi al unui automorfism al grupului.

Teoremă 2.7.2. ([60]) Operaţia $n-$ară "$(\,)_\circ$" definită pe mulţimea G este operaţie de $n-$grup dacă şi numai dacă ea se poate scrie explicit sub forma

$$(x_1^n)_\circ = x_1 \cdot f(x_2) \cdot f^2(x_3) \cdot \ldots \cdot f^{n-1}(x_n) \cdot a,$$

unde $x_1^n \in G$, "$\cdot$" este o operaţie binară de grup pe aceeaşi mulţime G, f este un automorfism al bigrupului $(G, \cdot)$ ci proprietatea că f^{n-1} este un automorfism interior, astfel că există $a \in G$ cu $f^{n-1}(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$ şi $f(a) = a$.

Grupul $(G, \cdot)$ definit în acest mod se numeşte *grupul redus* al $n-$grupului $(G, (\,)_\circ)$ în raport cu elementul fixat a.

Reducerea în raport cu elementul neutru aplicată $n-$grupurilor cu element neutru conduce la rezultatul lui Dörnte menţionat la începutul acestui paragraf.

Cele două posibilităţi de descriere a $n-$grupurilor nu sunt independente; Timm [129] demonstrează că bigrupurile asociate unui $n-$grup şi cele reduse în raport cu elemente fixe sunt izomorfe.

Şi în cazul $n-$semigrupurilor reducerea se poate efectua pe una din cele două căi:

(1) una de tip Post, adică prin construirea pe o supramulţime a lui A a unui semigrup înfăşurător, astfel de rezultate reprezintă generalizări ale teoremei lui Post (2.7.1) şi se întâlnesc la C. Čupona şi N. Celakovski [30], J. Timm [129].

(2) prin construirea unui semigrup pe mulţimea de bază a $n-$semigrupului astfel ca produsul $n-$ar să poată fi descris cu ajutorul operaţiei binare de semigrup şi al unui endomorfism.

În această direcţie amintim pe D. Zupnik [141], M. S. Pop [99]

M. S. Pop introduce în [99] şi mai apoi împreună cu I. Purdea în [108] o clasă de reduse binare ale unui $n-$semigrup, respectiv de reduse de ordin k ale unui $n-$semigrup (unde $(k-1)(n-1)$) în raport cu elementele fixate ale $n-$semigrupului. Aceste reduse se dovedesc a fi de tip Zupnik, respectiv de tip Hosszú, în cazul $n-$grupurilor.

Definiţie 2.7.1. ([99]) Fie $(A,(\,)_\circ)$ un $n-$semigrup şi $u_1^{n-2}\in A$, $n-2$ elemente oarecare, fixate din A. Perechea $(A,\cdot)$ unde "$\cdot$" este o operaţie binară definită pe A prin

$$x\cdot y=(x\,u_1^{n-2}\,y)_\circ \text{ pentru orice } x,y\in A$$

se numeşte *reducerea* sau *redusa binară a lui* A în raport cu $u_1,u_2,\dots,u_{n-2}$. Notăm $(A,\cdot)=red_{u_1^{n-2}}A$.

Notăm $(A,\cdot)=red_{u_1^{n-2}}A$.

Dacă $(A,(\,)_\circ)$ este un $n-$grup, atunci pentru orice $u_1^{n-2},c\in A$ avem

$$red_{u_1^{n-2}}A\simeq red_{\overset{(n-3)}{c}\,\overline{c}}A$$

. Notăm $red_{\overset{n-3}{c}\,\overline{c}}A$ prin red_cA.

Se constată că red_cA este o redusă binară de tip Hosszú a $n-$grupului $(A,(\,)_\circ)$; automorfismul f al bigrupului $(A,\cdot)$ este definit prin $f(x)=(c,x,\overset{(n-3)}{c},\overline{c})_\circ$ iar elementul $a\in A$ (din Teorema 2.7.2) este $a=c^{[1]}$.

Pe baza Propoziţiei 1.1.1 se demonstrează uşor că

Propoziţie 2.7.1. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95]) *Dacă* $(A,(\,)_\circ,u_1^{n-1})$ *este un n-monoid, atunci redusa sa binară în raport cu* u_1^{n-2}, $(A,\cdot)$ *este un monoid cu unitate* u_{n-1}.

Notăm acest monoid prin $(red_{u_1^{n-2}}A,\cdot,u_{n-1})$.

Propoziţie 2.7.2. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95]) *Fie n-monoidul* $(A,()_\circ)$ *şi fie* $u_1^{n-1},v_1^{n-1}\in U(A)$ *două unităţi ale n-monoidului ca sistem de* $(n-1)$ *elemente. Atunci redusele binare* $(red_{u_1^{n-2}}A,\cdot,u_{n-1})$, $(red_{v_1^{n-2}}A,\star,v_{n-1})$ *în raport cu* $u_1,u_2,\dots,u_{n-2}$ *şi* $v_1,v_2,\dots,v_{n-2}$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Dacă $u_1^{n-1},v_1^{n-1}\in U(A)$ atunci conform Propoziţiei 1.1.1, $u_1^{n-1},v_1^{n-1},u_{n-2}u_1^{n-2},v_{n-1}v_1^{n-2}$ sunt unităţi la stânga şi la dreapta în n-monoidul A, atunci aplicaţia $f:A\to A,\quad f(x)=(v_{n-1}xu_1^{n-2})_\circ$ este un omomorfism unital al monoidului $(red_{u_1^{n-2}}A,\cdot,u_{n-1})$ în $(red_{v_1^{n-2}}A,\star,v_{n-1})$.

Într-adevăr, pentru orice $x, y \in A$ avem

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= (v_{n-1}, (x \cdot y), u_1^{n-2})_\circ = (v_{n-1}, (xu_1^{n-2}y)_\circ u_1^{n-2})_\circ \\ &= (((v_{n-1}xu_1^{n-2})_\circ v_1^{n-1})_\circ, y, u_1^{n-2})_\circ \\ &= ((v_{n-1}xu_1^{n-2})_\circ, v_1^{n-2}, (v_{n-1}yu_1^{n-2})_\circ)_\circ \\ &= (f(x), v_1^{n-2}, f(y))_\circ = f(x) \star f(y) \end{aligned}$$

în plus,

$$f(u_{n-1}) = (v_{n-1}u_{n-1}u_1^{n-2})_\circ = v_{n-1}.$$

Dacă $f(x) = f(y)$ atunci $(v_{n-1}xu_1^{n-2})_\circ = (v_{n-1}yu_1^{n-2})_\circ$.
Conform Propoziţiei 1.1.1 rezultă că

$$(v_1^{n-2}, (v_{n-1}xu_1^{n-2})_\circ u_{n-1})_\circ = (v_1^{n-2}, (v_{n-1}yu_1^{n-2})_\circ u_{n-1})_\circ$$

ceea ce ne conduce la

$$((v_1^{n-1}x)_\circ u_1^{n-1})_\circ = ((v_1^{n-1}y)_\circ u_1^{n-1})_\circ$$

adică $x = y$.

Omomorfismul f este şi surjectiv, deoarece oricare ar fi $y \in A$ există $x = (v_1^{n-2}yu_{n-1})_\circ \in A$ cu proprietatea că $f(x) = y$.

În concluzie f este un izomorfism de monoizi. □

În continuare vom prezenta o reducere de tip Post [110] a unui $n-$semigrup cu unitate la dreapta.

Fie $(A, (\,)_\circ)$ un n-semigrup cu unitate la dreapta u_1^{n-1}. Pe mulţimea $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^i$ definim relaţia ρ astfel:

$$a_1^i \,\rho\, {a'}_1^i \Leftrightarrow (u_i^{n-1}a_1^i)_\circ = (u_i^{n-1}{a'}_1^i)_\circ$$

pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ţinând seama că u_1^{n-1} este unitate la dreapta în $(A, (\,)_\circ)$ se verifică uşor că pentru orice $x_1, \ldots, x_{n-i} \in A$ avem

$$a_1^i \rho {a'}_1^i \Leftrightarrow (x_1^{n-i}a_1^i)_\circ = (x_1^{n-i}{a'}_1^i)_\circ$$

Într-adevăr, dacă $a_1^i \rho {a'}_1^i$, folosind proprietatea de asociativitate a operaţiei n-are obţinem

$$\begin{aligned} (x_1^{n-i}a_1^i)_\circ &= (x_1^{n-i-1}, (x_{n-i}u_1^{n-1})_\circ a_1^i)_\circ \\ &= (x_1^{n-i}, u_1^{i-1}, (u_i^{n-1}a_1^i)_\circ)_\circ \\ &= (x_1^{n-i}, u_1^{i-1}, (u_i^{n-1}{a'}_1^i)_\circ)_\circ \\ &= (x_1^{n-i-1}, (x_{n-i}u_1^{n-1})_\circ {a'}_1^i)_\circ \\ &= (x_1^{n-i}{a'}_1^i)_\circ \end{aligned}$$

Relaţia ρ este o relaţie de echivalenţă care determină o partiţie a lui G în clase de echivalenţe. Fie clasa $\rho(a_1^i) \stackrel{not}{=} [a_1^i]$.

Evident
$$[u_1^{n-1}] = \{v_1^{n-1} | (xv_1^{n-1})_\circ = x, \text{ oricare ar fi } x \in A\}$$
este clasa tuturor unităţilor la dreapta ca sistem de elemente.

Pe mulţimea $G/_\rho$ a claselor de echivalenţă definim operaţia binară
$$[a_1^i] \cdot [b_1^j] = \begin{cases} [a_1^i b_1^j], & \text{dacă } i+j<n \\ [a_1^{i+j-n}(a_{i+j-n+1}^i b_1^j)_\circ], & \text{dacă } i+j \geq n. \end{cases}$$
Se verifică uşor că operaţia este bine definită, nedepinzând de alegerea reprezentanţilor. Mai mult, $(G/\rho, \cdot)$ este un monoid cu unitatea $[u_1^{n-1}]$ şi pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$ avem
$$[(a_1^n)_\circ] = [a_1] \cdot [a_2] \cdot \ldots \cdot [a_n].$$
Submulţimea $A_0 = A^{n-1}/_\rho$ este un submonoid al monoidului
$$(G/\rho, \cdot) = \{[a_1^{n-1}];\ a_i \in S;\ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}.$$
Mai mult, dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un n-grup semicomutativ, atunci A_0 este un submonoid comutativ invariant.

Într-adevăr, pentru orice $[x_1^i] \in G/\rho$ şi orice $[a_1^{n-1}] \in A_0$ utilizând semicomutativitatea operaţiei n-are avem
$$\begin{aligned} [x_1^i][a_1^{n-1}] &= [x_1^{i-1}(x_i a_1^{n-1})_\circ] = [x_1^{i-1}(a_{n-1} a_1^{n-2} x_i)_\circ] \\ &= [x_1^{i-2}(x_{i-1} a_{n-1} a_1^{n-2})_\circ x_i] = [x_1^{i-2}(a_{n-2} a_{n-1} a_1^{n-3} x_{i-1})_\circ x_i] \\ &= [x_1^{i-3}(x_{i-2} a_{n-2} a_{n-1} a_1^{n-3})_\circ x_{i-1} x_i] \\ &= [x_1^{i-3}(a_{n-3} a_{n-2} a_{n-1} a_1^{n-4} x_{i-2})_\circ x_{i-1} x_i] \\ &= \ldots = \\ &= [a_{n-i}^{n-2}(a_{n-1} a_1^{n-i-1} x_1^i)_\circ] = [a_{n-i}^{n-1} a_1^{n-i-1}] \cdot [x_1^i] \end{aligned}$$
ceea ce demonstrează invarianţa submonoidului A_0. Monoidul G/ρ se numeşte înfăşurător al lui A. Cele două metode de reducere (cea în raport cu n-2 elemente fixe şi cea în raport cu relaţia de echivalenţă ρ) nu sunt independente, întrucât are loc teorema)

Teoremă 2.7.3. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95])

Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un n-semigrup cu unitate la dreapta u_1^{n-1}, atunci redusa sa în raport cu elementele $u_1^{m-2} \in A$, adică $(red_{u_1^{n-2}}, \cdot, v_1^{n-1})$ este un monoid izomorf cu submonoidul A_0 al lui G/ρ dacă şi numai dacă sistemul de $(n-1)$ elemente $u_{n-1}u_1^{n-2}$ este unitate la stânga în $(A, (\,)_\circ)$, adică n-semigrupul $(A, (\,)_\circ)$ este un n-monoid.

Demonstraţie. Fie u_1^{n-1} o unitate la dreapta şi $u_{m-1}u_1^{n-2}$ o unitate la stânga în $(A, (\,)_\circ)$ şi

$$f : Red_{u_1^{n-2}}A \to A_0;\;\; f(x) = [u_1^{n-2}x].$$

Atunci oricare ar fi $x, y \in A$, din $[u_1^{n-2}x] = [u_1^{n-2}y]$ rezultă că $(u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, y)_\circ$ şi deci $x = y$.

Prin urmare f este o aplicaţie injectivă.

Pentru orice $[a_1^{n-1}] \in A_0$ cu $(u_{n-1}\, a_1^{n-1})_\circ = (u_{n-1}, u_1^{n-2}, (u_{n-1}\, a_1^{n-1})_\circ)_\circ$ avem

$$[a_1^{n-1}] = [u_1^{n-2}(u_{n-1}a_1^{n-2})_\circ] = f((u_{n-1}a_1^{n-1})_\circ)$$

şi în concluzie f este o aplicaţie surjectivă.

Dacă $x, y \in red_{u_1^{n-2}}A$, atunci

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= [u_1^{n-2}(x \cdot y)] = [u_1^{n-2}(xu_1^{n-2}y)_\circ] \\ &= [u_1^{n-2}x] \cdot [u_1^{n-2}y] = f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

şi prin urmare f este un omomorfism. Rezultă că $red_{u_1^{n-2}}A$ este izomorf cu monoidul A_0.

Reciproc, dacă $red_{u_1^{n-2}}A$ este izomorf cu A_0, cum A_0 este semigrup cu unitatea $[u_1^{n-1}]$ şi $red_{u_1^{n-2}}A$ are unitate la dreapta u_{n-1}, rezultă că u_{n-1} este şi unitate la stânga.

Pentru orice $x \in A$, avem $x = u_{n-1} \cdot x = (u_{n-1}u_1^{n-2}x)_\circ$ ceea ce demonstrează că $u_{n-1}u_1^{n-2}$ este unitate la stânga în n-semigrupul $(A, (\,)_\circ)$. $\square$

Pentru problema inversă, aceea a definirii unor structuri n-are pornind de la structuri binare, construcţia este sugerată de teorema lui Hosszú. M. S. Pop în lucrarea [99] defineşte o structură n-ară care în particular dă extinderea n-ară 2.22 şi extinderea n-ară $(A, (\,)_\circ)$ a unui bigrup comutativ $(A, \cdot)$ în raport cu un element fix $c : (x_1^n)_\circ = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot c$.

Dacă $(A, \cdot)$ este un semigrup, $c \in A$ şi f un endomorfism al lui $(A, \cdot)$, iar pe A definim o operaţie $n-$ară "$(\,)_\circ$" astfel

$$(x_1^n)_\circ = x_1 \cdot f(x_2) \cdot f^2(x_3) \cdot \ldots \cdot f^{(n-1)}(x_n) \cdot c, \tag{2.23}$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ atunci $(A, ()_\circ)$ se numeşte *extinderea $n-$ară a lui $(A, \cdot)$ în raport cu endomorfismul f şi cu elementul fixat c*, notat prin $ext_{f,c}^n A$.

Teoremă 2.7.4. [99] *Dacă $(A, \cdot)$ este un bisemigrup şi f un endomorfism al lui $(A, \cdot)$ cu proprietatea că există $c \in A$ astfel încât*

$$(\forall)\, x \in A;\;\; f^n(x) \cdot f(c) = c \cdot f(x) \tag{4}$$

atunci $ext_{f,c}^n A$ este un $n-$semigrup.

automorfism şi $f^{-1}(a) = a$ iar $f^{-1}(a^{-1}) = (f^{-1}(a))^{-1} = a^{-1}$

În continuare, ne propunem să descriem câteva tipuri de reduceri şi extinderi de (n, m)- semiinele şi unele legături între proprietăţi ale (n, m)- semiinelelor iniţiale şi ale reduselor sau extinderilor lor.

Definiţie 2.7.2. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n, m)- semiinel, iar $u_1, u_2, ..., u_{m-2} \in S$ elemente arbitrare fixate. Algebra $(S, (\,)_+, \cdot)$ unde operaţia multiplicativă $\cdot : S^2 \to S$ este definită prin $x \cdot y = (x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ$ se numeşte *redusa binară a lui S în raport cu elementele $u_1, u_2, ..., u_{m-2} \in S$* şi se notează cu $red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$.

Se demonstrează uşor următoarele propoziţii :

Propoziţie 2.7.3. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) *Dacă $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-semiinel, atunci pentru orice*
elemente $u_1, u_2, ..., u_{m-2} \in S$, nu neapărat distincte, $red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, 2)$-semiinel.

Propoziţie 2.7.4. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) *Dacă $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-semiinel cu diviziune, atunci pentru orice $c \in S \setminus \{0\}$, $(n, 2)-$semiinelul redus, unde $\underline{c}$reprezintă transversala multiplicativă $red^{(n,2)}_{c^{m-3}\underline{c}}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) \overset{not}{=} red^{(n,2)}_{c}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ iar $\underline{c}$ reprezintă transversala multiplicativă este un $(n, 2)$-semiinel cu diviziune.*

Exemplul 2.7.1. Dacă considerăm (n, m)-semiinelul $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ din Exemplul 2.1.8 şi luăm elementele $u_1 = u_2 = ... = u_{m-2} = 0$, atunci obţinem redusa binară $(\mathbb{N}, (\,)_+, *)$ unde $k_1 * k_2 = (n-1)k_1k_2 + k_1 + k_2$.

Teoremă 2.7.5. *Dacă $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-inel cu diviziune atunci pentru orice $u_1, u_2, ..., u_{m-2}, c \in R$ avem $(red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}R, (\,)_+, \cdot) \cong (red^{(n,2)}_{c}R, (\,)_+, \odot)$*

Demonstraţie. Fie $(R, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n, m)-inel cu diviziune şi " $\odot$ " operaţia binară definită în $red^{(n,2)}_{c}R$. Aplicaţia $f : red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}R \to red^{(n,2)}_{c}R$, $f(x) = (c\, u_1^{m-2}\, x)_\circ$ este un omomorfism.
Într-adevăr, pentru orice $x, y \in red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}R$, aplicând distributivitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia n-ară "$(\,)_+$", pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in R$ vom avea

$$f((x_1^n)_+) = (c, u_1^{m-2}, (x_1^n)_+)_\circ = ((c\, u_1^{m-2}\, x_1)_\circ, ..., (c\, u_1^{m-2}\, x_n)_\circ)_+ = (f(x_1), ..., f(x_n))_+$$

respectiv

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= (c\, u_1^{m-2}\, x \cdot y)_\circ = (c, u_1^{m-2}, (x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ) \\ &= ((c\, u_1^{m-2}\, x)_\circ, u_1^{m-2}, y)_\circ = (((c\, u_1^{m-2}\, x)_\circ, \overset{(m-3)}{c}, \underline{c}, c)_\circ, u_1^{m-2}, y)_\circ \\ &= (f(x), \overset{(m-3)}{c}, \underline{c}, (c\, u_1^{m-2}\, y)_\circ)_\circ = (f(x), \overset{(m-3)}{c}, \underline{c}, f(y))_\circ = f(x) \odot f(y). \end{aligned}$$

Prin urmare f este un omomorfism de $(m, 2)$-inele.
Dacă $f(x) = f(y)$, adică $(c\,u_1^{m-2}\,x)_\circ = (c\,u_1^{m-2}\,y)_\circ$, atunci $c \cdot x = c \cdot y$. Deoarece $(red_{u_1^{m-2}}R, \cdot)$ este un grup, rezultă că $x = y$ şi deci omomorfismul f este injectiv.
Oricare ar fi $y \in red_c^{(n,2)}R$ ecuaţia $(c\,u_1^{m-2}\,x)_\circ = y$ are o soluţie unică în $(R, (\,)_\circ)$ deci există $x \in R$ cu proprietatea că $f(x) = y$ şi în concluzie f este omomorfism surjectiv. $\square$

Observaţie 2.7.1. Dacă u_1^{m-1} este o unitate la dreapta în (n, m)- semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci u_{m-1} este o unitate la dreapta în $(n, 2)$-semiinelul $red_{u_1^{m-2}}^{(n,2)}S$.

Pornind de la o structură de (n, m)-semiinel am definit redusa ei în raport cu $(m-2)$-elemente fixe.
În continuare, pornind de la un $(n, 2)$-semiinel vom defini un (n, m)- semiinel şi anume:

Definiţie 2.7.3. Dacă $(S, (\,)_+, \cdot)$ este un $(n, 2)-$semiinel, $c \in S$ element arbitrar fixat, α un endomorfism al lui $(S, (\,)_+, \cdot)$ iar $(\,)_\circ : S^m \to S$ operaţia definită prin

$$(x_1^m)_\circ = x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \alpha^2(x_3) \cdot \ldots \cdot \alpha^{(n-1)}(x_n) \cdot c, \tag{2.24}$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, atunci $(S, (\,)_+ (\,)_\circ)$
se numeşte (n, m)-*extinderea* $(n, 2)-$*semiinelului* S *în raport cu endomorfismul* α *şi cu elementul fixat* c, notat prin $ext_{\alpha,c}^{n,m}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$.

Propoziţie 2.7.5. (Maria S.Pop, **Adina Pop** [96]) *Dacă* $(S, (\,)_+, \cdot)$ *este un* $(n, 2)$-*semiinel,* $\alpha \in End(S, (\,)_+, \cdot)$, $c \in S$ *astfel încât are loc relaţia*

$$\alpha^m(x) \cdot \alpha(c) = c \cdot \alpha(x) \tag{2.25}$$

pentru orice $x \in S$, *atunci* $ext_{\alpha,c}^{(n,m)}(S, (\,)_+, \cdot)$ *este un* (n, m)-*semiinel.*

Demonstraţie. Dacă $x_1, x_2, \cdots, x_{2m-1} \in S$, atunci

$$\begin{aligned} ((x_1^m)_\circ, x_{m+1}^{2m-1})_\circ &= (x_1^m)_\circ \cdot \alpha(x_{m+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c \\ &= x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_m) \cdot c \cdot \alpha(x_{m+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, aplicând endomorfismul α relaţiei (2.25) obţinem $\alpha^{m+1}(x) \cdot \alpha^2(c) = \alpha(c) \cdot \alpha^2(x)$ pentru orice $x \in S$.
Prin induc ctie , aplicând de k ori, $k \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$, deducem că

$$\alpha^{m+k}(x) \cdot \alpha^{k+1}(c) = \alpha^k(c) \cdot \alpha^{k+1}(x) \tag{2.26}$$

Atunci, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ vom avea

$$\begin{aligned}
(x_1^k, (x_{k+1}^{k+m})_\circ, x_{k+m+1}^{2m-1})_\circ &= x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \alpha^2(x_3) \cdot \ldots \cdot \alpha^{k-1}(x_k) \cdot \alpha^k((x_{k+1}^{k+m})_\circ) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^{k+1}(x_{k+m+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c \\
&= x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \alpha^2(x_3) \cdot \ldots \cdot \alpha^{k-1}(x_k) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^k(x_{k+1} \cdot \alpha(x_{k+2}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{k+m}) \cdot c) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^{k+1}(x_{k+m+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c \\
&= x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \alpha^2(x_3) \cdot \ldots \cdot \alpha^{k-1}(x_k) \cdot \alpha^k(x_{k+1}) \cdot \alpha^{k+1}(x_{k+2}) \cdot \\
&\quad \ldots \cdot \alpha^{k+m-1}(x_{k+m}) \cdot \alpha^k(c) \cdot \alpha^{k+1}(x_{k+m+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c
\end{aligned}$$

De aici, utilizând relaţia (2.26) deducem că

$$\begin{aligned}
(x_1^k, (x_{k+1}^{k+m})_\circ, x_{k+m+1}^{2m-1})_\circ &= x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^k(x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{k+m-1}(x_{k+m}) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^{k+m}(x_{k+m+1}) \cdot \alpha^{k+1}(c) \cdot \alpha^{k+2}(x_{k+m+2}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c \\
&= \ldots = x_1 \cdot \alpha(x_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_m) \cdot c \cdot \alpha(x_{m+1}) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^2(x_{m+2}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(x_{2m-1}) \cdot c \\
&= ((x_1^m)_\circ, x_{m+1}^{2m-1})_\circ
\end{aligned}$$

ceea ce arată că operaţia m-ară "$(\,)_\circ$" este asociativă.
Pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in S$ şi pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ vom avea

$$\begin{aligned}
(y_1^{i-1}(x_1^n)_+ y_{i+1}^m)_\circ &= y_1 \cdot \alpha(y_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{i-2}(y_{i-1}) \cdot \alpha^{i-1}((x_1^n)_+) \cdot \alpha^i(y_{i+1}) \cdot \\
&\quad \cdot \alpha^{i+1}(y_{i+2}) \ldots \alpha^{m-1}(y_m) \cdot c \\
&= y_1 \cdot \alpha(y_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{i-2}(y_{i-1}) \cdot (\alpha^{i-1}(x_1), \ldots, \alpha^{i-1}(x_n))_+ \cdot \alpha^i(y_{i+1}) \\
&\quad \cdot \alpha^{i+1}(y_{i+2}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(y_m) \cdot c \\
&= (y_1 \cdot \alpha(y_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{i-2}(y_{i-1}) \cdot \alpha^{i-1}(x_1) \cdot \alpha^i(y_{i+1}) \ldots \alpha^{m-1}(y_m) \cdot c, \ldots, \\
&\quad y_1 \cdot \alpha(y_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{i-2}(y_{i-1}) \cdot \alpha^{i-1}(x_n) \cdot \alpha^i(y_{i+1}) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(y_m) \cdot c)_+ \\
&= ((y_1^{i-1}\, x_1\, y_{i+1}^m)_\circ, \ldots, (y_1^{i-1}\, x_n\, y_{i+1}^m)_\circ)_+
\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că operaţia m-ară "$(\,)_\circ$" este distributivă fată de operaţia n-ară "$(\,)_+$". Prin urmare, $ext_{\alpha,c}^{(n,m)}(S, (\,)_+, \cdot)$ este un (n, m)-semiinel. □

Conform Propoziţiei 3 şi Teoremei 3 [101] vom avea urmă toarele corolare care se verifică uşor

Corolar 2.7.1. *Fie $(S, (\,)_+, \cdot)$ un $(n, 2)$-semiinel cu diviziune, $\alpha \in End(S, (\,)_+, \cdot), c \in S$ un element fixat, atunci $(S, (\,)_+, (\,)_\circ) = ext_{\alpha,c}^{(n,m)}(S, (\,)_+, \cdot)$ este un (n, m)-semiinel cu diviziune dacă şi numai dacă $\alpha \in Aut(S, (\,)_+, \cdot)$ şi are loc condiţia* (2.25).

Corolar 2.7.2. *Fie* $(n,2)$*-semiinelul* $(S,(\,)_+,\cdot)$ *cu proprietatea că centrul său este nevid,* $Z(S)\neq\emptyset$ *şi* $c\in Z(S)$*. Atunci extinderea în raport cu endomorfismul identic* $ext^{(n,m)}_{1_S,c}(S,(\,)_+,\cdot)$ *este un* (n,m)*-semiinel.*

Demonstraţie. Deoarece c comută cu orice element din S, vom avea $1^m_S(x)\cdot c = x\cdot c = c\cdot x = c\cdot 1_S(x)$ şi conform Propoziţiei 2.7.5, $ext^{(n,m)}_{1_S,c}S$ este un (n,m)-semiinel. Operaţia m-ară definită în $ext^{(n,m)}_{1_S,c}(S,(\,)_+,\cdot)$ este

$$(x_1^m)_\circ = x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_m\cdot c = c\cdot x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_m.$$

Dacă $(n,2)$-semiinelul $(S,(\,)_+,\cdot)$ este comutativ, atunci $ext^{(n,m)}_{1_S,c}(S,(\,)_+,\cdot)$ este (n,m)-semiinel comutativ pentru orice $c\in S$ şi anume coincide cu extinderea definită de J. Timm [129]. $\square$

Corolar 2.7.3. *Dacă* e *este unitate multiplicativă la dreapta în* $(n,2)$*-semiinelul* $(S,(\,)_+,\cdot)$ *şi* $\alpha: S\to S, \alpha(x)=e\cdot x$*, atunci* $ext^{(n,m)}_{\alpha,e}(S,(\,)_+,\cdot)$ *este un* (n,m)*-semiinel în care elementul* e *este* 1*-unitate multiplicativă în* $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ *iar*
$red^{(n,2)}_{\overset{(m-2)}{e}}(ext^{(n,m)}_{\alpha,e}S)=(S,(\,)_+,\cdot)$.

Reamintim definiţia mulţimii tuturor unităţilor ca sistem de $(m-1)$elemente relativ la operaţia $m-$ară şi anume este mulţimea

$$U(S)=\{u_1^{m-1}\mid (x\,u_1^{m-1})_\circ = x = (u_{m-1}u_1^{m-2}\,x)_\circ\}.$$

Dacă în (n,m)-semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ$, perechea $(S,(\,)_\circ$ este un m-monoid cu $u_1^{m-1}\in U(S)$, atunci are loc următoarea teoremă care reprezintă o generalizare a teoremei lui Zupnik pentru $n-$semigrupuri [108].

Teoremă 2.7.6. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) *Fie* $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ *un* (n,m)*-semiinel. Dacă* $u_1^{m-1}\in U(S,(\,)_\circ)\,,U((S,(\,)_\circ))\neq\emptyset$*,* $\alpha: S\to S$*;* $\alpha(x)=(u_{m-1}\,x\,u_1^{m-2})_\circ$ *este o aplicaţie,* $(S,(\,)_+,\cdot)=red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ *şi* $c=u^{<1>}_{m-1}$*, atunci* $(S,(\,)_+,\cdot)$ *este un* $(n,2)$*-semiinel cu element neutru multiplicativ* u_{m-1}*,* α *este un endomorfism al* $(n,2)$*-semiinelul* S *şi*

$$ext^{(n,m)}_{\alpha,c}(red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S,(\,)_+,(\,)_\circ))=(S,(\,)_+,(\,)_\circ).$$

Demonstraţie. Dacă $u_1^{m-1}\in U(S)$, atunci conform Propoziţiei 2.7.3

$$(S,(\,)_+,\cdot)=red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$$

este un $(n,2)$-semiinel.
În plus

$$x\cdot u_{m-1}=(x\,u_1^{m-2}\,u_{m-1})_\circ=(x\,u_1^{m-1})_\circ=x$$

respectiv

$$u_{m-1} \cdot x = (u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, x)_\circ = x$$

pentru orice $x \in S$, adică u_{m-1} este element neutru multiplicativ în acest $(n,2)$-semiinel $(S, (\,)_+, \cdot)$.

Pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, x, y \in (S, (\,)_+, \cdot)$ aplicând distributivitatea opraţiei m-are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia n-ară "$(\,)_+$" obţinem

$$\begin{aligned}
\alpha((x_1^n)_+) &= (u_{m-1}, (x_1^n)_+, u_1^{m-2})_\circ = ((u_{m-1}\, x_1\, u_1^{m-2})_\circ, \ldots, (u_{m-1}\, x_n\, u_1^{m-2})_\circ)_+ \\
&= (\alpha(x_1), \cdots, \alpha(x_n))_+.
\end{aligned}$$

Folosind asociativitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" obţinem

$$\begin{aligned}
\alpha(x \cdot y) &= (u_{m-1}, x \cdot y, u_1^{m-2})_\circ = (u_{m-1}, (x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ, u_1^{m-2})_\circ \\
&= (((u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-1})_\circ, y, u_1^{m-2})_\circ \\
&= ((u_{m-1} x u_1^{m-2})_\circ u_1^{m-2} (u_{m-1} y u_1^{m-2})_\circ)_+ \\
&= (\alpha(x), u_1^{m-2}, \alpha(y))_\circ = \alpha(x) \cdot \alpha(y)
\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează că α este un endomorfism al $(n,2)$-seminelului $(S, (\,)_+, \cdot)$.

Dacă $c = u_{n-1}^{<1>}$, atunci pentru orice $x \in red_{u_1^{m-2}}^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ vom avea

$$\begin{aligned}
\alpha^m(x) \cdot \alpha(c) &= ((u_{m-1}, (\ldots (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, c\, u_1^{m-2})_\circ)_\circ \\
&= (((u_{m-1}, (\ldots (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-1})_\circ, c, u_1^{m-2})_\circ \\
&= (((u_{m-1}, (\ldots (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-1})_\circ, u_{m-1}^{<1>} u_1^{m-2})_\circ \\
&= ((u_{m-1}, (\ldots (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2})_\circ, u_{m-1}^{<1>}, u_1^{m-2})_\circ \\
&= (u_{m-1}, (((\ldots (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-1})_\circ, \overset{(m-1)}{u_{m-1}})_\circ, u_1^{m-2})_\circ \\
&= \ldots = (u_{m-1}^{<1>}\, x\, u_1^{m-2})_\circ = ((u_{m-1}^{<1>}\, u_1^{m-1})_\circ, x, u_1^{m-2})_\circ \\
&= (u_{m-1}^{<1>}, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, x\, u_1^{m-2})_\circ)_\circ = (c\, u_1^{m-2}\, \alpha(x))_\circ = c \cdot \alpha(x).
\end{aligned}$$

Deoarece condiţia (2.25) este îndeplinită rezultă că extinderea redusei lui S,

$$ext_{\alpha,c}^{(n,m)}(red_{u_1^{m-2}}^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) = (S, (\,)_+, (\,)_\bullet)$$

este un (n,m)-semiinel.

Pentru orice $x, y \in S$ observăm că

$$\begin{aligned}
x \cdot \alpha(y) &= (x\, u_1^{m-2}\, \alpha(y))_\circ = (x, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, y\, u_1^{m-2})_\circ)_\circ \\
&= ((x\, u_1^{m-1})_\circ, y, u_1^{m-2})_\circ = (x\, y\, u_1^{m-2})_\circ.
\end{aligned}$$

În continuare, pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, aplicând definiţia operaţiei $n-$are care extinde operaţia binară redusă şi definiţia aplicaţiei α avem

$$\begin{aligned}
(x_1^m)_\bullet &= ((\ldots((x_1 \cdot \alpha(x_2)) \cdot \alpha^2(x_3))\ldots) \cdot \alpha^{m-1}(x_m)) \cdot c \\
&= (((\ldots((x_1, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, x_2\, u_1^{m-2})_\circ)_\circ) \cdot \alpha^2(x_3)\ldots) \cdot \alpha^{m-1}(x_m)) \cdot c \\
&= (((\ldots((x_1\, x_2\, u_1^{m-2})_\circ \cdot \alpha^2(x_3))\ldots) \cdot \alpha^{m-1}(x_m)) \cdot c \\
&= (((\ldots((x_1\, x_2\, u_1^{m-2})_\circ, \alpha(x_3), u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, \alpha^{m-2}(x_m), u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-2}, u_{m-1}^{<1>})_\circ \\
&= (((x_1, ((\ldots((x_2, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, x_3\, u_1^{m-2})_\circ)_\circ, u_1^{m-2}, \alpha^2(x_4))_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2}, \alpha^{m-2}(x_m))_\circ \\
&\quad , u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-1})_\circ, \overset{(m-1)}{u_{m-1}})_\circ \\
&= ((x_1, ((\ldots((x_2\, x_3\, u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-2}, \alpha^2(x_4))_\circ \ldots)_\circ, u_1^{m-2}, \alpha^{m-2}(x_m))_\circ, u_1^{m-2})_\circ, \overset{(m-1)}{u_{m-1}})_\circ \\
&= (x_1, (((\ldots((x_2\, x_3\, u_1^{m-2})_\circ, \alpha(x_4), u_1^{m-2})_\circ \ldots)_\circ, \alpha^{m-3}(x_m), u_1^{m-2})_\circ, u_1^{m-1})_\circ\, \overset{(m-2)}{u_{m-1}})_\circ \\
&= \ldots = (x_1^{m-2}, ((x_{m-1}\, u_1^{m-2}\, \alpha(x_m))_\circ, u_1^{m-1})_\circ, u_{m-1})_\circ \\
&= (x_1^{m-2}, (x_{m-1}\, x_m\, u_1^{m-2})_\circ, u_{m-1})_\circ = ((x_1^m)_\circ, u_1^{m-1})_\circ = (x_1^m)_\circ
\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că $ext_{\alpha,c}^{(n,m)}(red_{u_1^{m-2}}^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) = (S, (\,)_+, (\,)_\circ)$. $\square$

Observaţie 2.7.2. *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n, m)-semiinel cu diviziune, iar $a \in S$ un element fixat.*

Atunci există $c = a^{<1>} \in S$ astfel încât $(S, (\,)_+, \cdot) = red_a^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, 2)$-semiinel cu diviziune, cu element neutru multiplicativ a.

Aplicaţia $\alpha : S \to S$, $\alpha(x) = (a\, x\, \overset{(m-3)}{a}\, \underline{a})_\circ$ este un automorfism al $(n, 2)$-semiinelului $(S, (\,)_+, \cdot)$ şi are loc egalitatea

$$ext_{\alpha,c}^{(n,2)}(red_a^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) = (S, (\,)_+, (\,)_\circ)$$

.

În cele ce urmează, vom preciza câteva legături între proprietăţile unui (n, m)-semiinel şi proprietăţile $(n, 2)$-semiinelului său redus. Astfel teoremele de mai jos extind unele rezultate din cazul congruenţelor definite pe n-semigrupuri [106]

Teoremă 2.7.7. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n, m)-semiinel, $u_1, u_2, \ldots, u_{m-2} \in S$ elemente arbitrare fixate ale lui S şi $red_{u_1^{m-2}}^{(n,2)}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) \overset{not}{=} B$*

i) Dacă ρ este o congruenţă pe (n, m)-semiinelul S, atunci ρ este o congruenţă pe $(n, 2)$-semiinelul redus B.

ii) Dacă $U(S, (\,)_\circ) \neq \emptyset$ şi $u_1^{m-1} \in U(S)$ iar $a, b \in S$ astfel încât

$$a\rho b \Rightarrow (u_{m-1}\, a\, u_1^{m-2})_\circ \rho (u_{m-1}\, b\, u_1^{m-2})_\circ$$

atunci şi afirmaţia reciprocă este adevărată.

Demonstraţie. i) Afirmaţia i) este imediată.

ii) Fie ρ o relaţie congruenţă pe $(n,2)$-semiinelul B. Conform Teoremei 2.7.6 şi Definiţiei 2.7.3 vom avea

$$(x\, d_1^{m-1})_\circ = x \cdot \alpha(d_1) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(d_{m-1}) \cdot c$$

respectiv

$$(d_1\, x\, d_2^{m-1})_\circ = d_1 \cdot \alpha(x) \cdot \alpha^2(d_2) \cdot \ldots \cdot \alpha^{m-1}(d_{m-1}) \cdot c$$

Deoarece $a\rho b$ implică $\alpha^i(a)\,\rho\,\alpha^i(b)$,oricare ar fi $i \in \{1,2,\ldots,m-1\}$ vom obţine că

$$(a\, d_1^{m-1})_\circ\, \rho\, (b\, d_1^{m-1})_\circ$$

şi

$$(d_1\, a\, d_2^{m-1})_\circ \rho (d_1\, b\, d_2^{m-1})_\circ$$

Conform Conform Teoremei 2.4.1 rezultă ca ρ este o relaţie de congruenţă pe (n,m)-semiinelul S.

□

Următoarea teoremă ne dă o legătură dintre idealele unui (n,m)-semiinel şi idealele $(n,2)$-redusei sale, extinzând unele rezultate similare din cazul $(n,m)-$inelelor a lui Iancu L. [62].

Reamintim că un ideal lateral I al unui $(n,m)-$semiinel cu unitate la dreapta u_1^{m-1} se numeşte prim dacă $I \neq S$ şi are loc implicaţia:

$$(x_1^m)_\circ \in I \Rightarrow x_1 \in I \,\text{sau}\, x_n \in I\text{sau}\, (u_{m-1}\, x_2^{m-1}\, u_{m-1})_\circ \in I.$$

Teoremă 2.7.8. (Maria S.Pop, **Adina Pop**[96]) *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un (n,m)-semiinel, $u_1, u_2, \ldots, u_{m-2} \in S$ elemente arbitrare fixate ale lui S şi $red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S, (\,)_+, (\,)_\circ) \overset{not}{=} B$. Au loc următoarele afirmaţii:*

i) Dacă mulţimea $A \subseteq S$ este un 1-ideal în (n,m)-semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci A este un ideal drept în $(n,2)$-semiinelul $(B, (\,)_+, \cdot)$. Dacă, în plus, u_1^{m-1} este o unitate multiplicativă la dreapta ca sistem de $(m-1)$ elemente în S, atunci şi afirmaţia reciprocă este adevărată.

ii) Dacă mulţimea $A \subseteq S$ este un m-ideal al (n,m)-semiinelului S, atunci A este un ideal stâng al lui B. Dacă, în plus, $u_{m-1}u_1^{m-2}$ este o unitate la stânga ca sistem de $(m-1)$ elemente în S, atunci şi afirmaţia reciprocă este adevărată.

iii) *Dacă în (n,m)-semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, $u_1^{m-1} \in U(S,(\,)_\circ)$, atunci submulţimea $I \subseteq S$ este ideal lateral complet prim în S dacă şi numai dacă I este un ideal complet prim al lui $B = red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$.*

Demonstraţie. i) Dacă $A \subseteq S$ este un 1-ideal în (n,m)-semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, atunci pentru orice $a \in A$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1} \in S$ vom avea $(a\, x_1^{m-1})_\circ \in A$. Considerând $(n,2)$-semiinelul $B = red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}}(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, $a \in A$, atunci pentru orice $y \in S$ vom avea $a \cdot y = (a\, u_1^{m-2}\, y)_\circ \in A$.

În concluzie A este ideal drept în $(n,2)$-semiinelul B. Dacă u_1^{m-1} este o unitate multiplicativă la dreapta ca sistem de $(m-1)$ elemente în (n,m)-semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ şi A este un ideal drept în $(n,2)$-semiinelul $(B,(\,)_+,\cdot)$, atunci pentru orice $a \in A$ şi orice $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1} \in S$ avem

$$\begin{aligned}(a\, x_1^{m-1})_\circ &= ((a\, u_1^{m-1})_\circ, x_1^{m-1})_\circ = (a\, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, x_1^{m-1})_\circ)_\circ \\ &= a \cdot (u_{m-1} x_1^{m-1})_\circ \in A\end{aligned}$$

ceea ce ne arată că A este un 1-ideal în (n,m)-semiinelul S.

ii) Raţionamentul este analog punctului i).

iii) Conform punctului i) şi ii) rezultă că, dacă I este un 1-ideal şi m-ideal în (n,m)-semiinelul S rezultă că A este ideal în $(n,2)$-semiinelul B. Presupunem în continuare ca A este ideal lateral complet prim în (n,m)-semiinelul B şi $x \cdot y \in I$. De aici rezultă că $(x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ \in I$ şi prin urmare $x \in I$ sau $y \in I$ sau $(u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, u_{m-1})_\circ \in I$. Ultima afirmaţie nu poate fi adevărată, deoarece ar rezulta ca $u_{m-1} \in I$ ceea ce ne-ar conduce la $I = S$. În concluzie I este ideal prim al $(n,2)$-semiinelul B.
Reciproc, dacă $u_1^{m-2} \in U(S,(\,)_\circ)$, I ideal in B rezultă că pentru orice $x \in S$ avem $(x\, u_1^{m-2})_\circ = (u_{m-2}\, u_1^{m-1}\, x)_\circ = x$ şi conform punctelor i) şi ii) rezultă că I este ideal lateral al (n,m)-semiinelului $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$.

Presupunem că I este ideal complet prim în B şi că $(x_1^m)_\circ \in I$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$. Acest lucru ne conduce la

$$((x_1\, u_1^{m-1})_\circ, x_2^{m-1}, (u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, x_m)_\circ)_\circ \in I.$$

Folosind asociativitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" vom avea

$$((x_1, u_1^{m-2}, (u_{m-1}\, x_2^{m-1}\, u_{m-1})_\circ)_\circ, u_1^{m-2}, x_m)_\circ \in I.$$

Aceasta ne arată că

$$x_1 \cdot (u_{m-1}\, x_2^{m-1}\, u_{m-1})_\circ \cdot x_m \in I.$$

Deoarece I este ideal complet prim în $(n,2)-$semiinelul redus, de aici vom avea $x_1 \in I$ sau $(u_{m-1}\, x_2^{m-1}\, u_{m-1})_\circ \in I$ sau $x_m \in I$.

În concluzie I este ideal lateral complet prim în (n,m)-semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$.

□

Teoremă 2.7.9. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [96]) *Fie* $(S_1, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *şi* $(S_2, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *două* (n,m)*-semiinele,* $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1} \in S_1$*,* $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1} \in S_2$ *cu proprietatea că* v_1^{m-1} *este element unitate la dreapta ca sistem de* $(m-1)$*elemente în* S_2*.*

i) Dacă $f : S_1 \to S_2$ *este un omomorfism de* (n,m)*-semiinele, atunci aplicaţia*

$$\bar{f} : red^{(n,2)}_{u_1^{m-2}} S_1 \to red^{(n,2)}_{v_1^{m-2}} S_2;\;\; \bar{f}(x) = (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ$$

este un omomorfism de $(n,2)$*-semiinele;*

ii) Dacă $\bar{f}$ *este o aplicaţie injectivă, atunci* f *are aceeaşi proprietate.*
Dacă $u_{m-1}u_1^{m-2}$ *este o unitate multiplicativă la stânga, ca sistem de* $(m-1)$ *elemente în* $(n,m)-$*semiinelul* $(S, (\,)+, (\,)_\circ)$ *şi* f *este aplicaţie injectivă atunci şi* $\bar{f}$ *este aplicaţie injectivă;*

iii) Dacă u_1^{m-1} *este o unitate multiplicativă la dreapta, ca sistem de* $(m-1)$ *elemente în* S_1 *şi* $v_1^{m-1} \in U(S_2, (\,)_\circ)$ *iar* f *este o aplicaţie surjectivă, atunci* $\bar{f}$ *este o aplicaţie surjectivă;*

iv) Dacă $u_{m-1}u_1^{m-2}$ *este o unitate multiplicativă la stânga, ca sistem de* $(m-1)$ *elemente în* S_1*,* $v_1^{m-1} \in U(S_2, (\,)_\circ)$ *iar* $v_{m-1} \in f(S_1)$*, atunci* $\bar{f}$ *aplicaţie surjectivă implică* f *aplicaţie surjectivă;*

v) Dacă u_1^{m-1} *este o unitate multiplicativă la dreapta, ca sistem de* $(m-1)$ *elemente în* S_1 *şi* $v_{m-1} \in f(S_1)$*, atunci* $\bar{f}(u_{m-1}) = v_{m-1}$*.*

Demonstraţie. i) Folosind distributivitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" faţă de operaţia n-ară "$(\,)_+$" vom avea

$$\begin{aligned}
\bar{f}((x_1^n)_+) &= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f((x_1^n)_+))_\circ = \\
&= ((v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x_1))_\circ, \ldots \\
&\quad , (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x_n))_\circ)_+ \\
&= (\bar{f}(x_1), \ldots, \bar{f}(x_n))_+
\end{aligned}$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S_1$.

Atunci, oricare ar fi $x, y \in S_1$ vom obţine

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y) &= (\bar{f}(x), v_1^{m-2}, \bar{f}(x))_\circ \\
&= ((v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ, v_1^{m-2}, \\
&\quad (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(y))_\circ)_\circ \\
&= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2})((f(x), v_1^{m-1})_\circ, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(y))_\circ)_\circ \\
&= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), (f(x)f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(y))_\circ)_\circ.
\end{aligned}$$

Deoarece f este omomorfism de (n, m)-semiinele rezultă că

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) \cdot \bar{f}(y) &= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f((x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ))_\circ \\
&= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x \cdot y))_\circ \\
&= \bar{f}(x \cdot y).
\end{aligned}$$

ii) Presupunem că $\bar{f}$ este aplicaţie injectivă şi $f(x) = f(y)$, $x, y \in S$. Din definiţia lui $\bar{f}$ rezultă că $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$ şi în concluzie $x = y$.

Reciproc, dacă $x, y \in S_1$ cu proprietatea ca $\bar{f}(x) = \bar{f}(y)$, atunci

$$(f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, \bar{f}(x))_\circ = (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, \bar{f}(y))_\circ,$$

respectiv

$$\begin{aligned}
&(f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ)_\circ \\
&= (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(y))_\circ)_\circ.
\end{aligned}$$

Aplicând asociativitatea operaţiei m-are "$(\,)_\circ$" precum şi faptul că v_1^{m-1} este o unitate multiplicativă la dreapta ca sistem de $(m-1)$elemente în (n, m)-semiinelul S_2 vom obţine

$$(f(u_{m-1}), f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ = (f(u_{m-1}), f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(y))_\circ.$$

Deoarece f este un omomorfism de (n, m)-semiinele, iar $u_{m-1}u_1^{m-2}$ este o unitate multiplicativă la stânga în ca sistem de $(m-1)$elemente în S_1 vom avea $f(x) = f(y)$ ceea ce ne conduce la $x = y$.

În concluzie $\bar{f}$ este un omomorfism injectiv.

iii) Dacă f este surjectiv, atunci pentru orice $y \in S_2$ există $x \in S_1$ astfel încât $f(x) = (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, y)_\circ$.

Prin urmare

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, y)_\circ)_\circ \\ &= ((v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(u_{m-1}))_\circ, v_1^{m-2}, y)_\circ\end{aligned}$$

Deoarece secvenţa $f(u_1)f(u_2)\ldots f(u_{m-1})$ este o unitate multiplicativă la dreapta ca sistem de $(m-1)$ elemente în $f(S_1)$, rezultă că

$$\bar{f}(x) = (v_{m-1}\, v_1^{m-2}\, y)_\circ = y.$$

În concluzie $\bar{f}$ este surjectiv.

iv) Presupunem că $\bar{f}$ este omomorfism surjectiv şi fie un element $y \in S_2$. Rezultă că există $x \in S_1$ astfel încât

$$\bar{f}(x) = (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), y)_\circ.$$

În plus, multiplicând ambii membrii ai egalităţii de mai sus cu $f(u_{m-1})v_1^{m-2}$, obţinem

$$(f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, \bar{f}(x))_\circ = (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), y)_\circ)_\circ$$

respectiv

$$\begin{aligned}(f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, \bar{f}(x))_\circ &= ((f(u_{m-1}), v_1^{m-1})_\circ, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), y)_\circ \\ &= (f(u_{m-1}), f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), y)_\circ.\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}(f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, \bar{f}(x))_\circ &= (f(u_{m-1}), v_1^{m-2}, (v_{m-1}, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ)_\circ \\ &= ((f(u_{m-1}), v_1^{m-1})_\circ, f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ \\ &= (f(u_{m-1}), f(u_1), \ldots, f(u_{m-2}), f(x))_\circ \\ &= f((u_{m-1}\, u_1^{m-2}\, x)_\circ) = f(x)\end{aligned}$$

Prin urmare, deoarece secvenţa $f(u_{m-1})f(u_1)\ldots f(u_{m-2})$ este o unitate multiplicativă la stânga ca sistem de $(m-1)$ elemente în $f(S_1)$

$$\begin{aligned}f(x) &= (f(u_{m-1}), f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_{m-2}), y)_\circ \\ &= (f(u_{m-1}), f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_{m-2}), (v_{m-1}\, v_1^{m-2}\, y)_\circ)_\circ \\ &= ((f(u_{m-1}), f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_{m-2}), v_{m-1})_\circ, v_1^{m-2}, y)_\circ \\ &= (v_{m-1}\, v_1^{m-2}\, y)_\circ = y\end{aligned}$$

adică f este omomorfism surjectiv.

v) Implicaţia este imediată.

□

Observaţie 2.7.3. Dacă $S, (\,)_+, (\,)_\circ$ este un $(n,m)-$semiinel care are element zero, atunci putem obţine redusa binară a lui S, adică un $(2,2)-$semiinel , în raport cu elementul zero, 0 şi elemente oarecare, fixate $u_1, u_2, ..., u_{m-2} \in S$.

Într-adevăr, dacă definim operaţiile binare pe S astfel:

$$x + y = (x \overset{(n-2)}{0} y)_+$$

şi

$$x \cdot y = (x\, u_1^{m-2}\, y)_\circ$$

obţinem $(2,2)-$semiinelul $(S, +, \cdot)$.
Menţionăm faptul că un $(n,m)-$semiinel S nu poate fi redus în raport cu orice elemente fixate a_1^{n-2}, b_1^{n-2} pentru a obţine un semiinel aşa cum s-a prezentat în Exemplul 3.3 (ii) de către S. E. Alam, S. Rao în lucrarea [2] deoarece în aceste condiţii nu este verificată distributivitatea înmulţirii " $\cdot$ " faţă de adunare " $+$ " .

Capitolul 3

Structuri algebrice poliadice ordonate

3.1 $n-$Semigrupuri şi $n-$monoizi ordonaţi

În acest paragraf vom generaliza pentru $n-$semigrupuri noţiunile de semigrup parţial ordonat şi pozitiv ordonat, $n-$monoid parţial ordonat şi pozitiv ordonat şi vom defini anumite relaţii de preordine şi de ordine.

Crombez [23], Uşan [131] au studiat $n-$grupurile parţial ordonate. Crombez a definit noţiunile de element pozitiv şi element negativ în $n-$grupuri şi a studiat anumite proprietăţi ale lor. Adina Pop şi Maria S. Pop în lucrarea [91] au definit şi studiat unele proprietăţi ale n-semigrupurilor parţial ordonate.

Definiţie 3.1.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [91]) Structura algebrică $(A, (\,)_\circ, \leq)$ care satisface următoarele condiţii:

O$_1$: $(A, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup ($n-$grup);

O$_2$: $(A, \leq)$ este o mulţime parţial ordonată (preordonată);

O$_3$: $a \leq b$ implică $(c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ \leq (c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ$,

oricare ar fi $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n \in A$

se numeşte $n-$*semigrup parţial ordonat (preordonat)*.

Dacă relaţia "$\leq$" este total ordonată, atunci n-semigrupul $(A, (\,)_\circ, \leq)$ este total ordonat.

Dacă a şi b nu se pot compara, atunci notăm acest lucru prin $a \| b$.

Observaţie 3.1.1. Folosind proprietatea de tranzitivitate a relaţiei "$\leq$" vom avea

O$_4$: dacă $a_i \leq b_i$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ atunci $(a_{\sigma(1)}^{\sigma(n)})_\circ \leq (b_{\sigma(1)}^{\sigma(n)})_\circ$ unde σ este o permutare arbitrară a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Observaţie 3.1.2. Dacă $(A,(\,)_\circ,\leq)$ este un $n-$semigrup parţial ordonat şi elementele $a,b\in A$ au transversalele $\overline{a},\overline{b}$, atunci $a\leq b$ întrucât $\overline{b}=(\overline{b},a,a...,\overline{a})_+\leq(\overline{b},b,b...,b,\overline{a})_+=\overline{a}$ implică $\overline{b}\leq\overline{a}$.
Reciproc, dacă $\overline{b}\leq\overline{a}$ şi $a\neq b$ atunci $a<b$ sau $a\|b$.

Ca şi în cazul $n-$grupurilor parţial ordonate definite de Crombez [24], definim următoarele noţiuni:

Definiţie 3.1.2. (**Adina Pop**, Maria.S.Pop [91])

1) Un element $a\in A$ se numeşte $i-$*pozitiv* dacă $(\overset{(i-1)}{a}\,x\,\overset{(n-i)}{a})_\circ\geq x$ pentru orice $x\in A$. Dacă a este $i-$pozitiv pentru orice $i\in\{1,2,\dots,n\}$ atunci a se numeşte *element pozitiv.* Dual se defineşte *elementul* $i-$*negativ*, $i\in\{1,2,\dots,n\}$ şi *element negativ.*

2) Un $n-$semigrup parţial ordonat se numeşte *pozitiv (negativ) ordonat* dacă toate elementele sale sunt pozitive (negative).

3) Spunem că un $n-$semigrup parţial ordonat este ordonat natural dacă este *pozitiv ordonat* şi
$a<b$ implică $(a\,x_1^{n-1})_\circ=(y_1^{n-1}\,a)_\circ=b$ pentru anumiţi
$x_1,...,x_{n-1},y_1,...,y_{n-1}\in A$.

Exemplul 3.1.1. *Dacă* $A=\{k=1+x(n-1)\,;x\in\mathbb{N}\}$ *şi* $(k_1^n)_\circ=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$, *atunci* $(A,(\,)_\circ)$ *este un* $n-$*semigrup comutativ pozitiv ordonat relativ la relaţia de ordine naturală a întregilor pozitivi.*

Propoziţie 3.1.1. (**Adina Pop**, M.S.Pop [91]) *Fie* $(A,(\,)_\circ,\leq)$ *un* $n-$*semigrup parţial ordonat cu* u_1^{n-1} *o unitate la dreapta respectiv la stânga ca sistem de* $(n-1)$*elemente.*
1) *Dacă* $u_{n-1}\leq(u_{n-1}\,\overset{(n-1)}{a})_\circ$, *atunci* a *este* $1-$*pozitiv, respectiv* $n-$*pozitiv.*
2) *În particular, dacă* $u_1^{n-1}\in U(A)$ *şi elementele* u_i *sunt comparabile cu* a *astfel încât* $u_i\leq a$*;* $i\in\{1,2,...,n-1\}$, *atunci* a *este* $1-$*pozitiv şi* $n-$*pozitiv.*
Dacă în plus u_1^{n-1} *este element neutru poliadic, atunci* a *este pozitiv.*

Demonstraţie. 1) Pentru orice $x\in A$, din ipoteză, avem

$$\begin{aligned} x &= (x\,u_1^{n-1})_\circ\leq(x,u_1^{n-2},(u_{n-1}\,\overset{(n-1)}{a})_\circ)_\circ\\ &= ((x\,u_1^{n-2}u_{n-1})_\circ\,\overset{(n-1)}{a})_\circ=(x\,\overset{(n-1)}{a})_\circ \end{aligned}$$

deci a este $1-$pozitiv.
Analog

$$\begin{aligned} x &= (u_1^{n-1}\,x)_\circ\leq(u_1^{n-2},(u_{n-1}\,\overset{(n-1)}{a})_\circ,x)_\circ\\ &= ((u_1^{n-2}u_{n-1},(\overset{n-1}{a}\,x)_\circ)_\circ=(\overset{(n-1)}{a}\,x)_\circ \end{aligned}$$

deci a este element $n-$pozitiv.
2) Conform compatibilităţii relaţiei de ordine cu operaţia $n-$ară, din $u_i \le a$; $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, se deduce că $u_{n-1} \le (u_{n-1} \overset{(n-1)}{a})_\circ$. În plus, dacă $(u_i^{n-1}\, x\, u_1^{i-1})_\circ = x$, pentru orice $x \in A$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, vom obţine

$$x \;=\; (u_i^{n-1}\, x\, u_1^{i-1})_\circ \le (\overset{(n-i)}{a}\, x\, \overset{(i)}{a})_\circ$$

oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. În concluzie a este pozitiv. □

Deoarece într-un grup sistemul de elemente $\overset{(i-2)}{a}\,\overline{a}\,\overset{(n-i)}{a} \in U(A)$, adică este unitate ca sistem de $(n-1)$ elemente din Propoziţia 3.1.1 regăsim un rezultat al lui Crombez [24].

Corolar 3.1.1. [24] *Dacă $(A, (\,)_\circ, \le)$ este un $n-$grup parţial ordonat atunci elementul $a \in A$ este $1-$pozitiv ($n-$pozitiv) dacă şi numai dacă există un element $x_0 \in A$ astfel încât $x_0 \le (x_0 \overset{(n-1)}{a})_\circ$($x_0 \le (\overset{(n-1)}{a} x_0)_\circ$). Mai mult, dacă $x_0 = a$ avem*

$$a \in A\, este\, 1 - pozitiv\ şi\ \ n - pozitiv \Leftrightarrow a \le a^{[1]}$$

.

La fel ca şi în cazul binar se demonstrează în cazul $n-$semigrupurilor următoarea propoziţie:

Propoziţie 3.1.2. *Fie $n-$semigrupul parţial ordonat $(A, (\,)_\circ, \le)$.*
1) *Dacă A are un element neutru $e \in A$, atunci e este atât pozitiv cât şi negativ. Reciproc, dacă un $n-$semigrup ordonat posedă un element care este atât pozitiv cât şi negativ, atunci el este element neutru în A.*
2) *Dacă $e \in A$ este element neutru şi $a \in A$ este comparabil cu e, atunci*

$$e \le a \Rightarrow a\, pozitiv$$

şi

$$a \le e \Rightarrow a\, negativ$$

Demonstraţie. Conform definiţiei elementului neutru avem pentru orice $x \in A$, $x = (\overset{(i-1)}{e}\, x\, \overset{(n-i)}{e})_\circ$. Deoarece relaţia de ordine "$\le$" este reflexivă, rezultă că e este atât pozitiv cât şi negativ.
Reciproc, dacă $a \in A$ este pozitiv şi negativ, pentru orice $x \in A$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ avem $x \le (\overset{(i-1)}{a}\, x\, \overset{(n-i)}{a})_\circ$ şi $(\overset{(i-1)}{a}\, x\, \overset{(n-i)}{a})_\circ \le x$.
Datorită antisimetriei relaţiei "$\le$" vom obţine $x = (\overset{(i-1)}{a}\, x\, \overset{(n-i)}{a})_\circ$, ceea ce ne arată că

a este element neutru.
2) Conform lui O_4 şi faptul că $e \le a$, rezultă că $x = (\overset{(i-1)}{e}\, x \,\overset{(n-i)}{e})_\circ \le (\overset{(i-1)}{a}\, x\, \overset{(n-i)}{a})_\circ$, oricare ar fi $x \in A$, ceea ce ne arată că a este pozitiv.
Analog se arată că a este negativ. □

Corolar 3.1.2. 1) *Dacă $n-$semigrupul parţial ordonat $(A, (\,)_\circ, \le)$ are două elemente neutre comparabile e_1 şi e_2, atunci $e_1 = e_2$.*
2) *Un $n-$semigrup ($n-$monoid, $n-$grup) total ordonat are cel mult un element neutru.*
3) *Dacă $(A, (\,)_\circ, \le)$ este un $n-$semigrup total ordonat cu element neutru, atunci fiecare element este sau pozitiv sau negativ.*

Demonstraţie. 1) Presupunem că $e_1 \le e_2$. Atunci $(\overset{(n-1)}{e_1}\, e_2)_\circ \le (e_1\, \overset{(n-1)}{e_2})_\circ$, de unde rezultă că $e_2 \le e_1$. Relaţia $\le$ fiind antisimetrică obţinem că $e_1 = e_2$.
2) Evident.
3) Rezultă imediat din Propoziţia 3.1.2 . □

Afirmaţiile de mai sus generalizează rezultatele lui G. Crombez [23] obţinute în cazul $n-$grupurilor.

În continuare vom studia unele relaţii de preordine sau relaţii de ordine definite pe $n-$monoizi.

Pentru început, reamintim definiţia $n-$monoidului introdusă în Capitolul 1.

Definiţie 3.1.3. Un $n-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ se numeşte $n-$*monoid* dacă există cel puţin o unitate, ca sistem de elemente $u_1^{n-1} \in A$ astfel încât $(x u_1^{n-1})_\circ = x = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, x)_\circ$ pentru orice $x \in A$. Sistemul de elemente u_1^{n-1} este unitate la dreapta şi $u_{n-1} u_1^{n-2}$ este unitate la stânga.

Mulţimea $U(A, (\,)_\circ)$ este mulţimea tuturor unităţilor ca sistem de elemente

$$U(A, (\,)_\circ) = \{u_1^{n-1} \in A; (x\, u_1^{n-1})_\circ = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, x) = x\,, (\forall)\, x \in A\}.$$

Reaminitim faptul că un $n-$semigrup semicomutativ cu o unitate la dreapta este un $n-$monoid şi orice $n-$grup este un $n-$monoid.

Maria S.Pop ş Adina Pop în lucrarea [95]) au definit noţiunea de n-monoid pozitiv preordonat generalizând noţiunea de monoid pozitiv ordonat definit în lucrarea lui Wehrung în [142].

Definiţie 3.1.4. (Maria S. Pop , **Adina Pop** [95]) Se numeşte $n-$*monoid pozitiv preordonat* (pe scurt P.O.$n-$M) o structură algebrică $\mathbf{A} = (A, (\,)_\circ, U(A), \le)$ care îndeplineşte condiţiile:

$O_1 : (A, (\,)_\circ, U(A))$ este un $n-$monoid semicomutativ.

$O_2 : (A, \leq)$ este o mulţime preordonată relativ la relaţia "$\leq$" şi pentru orice unitate $(n-1)-$adică, $u_1^{n-1} \in U(A)$ avem $u_{n-1} \leq a$ oricare ar fi $a \in A$.

O_3 : Dacă a, b sunt elemente din A, atunci $a \leq b$ implică

$$a \leq b \Rightarrow (c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ \leq (c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ \tag{3.1}$$

pentru orice $c_1, c_2, ..., c_n \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Observaţie 3.1.3. Deoarece $n-$monoidul $(A, (\,)_\circ, U(A)$ este semicomutativ, el este şi entropic. Rezultă că, dacă $u_1^{n-1} \in U(A, (\,)_\circ)$ atunci $u_{n-i}^{n-1} u_1^{n-i-1} \in U(A, (\,)_\circ)$ şi $u_{n-i}^{n-1} u_1^{n-i-1}$ este unitate laterală. Prin urmare $u_i \leq a$, oricare ar fi $a \in A$.

Observaţie 3.1.4. Conform Observaţiei 3.1.3 rezultăcă Definiţia 3.1.4 şi Definiţia 3.1.2, punctul 2) sunt echivalente.

Observaţie 3.1.5. Dacă un $n-$monoid este pozitiv total ordonat, atunci are o singură unitate ca sistem de $(n-1)$elemente.

În continuare vom arăta că nu toate inegalităţile (3.1) sunt necesare.

Propoziţie 3.1.3. (Maria S. Pop , **Adina Pop** [95]) *Dacă condiţia O_3 are loc pentru $i = 1$ şi $i = 2$ atunci are loc pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă

$$a \leq b \Rightarrow (a\, c_2^n)_\circ \leq (b\, c_2^n)_\circ \text{ şi } (c_1\, a\, c_3^n)_\circ \leq (c_1 3\, b\, c_3^n)_\circ$$

oricare ar fi $c_1, c_2, ..., c_n \in A$, atunci

$$(c_2\, a\, u_1^{n-2})_\circ \leq (c_2\, b\, u_1^{n-2})_\circ$$

şi

$$\begin{aligned} (c_1\, c_2\, a\, c_4^n)_\circ &= (c_1, c_2, (a\, u_1^{n-1})_\circ, c_4^n)_\circ = (c_1, (c_2\, a\, u_1^{n-2})_\circ, u_{n-1}, c_4^n)_\circ \\ &\leq (c_1, (c_2\, b\, u_1^{n-2})_\circ, u_{n-1}, c_4^n)_\circ = (c_1, c_2, (b\, u_1^{n-1})_\circ, c_4^n)_\circ = (c_1\, c_2\, b\, c_4^n)_\circ. \end{aligned}$$

Vom arăta prin inducţie că relaţia (3.1) este verificată pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Presupunând că

$$a \leq b \Rightarrow (c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ \leq (c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ$$

vom arăta că

$$a \leq b \Rightarrow (c_1^i\, a\, c_{i+2}^n)_\circ \leq (c_1^i\, b\, c_{i+2}^n)_\circ$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}(c_1^i\, a\, c_{i+2}^n)_\circ &= (c_1^i, (a\, u_1^{n-1})_\circ, c_{i+2}^n)_\circ = (c_1^{i-1}(c_i\, a\, u_1^{n-2})_\circ u_{n-1}, c_{i+2}^n)_\circ \\ &\leq (c_1^{i-1}, (c_i\, b\, u_1^{n-2})_\circ, u_{n-1}, c_{i+2}^n)_\circ = (c_1^i, (b\, u_1^{n-1})_\circ, c_{i+2}^n)_\circ = (c_1^i\, b\, c_{i+2}^n)_\circ.\end{aligned}$$

□

Observaţie 3.1.6. Dacă într-un monoid $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1})$ se poate simplifica, atunci obţinem şi reciproca condiţiei O_3 şi anume: dacă $(c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ \leq (c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ$ şi $a \neq b$, atunci $a < b$ sau a şi b nu se pot compara.

Pentru $n = 2$, **A** este un monoid pozitiv ordonat în sensul lui Wehrung [142].

Observaţie 3.1.7. Dacă $(A, (\,)_\circ, U(A), \leq)$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat şi $u_1^{n-1} \in U(A)$ atunci $(red_{u_1^{n-2}}A, \cdot, u_{n-1}, \leq)$ este monoid pozitiv preordonat, unde $x \cdot y = (x\, u^{n-2}\, y)_\circ$ pentru orice $x, y \in A$.

Dacă în Definiţia 3.1.4. înlocuim O_2 cu O_2': $(A, \leq)$ este o mulţime ordonată relativ la relaţia "$\leq$" atunci **A** se numeşte $n-$monoid pozitiv ordonat.

În continuare vom da unele generalizări a unor relaţii definite de Wehrung [142] în cazul binar şi anume:

Definiţie 3.1.5. (Maria S. Pop , **Adina Pop** [95]) Fie $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1})$ un $n-$monoid, şi $a, b \in A$. Definim următoarele relaţii:

$$a \preceq b \Leftrightarrow ((\exists\, x_1, x_2, ..., x^{n-1} \in A)((a\, x_1^{n-1})_\circ = b) \tag{3.2}$$

$$a \ll b \Leftrightarrow (\exists\, x_1, x^2, ..., x^{n-2} \in A)((a\, x_1^{n-2}\, b)_\circ = b) \tag{3.3}$$

$$a \preceq_u b \Leftrightarrow (\exists\, x \in A)((a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = b) \tag{3.4}$$

$$a \ll_u b \Leftrightarrow (a\, u^{n-2}\, b)_\circ = b. \tag{3.5}$$

Observaţie 3.1.8. Relaţiile de mai sus nu sunt independente şi anume

$$a <<_u b \Rightarrow a \ll b \Rightarrow a \preceq b \Rightarrow a \preceq_u b \Rightarrow a \preceq b$$

adică relaţiile (3.2) şi (3.4) coincid.

Într-adevăr, dacă $a \preceq b$, atunci există $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(a\, x_1^{n-1})_\circ = b$, şi prin urmare

$$b = ((a\, u_1^{n-1})_\circ, x_1^{n-1})_\circ = (a\, u_1^{n-2}, (u_{n-1}\, x_1^{n-1})_\circ)_\circ$$

adică $a \preceq_u b$.
Reciproc, dacă $a \preceq_u b$, atunci există $x \in A$ astfel încât $(a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = b$. Rezultă că $a \preceq b$. Prin urmare $a \preceq b \Leftrightarrow a \preceq_u b$.

Observaţie 3.1.9. Dacă v_1^{n-1} este o altă unitate a $n-$monoidului $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1})$ atunci $a \preceq_u b \Leftrightarrow a \preceq_v b$.

Propoziţie 3.1.4. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95]) *1) Dacă $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1})$ este un n-monoid semicomutativ, atunci $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1}, \preceq)$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat.*

Vom numi relaţia "$\preceq$" relaţie de preordine canonică sau minimală.

2) Relaţia "$\ll$" definită de (3.3) *nu este neapărat reflexivă, dar ea este tranzitivă şi compatibilă cu operaţia $n-$ară.*
Dacă pentru orice $a \in A$ există $x_1, x_2, ..., x_{n-2} \in A$ astfel încât $(a\, x_1^{n-2}\, a)_\circ = a$, atunci $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1}, \ll)$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat.

3^0. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca relaţia "$\ll_u$" definită în (3.5) *să fie parţial ordonată este*

$$(\forall)\ a \in A,\ (a\, u_1^{n-2}\, a)_\circ = a.$$

Demonstraţie. 1) O_1 : Deoarece $(a\, u_1^{n-1})_\circ = a$ pentru orice $a \in A$ rezultă că $a \preceq a$, adică relaţia "$\preceq$" este reflexivă.

Dacă $a \preceq b$ şi $b \preceq c$ atunci există $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ respectiv $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in A$ astfel încât $(a\, x_1^{n-1})_\circ = b$ şi $(b\, y_1^{n-1})_\circ = c$. Rezultă că $(a, x_1^{n-2}, (x_{n-1}\, y_1^{n-1})_\circ)_\circ = c$ şi deci $a \preceq c$. În concluzie relaţia "$\preceq$" este tranzitivă.

O_2 : Pentru orice $a \in A$, $(u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, a)_\circ = a$ ceea ce conduce la $u_{n-1} \preceq a$.

O_3 : Dacă $a \preceq b$, atunci există $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(a\, x_1^{n-1})_\circ = b$.

Pentru orice $c_1, ..., c_n \in A$ şi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, din semicomutativitatea şi asociativitatea operaţiei $n-$are "$(\,)_\circ$" obţinem:

$$\begin{aligned}
(c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ &= (c_1^{i-1}, a, (x_1\, x_2^{n-1}\, c_{i+1})_\circ, c_{i+2}^n)_\circ = (c_1^{i-1}, a, (c_{i+1}\, x_2^{n-1}\, x_1)_\circ, c_{i+2}^n)_\circ \\
&= (c_1^{i-1}, a, c_{i+1}, (x_2\, x_3^{n-1}\, x_1\, c_{i+2})_\circ, c_{i+3}^n)_\circ \\
&= (c_1^{i-1}, a, c_{i+1}, (c_{i+2}\, x_3^{n-1}\, x_1\, x_2)_\circ, c_{i+3}^n)_\circ \\
&= \ldots = ((c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ, x_{n-i+1}^{n-1}, x_1^{n-i})_\circ
\end{aligned}$$

Rezultă că $(c_1^{i-1}\, a\, c_{i+1}^n)_\circ \preceq (c_1^{i-1}\, b\, c_{i+1}^n)_\circ$

2^0. Tranzitivitatea este imediată.

Dacă $a_i \ll b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există $x_{i1}^{i,n-2} \in A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $(a_i\, x_{i1}^{i,n-2}\, b_i)_\circ = b_i$.

Deoarece operaţia $n-$ară este semicomutativă rezultă că ea este medială şi

$$\begin{aligned}
(b_1^n)_\circ &= ((a_1\, x_{11}^{1,n-2}\, b_1)_\circ, \ldots, (a_n\, x_{n1}^{n,n-2}\, b_n)_\circ)_\circ \\
&= ((a_1^n)_\circ, (x_{11}^{n1})_\circ, \ldots, (x_{1,n-2}^{n,n-2})_\circ, (b_1^n)_\circ)_\circ
\end{aligned}$$

În concluzie, $(a_1^n)_\circ \ll (b_1^n)_\circ$.

Relaţia (3.3) nu trebuie să fie neapărat reflexivă. Dacă pentru orice $a \in A$, există $x_1^{n-2} \in A$ astfel încât $(a\, x_1^{n-2}\, a)_\circ = a$, atunci $(A, (\,)_\circ, U(A), \ll)$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat.

3^0. Dacă $a \ll_u b$ şi $b \ll_u a$ atunci $(a\, u_1^{n-2}\, b)_\circ = b$ şi $(b\, u_1^{n-2}\, a)_\circ = a$. Din semicomutativitatea operaţiei $n-$are avem $a = b$.
Dacă $a \ll_u b$ şi $b \ll_u c$ atunci

$$c = (b\, u_1^{n-2}\, c)_\circ = ((a\, u_1^{n-2}\, b)_\circ, u_1^{n-2}, c)_\circ = (a, u_1^{n-2}, (b, u_1^{n-2}, c)_\circ)_\circ = (a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ,$$

adică $a \ll_u c$.

Relaţia (3.5) este o relaţie de ordine dacă şi numai dacă pentru orice $a \in A$ avem $(a\, u_1^{n-2}\, a)_\circ = a$. □

Observaţie 3.1.10. 1) Relaţia "$\preceq$" este o relaţie de preordine dar nu este neapărat o relaţie parţial ordonată.

2) O condiţie suficientă pentru ca relaţia "$\preceq$" să fie parţial ordonată este ca $((a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ, u_1^{n-2}, y)_\circ = a$ să implice $(a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = a$ pentru orice $a, x, y \in A$.

3) Dacă $a \preceq b$, atunci elementele $x_1, ..., x_{n-1} \in A$ care satisfac condiţia 3.2 nu sunt neapărat unice.

Următoarele rezultate generalizează rezultatele lui F. Wehrung [142] din cazul binar.

Propoziţie 3.1.5. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [95]) *Fie* $(A, (\,)_\circ, u_1^{n-1}, \leq)$, *un* $n-$*monoid pozitiv preordonat. Atunci:*

(i) Dacă mulţimea $\mathbf{A} = (A, (\,)_\circ, u_1^{n-1}, \leq)$ *este ordonată de relaţia de preordine canonică, atunci* $a \ll b$ *şi* $b \preceq c$ *implică* $a \ll c$.

(ii) Dacă relaţia "$\leq$*" este antisimetrică, atunci* $a \leq b$ *şi* $b \ll_u c$ *implică* $a \ll_u c$.

Demonstraţie. (i) Dacă $b \preceq c$, atunci există $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ cu proprietatea că $(b\, x_1^{n-1})_\circ = c$.
Dacă $a \ll b$, atunci există $y_1, y_2, ..., y_{n-2} \in A$ astfel încât $(a\, y_1^{n-2}\, b)_\circ = b$.
Rezultă că

$$c = (b\, x_1^{n-1})_\circ = ((a\, y_1^{n-2}\, b)_\circ, x_1^{n-1})_\circ = (a\, y_1^{n-2}, (b\, x_1^{n-1})_\circ)_\circ = (a\, y_1^{n-2}\, c)_\circ$$

ceea ce ne conduce la $a \ll c$.
(ii) Dacă $b \ll_u c$, atunci $(b\, u_1^{n-2}\, c)_\circ = c$. Întrucât $\mathbf{A}$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat, dacă $a \leq b$, atunci vom avea $(a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ \leq (b\, u_1^{n-2}\, c)_\circ$. Rezultă că $(a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ \leq c$. În plus, deoarece $u_{n-1} \leq a$,pentru orice $a \in \mathbf{A}$ vom avea $c = (u_{n-1}\, u_1^{n-2}\, c)_\circ \leq (a\, u_1^{n-2}\, c)$. Dar relaţia $\leq$ este antisimetrică şi în consecinţă $(a\, u_1^{n-2}\, c) = c$, adică $a \ll c$. □

Observăm că, dacă A este un $n-$monoid pozitiv ordonat minimal, atunci proprietatea (ii) din propoziţia de mai sus caracterizează antisimetria.

Propoziţie 3.1.6. (Maria S. Pop, **Pop Adina** [95]) *Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un n-monoid semicomutativ cu $u_1^{n-1} \in U(A)$, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Dacă $a \preceq b$ şi $b \ll_u c$ în A, atunci $a \ll_u c$;

(ii) Dacă $a \preceq b$ şi $b \preceq a$ în A, atunci $a = b$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Dacă $a \preceq b$ şi $b \preceq a$; $a, b \in A$, conform Observaţiei 3.1.8 vom avea $a \preceq_u b$ şi $b \preceq_u a$. Rezultă că există $x, y \in A$ astfel încât $(a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = b$ şi $(b\, u_1^{n-2}\, y)_\circ = a$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} a &= ((a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ, u_1^{n-2}, y)_\circ = ((x\, u_1^{n-2}\, a)_\circ, u_1^{n-2}, y)_\circ \\ &= (x, u_1^{n-2}, (a\, u_1^{n-2}\, y)_\circ)_\circ = (x, u_1^{n-2}, (y\, u_1^{n-2}\, a)_\circ)_\circ \\ &= ((x\, u_1^{n-2}\, y)_\circ, u_1^{n-2}\, a)_\circ \end{aligned}$$

şi deci $(x\, u_1^{n-2}\, y)_\circ \ll_u a$. Dar $x \preceq_u (x\, u_1^{n-2}\, y)_\circ$ ceea ce este echivalent cu $x \preceq (x\, u_1^{n-2}\, y)_\circ$ şi conform afirmaţiei (i), vom obţine $x \ll_u a$. Rezultă că

$$a = (x\, u_1^{n-2}\, a)_\circ = (a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = b.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $a, b, c \in A$ cu proprietatea că $a \preceq b$, ceea ce este echivalent cu $a \preceq_u b$ şi $b \ll_u c$. Atunci există un element $x \in A$ cu proprietatea că $(a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ = b$, respectiv $(b\, u_1^{n-2}\, c)_\circ = c$. Atunci

$$\begin{aligned} ((a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ, u_1^{n-2}, x)_\circ &= (a, u_1^{n-2}, (c\, u_1^{n-2}\, x)_\circ)_\circ \\ &= (a, u_1^{n-2}, (x\, u_1^{n-2}\, c)_\circ)_\circ = ((a\, u_1^{n-2}\, x)_\circ, u_1^{n-2}, c)_\circ \\ &= (b\, u_1^{n-2}\, c)_\circ = c \end{aligned}$$

ceea ce implică $(a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ \preceq_u c$ sau echivalent $(a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ \preceq c$.
Deoarece $n-$monoidul A este semicomutativ, rezultă că $c \preceq (a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ$. Conform afirmaţiei (ii) vom avea $(a\, u_1^{n-2}\, c)_\circ = c$ şi în concluzie $a \ll_u c$. □

Observaţie 3.1.11. Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un n-grup, atunci relaţiile " $\preceq$ ", respectiv $\ll$ definite de relaţiile (3.2) şi (3.3) coincid cu relaţia universală $A \times A$.

Legătura dintre relaţiile mai sus amintite şi cele date de Wehrung [142] în caz binar este dată de

Propoziţie 3.1.7. (Pop S. Maria, **Pop Adina** [95]) *Dacă $(A, (\,)_\circ, U(A)$, $u_1^{n-1} \in U(A)$ este un $n-$monoid semicomutativ, $a, b \in A$ atunci în $(red_{u_1^{n-2}} A, +, u_{n-1})$ avem*

$$\begin{aligned} a &\preceq b \Leftrightarrow ((\exists)\, c \in A), (a + c = b) \\ a &\ll {}_u b \Leftrightarrow a + b = b. \end{aligned}$$

Ca şi în cazul structurilor algebrice ordonate (Fuchs [46]) putem defini noţiunea de con drept şi con stâng în cazul $n-$semigrupurilor ordonate după cum urmează:

Definiţie 3.1.6. (**Adina Pop**, Maria S .Pop [91]) Dacă A este un $n-$semigrup parţial ordonat (preordonat) atunci mulţimile $K_r(a) = \{x\,;\, a \leq x\}$, $K_l(a) = \{x\,;\, x \leq a\}$ se numesc *con drept* respectiv *con stâng a lui a.*

Evident $a \in K_l(a) \cap K_r(a)$.

Observaţie 3.1.12. Ţinând cont de definiţia conului drept, respectiv stâng, dacă $(A, (\,)_\circ, \leq)$ este un $n-$monoid pozitiv preordonat, atunci $K_r(u_{n-1}) = A$ şi $\{v_{n-1}; v_1^{n-1}\} \in U(A) \subseteq K_l(u_{n-1})$.

Propoziţie 3.1.8. (**Adina Pop**,Maria S. Pop [91]) *Fie* $(A, (\,)_\circ, U(A), \leq)$*,* $u_1^{n-1} \in A$ *un monoid pozitiv preordonat şi* $a \in A$*. Atunci* $(K_r(a), (\,)_\circ)$*,* $(K_l(a), (\,)_\circ)$ *sunt sub-n-semigrupuri a n−monoidului* $(A, (\,)_\circ)$ *dacă şi numai dacă* $a \leq a^{[1]}$*, respectiv* $a^{[1]} \leq a$*.*

Demonstraţie. Presupunem că $a \leq a^{[1]}$. Atunci pentru orice elemente $x_1, x_2, ..., x_n \in K_r(a)$, vom avea $a \leq x_i$; $i \in \{1, 2, ..., n\}$, conform Observaţiei 3.1.1, rezultă că $a^{[1]} \leq (x_1^n)_\circ$. Datorită tranzitivităţii relaţiei " $\leq$ ", vom abţine că $a \leq (x_1^n)_\circ$ ceea ce ne conduce la $(x_1^n)_\circ \in K_r(a)$. În concluzie $K_r(a)$ este un sub-n-semigrup al $n-$monoidului $(A, (\,)_\circ)$.
Reciproc, presupunem că $K_r(a)$ este un sub-n-semigrup al $n-$monoidului $(A, (\,)_\circ)$. Deoarece $a \in K_r(a)$, rezultă că $a^{[1]} \in K_r(a)$şi prin urmare $a \leq a^{[1]}$.
Analog se demonstrează teorema pentru $K_l(a)$. □

3.2 $(n, m)-$Semiinele ordonate

Definiţie 3.2.1. (**Adina Pop**,Maria S. Pop [91]) O structură algebrică $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte (n, m)*-semiinel parţial ordonat* dacă:

$O_1 : (S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-semiinel

$O_2 : (S, \leq)$ este o mulţime parţial ordonată (preordonată)

$O_3 : a \leq b \Rightarrow (ac_1^{n-1})_+ \leq (bc_1^{n-1})_+$ pentru orice $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1} \in S$

$O_4 : a \leq b \Rightarrow (d_1^{j-1} a d_{j+1}^m)_\circ \leq (d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ$

pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $d_1, d_2, \ldots, d_m$ elemente pozitive.
Un (n, m)-semiinel parţial ordonat se numeşte *pozitiv ordonat* dacă toate elementele sale sunt pozitive.

Mulţimea S^+ a tuturor elementelor pozitive ale lui S (dacă este nevidă) se numeşte conul pozitiv al lui S.

Exemplul 3.2.1. Fie $S_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ înzestrată cu ordinea naturală. Definim pe mulţimea S o operaţie n-ară $(\,)_+ : S_k^n \to S_k$; $(a_1^n)_+ = max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ şi o operaţie m-ară $(\,)_\circ : S_k^m \to S_k$; $(a_1^m)_+ = min\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. $(S, (\,)_+, (\,)_\circ, \leq)$ este un (n, m)-semiinel total ordonat. Fie $\mathcal{M}_n(S_k)$ mulţimea tuturor matricilor pătratice de ordin n cu elemente din S_k.

Definim operaţia n-ară $(\,)_+ : \mathcal{M}_n(S_k)^n \to \mathcal{M}_n(S_k)$ după cum urmează

$$(\forall)A_1 = (a_{ij}^1), A_2 = (a_{ij}^2), \ldots, A_n = (a_{ij}^n),$$
$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A_k), (A_1^n)_+ = C,$$

unde $C = (c_{ij}); c_{ij} = max\{a_{ij}^1, \ldots, a_{ij}^n\}$ şi $\cdot : \mathcal{M}_n(S_k)^2 \to \mathcal{M}_n(S_k); A \cdot B = D$, unde $D = (d_{ij})$; $d_{ij} = max\{min\{a_{i1}, b_{1j}, \ldots, min\{a_{in}, b_{nj}\}$. Atunci $(\mathcal{M}_n(S_k), (\,)_+, \cdot, \leq)$ este un $(n, 2)$-semiinel parţial ordonat, relaţia de ordine parţială fiind definită astfel

$$A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Observaţie 3.2.1. Dacă $(A, (\,)_+, U(A, (\,)_+), (\,)_\circ, \leq)$ este un (n, m)-semiinel parţial preordonat şi $u_1^{n-1} \in U(A, (\,)_+)$ astfel încât $u_i \leq a$; $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru orice $a \in A$, atunci A este un (n, m)-semiinel pozitiv preordonat.

Exemplul 3.2.2. Fie mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ înzestrată cu două operaţii

$$(\,)_+ : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N};\ (k_1^n)_+ = \sum_{i=1}^{n} k_i$$
$$(\,)_\circ : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N};\ (k_1^m)_\circ = \prod_{i=1}^{n} k_i$$

Tripletul $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un (n, m)-semiinel. Fie $1 < c; c \in \mathbb{N}$ şi definim o relaţie de ordine $\preceq$ pe $\mathbb{N}$ astfel:

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b \text{ şi } a \equiv b(mod\ c)$$

Atunci $(\mathbb{N}, (\,)_+, (\,)_\circ, \preceq)$ este un (n, m)-semiinel parţial ordonat.

Deoarece conul pozitiv $R^+ = \{a \in \mathbb{N} | a \equiv 0(mod\ c)\} \neq R$ acesta nu este pozitiv ordonat.

În cele ce urmează, vom generaliza în cazul (n, m)-semiinelelor două relaţii de ordine studiate de J. Golan [53]în cazul binar.

Fie $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), (\,)_\circ)$ un (n, m)-semiinel cu proprietatea că $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), (\,)_\circ)$ este un n-monoid comutativ. Ca şi în paragraful 3.1 definim următoarele două relaţii:

$$a \preceq b \Leftrightarrow ((\exists)x_1^{n-1} \in S)((ax_1^{n-1})_+ = b)$$
$$a \ll b \Leftrightarrow ((\exists)x_1^{n-2} \in S)((ax_1^{n-2}b)_+ = b).$$

Observaţie 3.2.2. Dacă $u_1^{n-1} \in U(S, (\,)_+)$ atunci

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow (\exists) x \in S;\ (a u_1^{n-2} x)_+ = b$$

Elementul $x \in S$ nu este unic. Dacă " $\preccurlyeq$ " este o relaţie de ordine totală pe S şi $a \neq b$, atunci mulţimea $\{x \in S;\ (a u_1^{n-2} x)_+ = b\}$ este $\emptyset$ sau formată dintr-un singur element.

Propoziţie 3.2.1. 1) $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), (\,)_\circ, \preccurlyeq)$ *este un* (n, m)*-semiinel pozitiv preordonat.*

2) *Dacă* $u_1^{n-1} \in U(S, (\,)_+)$*, atunci o condiţie suficientă pentru ca relaţia " $\preccurlyeq$ " să fie parţial ordonată este*

$$((a u_1^{n-2} x)_+ u_1^{n-2} y)_+ = a \Rightarrow (a u_1^{n-2} x)_+ = a$$

pentru orice $x, y, a \in S$*;* 3) *Relaţia " $\ll$ " nu este neapărat reflexivă, dar este tranzitivă şi compatibilă cu operaţia* n*-ară "$(\,)_+$" şi operaţia* m*-ară "$(\,)_\circ$".*

dacă pentru orice $a \in S$*, există* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2} \in S$ *astfel încât* $(a\, x_1^{n-2}\, a)_+ = a$*, atunci* $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), (\,)_\circ, \ll)$ *este un* (n, m)*-semiinel parţial ordonat.*

Demonstraţie. 1) Conform Propoziţiei 3.1.3 rezultă că $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), \preccurlyeq)$ este un n-monoid pozitiv ordonat. Dacă $a \preccurlyeq b$, atunci există $x_1^{n-1} \in S$ cu proprietatea că $(a x_1^{n-1})_+ = b$. Atunci pentru orice elemente pozitive $d_1, d_2, \ldots, d_m \in A$ şi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ folosind distributivitatea operaţiei m-are $(\,)_\circ$ faţă de operaţia n-ară $(\,)_+$ vom obţine

$$\begin{aligned}(d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ &= (d_1^{j-1} (a x_1^{n-1})_+ d_{j+1}^m)_\circ \\ &= ((d_1^{j-1} a d_{j+1}^m)_\circ (d_1^{j-1} x_1 d_{j+1}^m)_\circ \ldots (d_1^{j-1} x_{n-1} d_{j+1}^m)_\circ)_+\end{aligned}$$

Rezultă că $(d_1^{j-1} a d_{j+1}^m)_\circ \preccurlyeq (d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ$.

2) Este evidentă.

3) Dacă $a \ll b$, atunci există $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ astfel încât $(a\, x_1^{n-2}\, b)_+ = b$. Rezultă că pentru orice $d_1, d_2, \ldots, d_m \in S$ şi $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ avem

$$\begin{aligned}(d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ &= (d_1^{j-1} (a x_1^{n-2} b)_+ d_{j+1}^m)_\circ \\ &= ((d_1^{j-1} a d_{j+1}^m)_\circ, (d_1^{j-1} x_1 d_{j+1}^m)_\circ, \ldots, (d_1^{j-1} x_{n-2} d_{j+1}^m)_\circ, (d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ)_+\end{aligned}$$

Prin urmare $(d_1^{j-1} a d_{j+1}^m)_\circ \ll (d_1^{j-1} b d_{j+1}^m)_\circ$.
Conform Propoziţiei 3.1.4, $(S, (\,)_+, U(S(\,)_+), \ll)$ este un n monoid parţial ordonat şi în concluzie $(S, (\,)_+, U(S, (\,)_+), (\,)_\circ, \ll)$ este un (n, m)-semiinel parţial ordonat.

$\square$

Exemplul 3.2.3. Fie mulţimea $A = \{0, 1, 2\}$ înzestrată cu operaţiile $(\,)_+ : A^3 \to A$;

$$(a_1, a_2, a_3)_+ = \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3, & \text{dacă} a_1 + a_2 + a_3 < 3 \\ r \equiv (a_1 + a_2 + a_3)(\mathrm{mod}\, 2);\ 1 \leq r < 3, & \text{dacă}\ \ a_1 + a_2 + a_3 \geq 3 \end{cases}$$

şi $\cdot : A^2 \to A$

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

Structura algebrică $(A, (\,)_+(\,)_\circ, \cdot)$ este un $(3, 2)$-semiinel comutativ care are element neutru aditiv pe 0, care este şi element zero al semiinelului, are un element neutru multiplicativ pe 1, $Ida(A) = \{0, 1, 2\} = Idm(S)$. $(3, 2)$- Semiinelul A este pozitiv preordonat relativ la relaţia " $\ll$ " dar nu este parţial ordonat deoarece $(1, 1, 2)_+ = 2 \Rightarrow 1 \ll 2$ şi $(2, 2, 1)_+ = 1 \Rightarrow 2 \ll 1$ dar $1 \neq 2$.

Capitolul 4

Omomorfisme de $(n, m)-$semiinele

4.1 Omomorfisme de $(n, m)-$semiinele

Definiţie 4.1.1. Fie $(n, m)-$semiinele $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi $(S', (\,)_*, (\,)_\bullet)$.
Aplicaţia $f : S \to S'$ se numeşte *omomorfism de* $(n, m)-$*semiinele* dacă oricare ar fi $x_i \in S$ cu $i \in \{1, 2, \ldots, \max(n, m)\}$ au loc următoarele relaţii:

$$f((x_1^n)_+) = (f(x_1), \ldots, f(x_n))_*$$

respectiv

$$f((x_1^m)_\circ) = (f(x_1), \ldots, f(x_m))_\bullet.$$

Un omomorfism al lui S în el însuşi se numeşte *endomorfism*.
Dacă aplicaţia f este o bijecţie, atunci spunem că S şi S' sunt $(n, m)-$semiinele izomorfe şi f este un izomorfism de $(n, m)-$semiinele.
În acest caz vom scrie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ) \cong (S', (\,)_*, (\,)_\bullet)$.
În continuare, pentru simplificarea scrierii, vom nota operaţiile celor două $(n, m)-$semiinele la fel.

Teoremă 4.1.1. *Fie* $(n, m)-$*semiinele* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *şi* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ *iar* $f : S \to S'$ *un omomorfism de* $(n, m)-$*semiinele.*

i) Dacă f este un omomorfism surjectiv şi $(n, m)-$ semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ are un element zero, 0, atunci $f(0) = 0'$ este element zero în $(n, m)-$semiinelul $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$.

ii) Dacă $a \in S$ este un idempotent aditiv (multiplicativ) al $(n, m)-$semiinelului $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, atunci $f(a)$ este un idempotent aditiv (multiplicativ) în $(n, m)-$semiinelul $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$.
Cu alte cuvinte, fiecărui idempotent aditiv (multiplicativ) din $(n, m)-$semiinelul S îi corespunde prin f un idempotent aditiv (multiplicativ) în $(n, m)-$semiinelul S'.

iii) Dacă $(n,m)-$ semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ are un element neutru aditiv (multiplicativ) e şi f este aplicaţie surjectivă, atunci $f(e)$ este un element neutru aditiv (multiplicativ).

iv) Dacă un element $x \in S$ admite un element transversal aditiv $\overline{x} \in S$ (transversal multiplicativ ($\underline{x} \in S$), atunci există transversala lui $f(x)$ şi are loc

$$f(\overline{x}) = \overline{f(x)}\ (f(\underline{x}) = \underline{f(x)}).$$

Demonstraţie. i) Din faptul că f este omomorfism surjectiv, rezultă că pentru orice $y_1, y_2, ..., y_m \in S'$ există $x_1, x_2, ..., x_m \in S$ astfel încât $f(x_i) = y_i$; $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Notând $f(0) = 0'$ vom avea

$$\begin{aligned}\big(y_1^{i-1}\ 0'\ y_{i+1}^m\big)_\circ &= (f(x_1), ..., f(x_{i-1}), f(0), f(x_i), ..., f(x_m))_\circ \\ &= f\big((x_1^{i-1}\ 0\ x_{i+1}^m)_\circ\big) = f(0) = 0'.\end{aligned}$$

ii) Dacă $a \in S$ este un idempotent aditiv (multiplicativ) în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, adică $a^{[1]} = a$ (respectiv $a^{<1>} = a$), atunci

$$f(a) = f(a^{[1]}) = (\overset{(n)}{f(a)})_+ = f(a)^{[1]}$$

$$\big(f(a) = f(a^{<1>}) = f(a)^{<1>}\big).$$

iii) Dacă $e \in S$ este un element neutru aditiv (multiplicativ) rezultă că pentru orice $x \in S$ şi orice $i \in \{1, 2, ..., p\}$ unde $p = max(n,m)$ are loc următoarea relaţie

$$(\overset{(i-1)}{e}\ x\ \overset{(n-i)}{e})_+ = x \quad \big((\overset{(i-1)}{e}\ x\ \overset{(m-i)}{e})_\circ = x\big)$$

Deoarece f este un omomorfism, atunci

$$f(x) = f((\overset{(i-1)}{e}\ x\ \overset{(n-i)}{e})_+) = (\overset{(i-1)}{f\,(e)}, f(x), \overset{(n-i)}{f\,(e)})_+.$$

$$\big(f(x) = f((\overset{(i-1)}{e}\ x\ \overset{(m-i)}{e})_\circ) = (\overset{(i-1)}{f\,(e)}, f(x), \overset{(m-i)}{f\,(e)})_\circ\big).$$

Din definiţia elementului neutru aditiv (multiplicativ) rezultă că $f(e)$ este element neutru aditiv (multiplicativ).

iv)Dacă $x \in S$ are element transversal aditiv $\overline{x} \in S$, atunci acesta este unic şi în plus

$$(\overset{(n-1)}{x}\ \overline{x})_+ = x.$$

Ţinând seama de proprietăţile omomorfismului f şi de unicitatea elementului transversal, rezultă că

$$f(x) = f((\overset{(n-1)}{x}\ \overline{x})_+) = (\overset{(n-1)}{f\,(x)}\ f(\overline{x}))_+.$$

În concluzie, obţinem $f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$. $\square$

Se demonstrează uşor următoarea teoremă:

Teoremă 4.1.2. *Fie $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, $(T,(\,)_+,(\,)_\circ)$ şi $(R,(\,)_+,(\,)_\circ)$.*

i) Dacă $f : S \to T$ şi $\varphi : T \to R$ sunt omomorfisme de $(n,m)-$semiinele, atunci şi $\varphi \circ f : S \to R$ este de asemenea, un omomorfism de $(n,m)-$semiinele.

ii) Aplicaţia identică $1_S : S \to S$, $1_S(x) = x$ pentru orice $x \in S$ este un izomorfism al $(n,m)-$semiinelului $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$.

iii) Dacă $f : S \to T$ este un izomorfism de $(n,m)-$semiinele, atunci şi aplicaţia inversă $f^{-1} : T \to S$ este un izomorfism de $(n,m)-$semiinele.

Folosind proprietăţile algebrelor universale obţinem:

Propoziţie 4.1.1. *Fie $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ şi $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$ două algebre universale de acelasi tip, cu operaţia $n-$ară "$(\,)_+$" şi operaţia $m-$ară "$(\,)_\circ$", iar $f : S \to S'$ un omomorfism.*

i) Dacă $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$semiinel atunci subalgebra $(f(S),(\,)_+,(\,)_\circ)$ a algebrei $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$semiinel ($(n,m)-$inel).
Dacă $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este semicomutativ (comutativ), respectiv cu element neutru multiplicativ, atunci $(n,m)-$semiinelul $(f(S),(\,)_+,(\,)_\circ)$ este semicomutativ (comutativ) cu element neutru multiplicativ.

Mai general, dacă A este un sub-(n,m)-semiinel al lui $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, atunci imaginea omonorfă $f(A)$ este un sub-(n,m)-semiinel al lui $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$.

ii) Dacă $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ şi $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$ sunt $(n,m)-$semiinele şi A' este un sub-(n,m)-semiinel al lui $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$ atunci contraimaginea lui A' prin f, $\overset{-1}{f}(A')$ este sau mulţimea vidă sau un sub-(n,m)-semiinel al lui $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$.

Demonstraţie. i) se verifică imediat

ii) Observăm că $\overset{-1}{f}(A') = \overset{-1}{f}(A' \cap f(S))$.

Rezultă că $\overset{-1}{f}(A') = \varnothing$ dacă şi numai dacă $A' \cap f(S) = \varnothing$. Altfel, deoarece A'şi $f(S)$ sunt sub-(n,m)-semiinele rezultă că $A' \cap f(S)$ este un sub-(n,m)-semiinel al $(n,m)-$semiinelului $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \overset{-1}{f}(A')$, $p = max(n,m)$ atunci $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_p) \in A' \cap f(S)$. Rezultă că $(f(a_1), \ldots, f(a_n))_+ \in A' \cap f(S)$ respectiv $(f(a_1), \ldots, f(a_m))_\circ \in A' \cap f(S)$.
Prin urmare, $f((a_1^n)_+) \in A' \cap f(S)$ şi $f((a_1^m)_\circ) \in A' \cap f(S)$ adică $(a_1^n)_+ \in \overset{-1}{f}(A')$, respectiv $(a_1^m)_\circ \in \overset{-1}{f}(A')$. □

Dacă $(n,m)-$semiinele sunt $(n,m)-$inele atunci regăsim Teorema 2 a lui I. Purdea [111].

Corolar 4.1.1. *Tripletul* $(Imf, (\,)_+(\,)_\circ)$ *este un sub-*(n,m)*-semiinel al* $(n,m)-$*semiinelului* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$.

Corolar 4.1.2. *Fie* $(n,m)-$*semiinelul* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *cu element zero,* 0, *şi* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ *o algebră universală.*

i) Dacă $(n,m)-$*semiinelul* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *nu are divizori ai lui zero şi omomorfismul* $f : S \to S'$ *este injectiv, atunci* $f(S)$ *nu are divizori ai lui zero.*

ii) Dacă $(n,m)-$*semiinelul* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *este semidomeniu de integritate şi omomorfismul* $f : S \to S'$ *este injectiv, atunci* $(f(S), (\,)_+(\,)_\circ)$ *este un semidomeniu de integritate.*

iii) Dacă omomorfismul $f : S \to S'$ *este surjectiv, atunci algebra universală* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ *este un* $(n,m)-$*semiinel.*

Demonstraţie. i) Oricare ar fi $y_1, y_2, \ldots, y_m \in f(S)$ există $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$ cu proprietatea că $f(x_i) = y_i$ cu $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dacă $(y_1^m)_\circ = f(0)$ atunci vom obţine $(f(x_1), \ldots, f(x_m))_\circ = f(0)$, respectiv $f((x_1^m)_\circ) = f(0)$. Deoarece omomorfismul f este injectiv, rezultă că $(x_1^m)_\circ = 0$. Dar $(n,m)-$semiinelul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ nu are divizori ai lui zero, ceea ce ne conduce la faptul că există un $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel încât $x_i = 0$. Rezultă că $f(x_i) = f(0)$, $f(0)$ fiind conform Teoremei 4.1.1 punctul i) element zero în $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$. Prin urmare există $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ astfel încât $y_i = f(0)$, ceea ce ne arată că $(n,m)-$semiinelul $(f(S), (\,)_+, (\,)_\circ)$ nu are divizori ai lui zero. $\square$

pentru orice $x \in S$.

Propoziţie 4.1.2. *Fie* $(n,m)-$*semiinelele* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ *şi* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$, *iar* $f : S \to S'$ *un omomorfism surjectiv de* $(n,m)-$*semiinele.*
Dacă A *şi* A' *sunt ideale în* $(n,m)-$*semiinelele* S, *respectiv* S', *atunci:*

i) Mulţimea $f(A) = \{f(a) | a \in A\}$ *este un ideal în* $(n,m)-$*semiinelul* $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$;

ii) Contraimaginea lui A $\overset{-1}{f}(A') = \{a \in A | f(a) \in A'\}$ *este mulţimea vidă sau un ideal în* $(n,m)-$*semiinelul* $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$. *În plus, dacă* A' *este un ideal subtractiv, atunci şi contraimaginea sa* $\overset{-1}{f}(A')$ *este ideal subtractiv (dacă nu este mulţimea vidă).*

Demonstraţie. i) Deoarece $f(A)$ este în particular un sub-(n,m)-semiinel al lui $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$, rezultă că perechea $(f(A), (\,)_+)$ este un sub-n-semigrup al n-semigrupului $(S, (\,)_+)$. Vom arăta în continuare că $f(A)$ este un ideal în (n,m)-semiinelul $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$.

Fie $a' \in f(A)$ şi $s'_1, \ldots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, \ldots, s'_m \in S'$. Deoarece f este un omomorfism surjectiv, rezultă că există $a \in A$ şi $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_m \in S$ cu proprietatea că $f(a) = a'$ şi $f(s_j) = s'_j$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m\}$. Deoarece A este ideal în (n,m)-semiinelul S, rezultă că $(s_1^{i-1}\,a\,s_{i+1}^m)_\circ \in A$ şi vom avea $(s_1'^{i-1}\,a'\,s_{i+1}'^m)_\circ = (f(s_1),\ldots,f(s_{i-1}),f(a),f(s_{i+1}),\ldots,f(s_m))_\circ = f((s_1^{i-1}\,a\,s_{i+1}^m)_\circ) \in f(A)$.

ii) Considerăm că A' este un ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S',(\,)_+,(\,)_\circ)$.
Dacă $\overset{-1}{f}(A') \neq \varnothing$ atunci considerăm $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \overset{-1}{f}(A')$. Rezultă din definiţia contraimaginii că $f(x_1),\ldots,f(x_n) \in A'$. Deoarece, în particular, A' este un sub-n-semigrup al n-semigrupului $(S',(\,)_+)$ vom avea că $(f(x_1),\ldots,f(x_n))_+ \in A'$. Din faptul că aplicaţia f este un omomorfism de $(n,m)-$semiinele obţinem că $f((x_1^n)_+) \in A'$ ceea ce implică $(x_1^n)_+ \in \overset{-1}{f}(A')$.

Dacă $a \in \overset{-1}{f}(A')$ şi $s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_m \in S$, ţinând seama de faptul că A' este ideal in S' rezultă că

$$f((s_1^{i-1}\,a\,s_{i+1}^m)_\circ) = (f(s_1),\ldots,f(s_{i-1}),f(a),f(s_{i+1}),\ldots,f(s_m))_\circ \in (A').$$

ceea ce ne conduce la $(s_1^{i-1}\,a\,s_{i+1}^m)_\circ \in \overset{-1}{f}(A')$.
În concluzie $\overset{-1}{f}(A')$ este un ideal în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$. În continuare vom arata că $\overset{-1}{f}(A')$ este un ideal subtractiv. Într-adevăr, dacă $x \in S$ şi $a_2,\ldots,a_m \in \overset{-1}{f}(A')$ cu proprietatea că $(x\,a_2^m)_+ \in \overset{-1}{f}(A')$, atunci $f((x\,a_2^m)_+) \in (A')$. Ţinând seama de faptul că f este omomorfism de $(n,m)-$semiinele, vom avea

$$(f(x),f(a_2),\ldots,f(a_m))_+ \in A'.$$

Dar A' este ideal subtractiv în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$. Acest lucru ne conduce la $f(x) \in A'$ şi prin urmare $x \in \overset{-1}{f}(A')$.
În concluzie $\overset{-1}{f}(A')$ este un ideal subtractiv in $(n,m)-$semiinelul S. $\square$

Observaţie 4.1.1. *Dacă A este un ideal subtractiv al $n,m)-$semiinelului $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$, nu rezultă în general că $f(A)$ este ideal subtractiv în $(n,m)-$semiinelul $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$.*

Exemplul 4.1.1. Considerăm mulţimea $S=\{0,a,b,c\}$ înzestrată cu o operaţie ternară $(\,)_+ : S^3 \to S$ definită astfel

$$(x,0,0)_+ = x\,;(x,c,c)_+ = c \text{ pentru orice} x \in S$$

$$(x,a,a)_+ = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \in \{0,a\} \\ c, & \text{dacă } x \in \{b,c\} \end{cases}$$

$$(x,b,b)_+ = \begin{cases} b, & \text{dacă } x \in \{0,b\} \\ c, & \text{dacă } x \in \{a,c\} \end{cases}$$

$$(0,a,b)_+ = (c,a,b)_+ = (0,c,a)_+ = (0,c,b)_+ = c.$$

şi o operaţie m-ară $(\,)_\circ : S^m \to S, (x_1^m)_\circ = 0$ oricare ar fi $x_1, x_2, ..., x_m \in S$.
Tripletul $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(3, m)-$semiinel comutativ cu element neutru aditiv 0 care este şi element zero al semiinelului şi Ida$(S) = S$.
Fie mulţimea $T = \{0', a', c'\}$ înzestrată cu operaţia ternară "( )"$_\star$ definită astfel:

$(x', 0', 0')_\star = x'$; $(x', c', c')_\star = c'$ pentru orice $x' \in T$

şi

$$(x', a', a')_\star = \begin{cases} a', \text{ dacă } x' \in \{0', a'\} \\ c', \text{ dacă } x' = c' \end{cases}$$

$(0', a', c')_* = c'$ iar operaţia $m-$ară $(\,)_\circ$ definită la fel ca şi pe S, adică $(x_1'^m)_\circ = 0'$ pentru orice $x_1', x_2', \ldots, x_m' \in T$. Atunci $(T, (\,)_\star, (\,)_\circ)$ este, de asemenea, un $(3, m)-$semiinel comutativ având un element neutru aditiv pe "$0'$" şi Ida$(T) = T$.

Aplicaţia $f : S \to T$; $f(0) = 0'$, $f(a) = f(c) = c'$, şi $f(b) = a'$

este un omonorfism surjectiv.

Mulţimea $A = \{0, a\}$ este un ideal subtractiv al lui S, dar $f(A) = \{0', c'\}$ nu este un ideal subtractiv, deoarece $(a'0', c')_\star = c' \in f(A)$ dar $a' \notin f(A)$.

Analog definiţiei date de [24] pentru $(n, m)-$inele, vom defini nucleul unui omomorfism în cazul $(n, m)-$semiinelelor.

Definiţie 4.1.2. Fie $(n, m)-$semiinelele $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$, iar $f : S \to S'$ un omonorfism surjectiv de $(n, m)-$semiinele.

a) Dacă $(n, m)-$semiinelul $S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ are elementul neutru aditiv care este şi element zero, $0'$, atunci mulţimea

$$\overset{-1}{f}(\{0\}) \overset{notat}{=} Kerf = \{x \in S | f(x) = 0'\}$$

se numeţe *nucleul lui f*

b) Dacă $(n, m)-$semiinelul $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ nu are element zero dar $|Ida(S')| \geqslant 2$, atunci *nucleul lui f* este mulţimea

$$Kerf = \overset{-1}{f}(Ida(S')) = \{x \in S | f(x) \in Ida(S')\}$$

Conform Propoziţiei 4.1.2 şi Propoziţiei 2.5.1 rezultă că nucleul unui omomorfism f este un ideal al $(n, m)-$semiinelului S.

Observaţie 4.1.2. Dacă $(n, m)-$semiinelele $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ şi $(S', (\,)_+, (\,)_\circ)$ au elemente neutre aditive care sunt şi elemente zero, notate 0 şi $0'$ iar $f : S \to S'$ este un omomorfism de $(n, m)-$semiinele, în general Ker$f = \{0\}$ nu implică f omomorfism injectiv.

Exemplul 4.1.2. Fie mulţimea $S = \{a, b, c\}$ cu $a < b < c$ pe care definim o operaţie ternară

$$( )_+ : S^3 \to S;\ (x_1x_2x_3)_+ = \max\{x_1, x_2, x_3\},$$

oricare ar fi $x_1, x_2, x_3 \in S$ şi o operaţie binară

$$\cdot : S^2 \to S,\ x_1 \cdot x_2 = \min\{x_1, x_2\}.$$

Tripletul $(S, ( )_+ \cdot)$ este cu $(3,2)-$semiinel comutativ , Ida $(S) = S$ =Idm(S), a este element zero al $(3,2)-$semiinelul S.

Considerăm acum, mulţimea $S' = \{0, 1\}$ pe care definim operaţia ternară $( )_+ : {S'}^3 \to S'$ în felul următor

$$(0,0,0)_+ = 0;\ (0,0,1)_+ = 1;\ (0,1,1)_+ = 1;\ (1,1,1)_+ = 1$$

iar operaţia binară $\cdot : S'^2 \to S'$ dată în următorul tabel:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tripletul $(S', ( )_+ ( )_\circ)$ este un $(3,2)-$seminel comutativ , Ida$(S') = S' = Idm(S')$. Considerăm omomorfismul $f : S \to S'$; $f(a) = 0$; $f(b) = f(c) = 1$. Nucleul omomorfismului f, Ker $f = \{0\}$, dar f nu este injectiv.

4.2 $(n, 2)-$Semiinele ale căror endomorfisme aditive sunt multiplicative

n 1977 Sullivan în lucrarea [126] a pus problema caracterizării inelelor care au proprietatea că fiecare endomorfism al grupului aditiv subiacent este un o endomorfism de inel. Un inel care are aceasă proprietatea se numeţe , pe scurt $AE-$inel.
De-a lungul timpului au fost publicate mai multe lucrări pe această temă (a se vedea de exemplu [21], [38], [45], [59], [72]).

În 1989, S. Feigelstock [45] a considerat următoarea generalizare a problemei lui Sullivan: Care inele $(R, +, \cdot)$ satisfac condiţia $\varphi(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = \varphi(a_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(a_n)$, pentru orice $\varphi \in$End$(R, +)$, oricare ar fi $a_1, ..., a_n \in R$,unde $n \geq 1$ este un număr natural? Astfel de endomorfisme aditive au fost numite $n-$multiplicative. Mai general, dacă f $(X_1, ..., X_t)$ este un polinom cu coeficienţi întregi de grad n, care inele satisfac condiţia $\varphi(f(a_1, ..., a_t)) = f(\varphi(a_1), ..., \varphi(a_t))$?

Feigelstock a arătat că, dacă f este un polinom omogen, atunci R are un ideal marginit astfel nct R/A satisface identitatea polinomială f.

În 1977, Tomás Kepka a studiat problema lui Sullivan în cazul inelelor neasociative [72] şi a arătat că fiecare $AE-$inel este asociativ. Mai târziu, în 1993 (vezi [73]), au fost studiate anumite clase de $AE-$semiinele şi s-a arătat că toate AE-semiinelele idempotente sunt asociative. n 2001 , Adina Pop şi Maria S. Pop au început studiul problemei lui Sullivan pentru o clasă mai generală de algebre, şi anume, cea a $(n,2)-$semiinelelor pentru $n \geq 3$ [98] ¸ Noi am continuat acest studiul, dând noi exemple şi caracterizări pentru $AE-(n,2)-$semiinele [90]. Spre deosebire de cazul binar, pentru $n \geq 4$, vom arăta că există $AE-(n,2)-$semiinele idempotente care nu sunt asociative.

În acest paragraf ne vom referi la $(n,2)-$semiinele în care operaţia binară (multiplicativă) nu este asociativă şi pe care, uneori, le vom numi $(n,2)-$semiinele generalizate.

Observăm că, folosind proprietatea de distributivitate a operaţiei binare faţă de cea $n-$ară avem următoarea egalitate $(x \cdot y)^{[k]} = x^{[k]} \cdot y = x \cdot y^{[k]}$ pentru orice $x, y \in S$ şi $k \in \mathbb{N}$.

Fie S un $(n,2)-$semiinel. Reamintim următoarele notaţii definite în Capitolul 2, paragraful 2.1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ida}\,(S) &= \{x \in S; x^{[1]} = x\} \text{ mulţimea idempotentilor aditivi}\\
\mathrm{Idm}\,(S) &= \{x \in S; x \cdot x = x\} \text{ mulţimea idempotentilor multiplicativi}\\
\mathrm{Id}\,(S) &= \mathrm{Ida}\,(S) \cap \mathrm{Idm}\,(S) \text{ mulţimea idempotentilor atât aditivi cât şi multiplicativi}
\end{aligned}$$

Definiţie 4.2.1. Un $(n,2)-$semiinel S se numeşte $(n,2)-$semiinel aditiv idempotent, pe scurt $a-$idempotent, dacă $\mathrm{Ida}\,(S) = S$.

Definiţie 4.2.2. Un $(n,2)-$semiinel S se numeşte $(n,2)-$semiinel multiplicativ idempotent, pe scurt $m-$idempotent, dacă $\mathrm{Idm}\,(S) = S$.

Definiţie 4.2.3. Un $(n,2)-$semiinel S este autodistributiv, pe scurt $D-$semiinel, dacă $x(yz) = (xy)(xz)$ şi $(xy)z = (xz)(yz)$ pentru orice $x, y, z \in S$;

Definiţie 4.2.4. Vom spune că un $(n,2)-$semiinel $(S, (\,)_+, \cdot)$ este:

2) $(n,2)-$inel dacă$(S, (\,)_+)$ este un $n-$grup comutativ;

3) $AE-(n,2)-$semiinel dacă orice endomorfism al lui $(S, (\,)_+)$ este şi endomorfism al lui $(S, \cdot)$, deci endomorfism al $(n,2)-$semiinelului S.

Exemplul 4.2.1. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [98]) Fie perechea
$(\mathbb{N}^*, (\,)_+)$; $(k_1^n)_+ = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i - n + 1$ un $n-$ semigrup comutativ, unde $n \geq 2$, care conţine un unic element aditiv idempotent şi anume 1.
Definim operaţia multiplicativă $\circ : \mathbb{N}^{*2} \to \mathbb{N}^*$, $x \circ y = 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$.
Tripletul $(\mathbb{N}, (\,)_+, \circ)$ este un $AE - (n, 2)-$semiinel asociativ.

Într-adevăr dacă $f \in End(\mathbb{N}^*, (\ )_+)$, din $f((k_1^n)_+) = (f(k_1), \ldots f(k_n))_+$, pentru $k_2 = \ldots = k_n = 1$ rezultă că $f(k_1) = f(k_1) + (n-1)f(1) - n + 1$. Deoarece $n \geq 2$ obţinem $f(1) = 1$. Pe de altă parte, $f(x \circ y) = f(1) = f(x) \circ f(x)$ şi deci f este un endomorfism de $(n, 2)-$semiinele.

Exemplul 4.2.2. (**Adina Pop** [90]) Fie $(S, (\,)_+)$ un $n-$semigrup comutativ idempotent (pe scurt $n-$ semilatice) şi $a \in S$ un element fixat.
Definim înmulţirea pe S astfel $x \cdot y = (x \overset{(n-2)}{a} y)_+$.
Atunci

$$\begin{aligned} x \cdot (y_1^n)_+ &= (x, \overset{(n-2)}{a}, (y_1^n)_+)_+ = (x^{[1]}, \overset{(n-2)}{a^{[1]}} (y_1^n)_+)_+ = \\ &= ((x \overset{(n-2)}{a} y_1)_+, \ldots, (x \overset{(n-2)}{a} y_n)_+)_+ = (x \cdot y_1, \ldots, x \cdot y_n)_+. \end{aligned}$$

şi analog se arată că $(y_1^n)_+ \cdot x = (y_1 \cdot x, ..., y_n \cdot x)_+$. Prin urmare S este un $AE - (n, 2)-$semiinel asociativ, comutativ, $a-$idempotent iar a este $m-$idempotent.
Dacă $f \in End(S, (\ )_+)$, atunci pentru orice $x, y \in S$ vom avea

$$f(x \cdot y) = f(x, \overset{(n-2)}{a}, y)_+) = (f(x), f(\overset{(n-2)}{a}), f(y))_+ = f(x) \cdot f(y)$$

dacă şi numai dacă $f(a) = a$. Aşadar nu orice $(n, 2)-$ semiinel definit pe
o $n-$ semilatice este un $AE - (n, 2)-$semiinel.

Exemplul 4.2.3. (**Adina Pop** [90]) Fie $(S, (\ )_+)$ o $n-$semilatice şi $i \in \{0, 1, ..., n\}$ un element arbitrar fixat.
Definim operaţia multplicativă asfel: $*_i : S^2 \to S$; $x *_i y = (\overset{(i)}{x} \overset{(n-i)}{y})_+$.
Atunci $(S, (\ )_+, *_i)$ este $a-$idempotent, $m-$idempotent şi un $AE - (n, 2)-$semiinel.
Într-adevăr, deoarece operaţia $n-$ară ”$(\ )_+$” este asociativă, comutativă şi toate elementele lui S sunt idempotente, atunci pentru orice $x_1, a_1, ..., a_n \in S$ avem

$$\begin{aligned} x *_i (a_1^n)_+ &= (\overset{(i)}{x}, \overset{(n-i)}{(a_1^n)_+})_+ = (...(\overset{(i)}{x^{[1]}}, \overset{(n-i)}{a_1})_+ ..., \overset{(n-i)}{a_n})_+ \\ &= ((\overset{(i)}{x}, \overset{(n-i)}{a_1})_+, ..., (\overset{(i)}{x}, \overset{(n-i)}{a_n})_+)_+ = (x *_i a_1, ..., x *_i a_n)_+. \end{aligned}$$

Analog se arată că $(a_1^n)_+ *_i x = (a_1 *_i x, ..., a_n *_i x)_+$.

Dacă $f : S \to S$ este un endomorfism aditiv, atunci

$$f(x *_i y) = f((\overset{(i)}{x}\overset{(n-i)}{y})_+) = \left(f(\overset{(i)}{x}), f(\overset{(n-i)}{y})\right)_+ = f(x) *_i f(y).$$

adică f este un $(n,2)-$ endomorfism de semiinele.

Spunem că aceste $(n,2)-$semiinele $(S, (\ )_+, *_i)$ sunt de tipul $(AE\ i)$, unde $i \in \{0, 1, ..., n\}$.

Observaţie 4.2.1. Operaţia multiplicativă $*_i$ este asociativă dacă şi numai dacă $i^2 \equiv i \bmod (n-1)$. Pentru orice $n \geq 3$ această congruenţă este satisfăcută dacă $i \in \{0, 1, n-1, n\}$. Pe de altă parte există anumite valori ale lui n astfel încât congruenţa este verificată şi pentru alte valori ale lui i. De exemplu, dacă $n = 7$ congruenţa este verificată a dacă $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7\}$. Observăm că pentru $n = p + 1$, unde p este un număr prim, există doar patru tipuri de $AEi - (n,2)-$semiinele asociative.

Într-adevăr, dacă $(x *_i y) *_i z = x *_i (y *_i z)$ pentru orice $x, y, z \in S$, atunci $\overset{(i)}{((\overset{(i)}{x}, \overset{(n-i)}{y})_+}, \overset{(n-i)}{z})_+ = (\overset{(i)}{x}, \overset{(n-i)}{(\overset{(i)}{y}, \overset{(n-i)}{z})_+})_+$ sau folosind produsul lung pentru "$(\,)_+$" obţinem

$$(\overset{(i^2)}{x}, \overset{(i(n-i))}{y}, \overset{(n-i)}{z})_+ = (\overset{(i)}{x}, \overset{(i(n-i))}{y}, \overset{((n-i)^2)}{z})_+$$

. Deoarece toate elementele sunt $a-$idempotente, egalitatea de mai sus este adevărată dacă şi numai dacă $i^2 \equiv i \bmod (n-1)$ şi $(n-i)^2 \equiv n - i \bmod (n-1)$ ceea ce este echivalent cu $n-1$ divide $i(i-1)$.

În particular, dacă dăm lui i valoarea 0,respectiv $i = n$ obţinem $x * y = y$ şi $x * y = x$ care generalizează semiinelele de tipul $(AE\ 1)$, respectiv $(AE\ 2)$ definite de Kepka in [73].

Observăm că $(n,2)-$ semiinelele de tipul $(AE\ i)$ nu sunt in general comutative. Reamintim definiţia $n-$lanţului şi anume:

Definiţie 4.2.5. O $n-$semilatice $(S, (\ )_+)$, unde S este un lanţ şi $(x_1^n)_+ \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in S$ se numeşte $n-$lanţ.

Exemplul 4.2.4. (**Adina Pop** [90]) Fie $(S, (\ )_+$un $n-$lanţ cu proprietatea că $(x_1^n)_+ = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Definim operaţia multplicativă asfel $x \cdot y = \max\{x, y\}$.

În continuare vom verifica dacă operaţia binară este distributivă faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_+$". Fără a restrânge generalitatea , presupunem că $x \leq y$ şi $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. Rezultă că$(x_1^n)_+ = x_1$ şi $x \cdot y = y$.În plus,

$$(x_1^n)_+ \cdot y = \max\{(x_1^n)_+, y\} = \max\{x_1, y\} = \begin{cases} y & \text{if} \quad x_1 \leq y \\ x_1 & \text{if} \quad y \leq x_1 \end{cases}$$

Vom distinge următoarele cazuri:

1. Dacă $x_n \leq y$, atunci

$$(x_1 \cdot y, ..., x_n \cdot y)_+ = (y, ..., y)_+ = y = (x_1^n)_+ \cdot y$$

2. Dacă $x_i \leq y \leq x_{i+1}$; unde $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, element fixat, atunci

$$(x_1 \cdot y, ..., x_i \cdot y, x_{i+1} \cdot y, ..., x_n \cdot y)_+ = \min\{y, ..., y,\ x_{i+1}, ..., x_n\} = y = (x_1^n)_+ \cdot y$$

3. Dacă $y \leq x_1$, atunci $y \leq x_i$, oricare ar fi $i \in \{1, ..., n\}$, atunci

$$(x_1 \cdot y, ..., x_n \cdot y)_+ = (x_1, ..., x_n)_+ = x_1 = (x_1^n)_+ \cdot y$$

În consecinţă, $(S, (\ )_+, \cdot)$ este un $(n, 2)-$semiinel comutativ, $a-$idempotent şi un $m-$idempotent.
Dacă considerăm un endomorfism f al $n-$lanţului $(S, (\ )_+$, atunci pentru orice $x_1 \leq ... \leq x_n$; $x_1, ..., x_n \in S$ vom avea $f((x_1^n)_+) = (f(x_1), ..., f(x_n))_+$ ceea ce este echivalent cu $f(x_1) = \min\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$. Rezultă că $f(x_1) \leq f(x_i)$; $i = \overline{1, n}$ şi deci f este o aplicaţie crescătoare.
Atunci

$$f(x \cdot y) = \begin{cases} f(y) & \text{if} \quad x \leq y \\ f(x) & \text{if} \quad y \leq x \end{cases} = \max\{f(x), f(y)\} = f(x) \cdot f(y)$$

şi în concluzie $(S, (\ )_+, \cdot)$ este un $AE - (n, 2)-$semiinel.

Analog, $(n, 2)-$semiinelul dual poate fi definit pe un $n-$lanţ $(S, (\ )_*, \circ)$, unde $(\ )_* : S^n \to S$; $(x_1^n)_* = \max\{x_1, ..., x_n\}$ şi $x \circ y = \min\{x, y\}$ oricare ar fi $x_1, ..., x_n,\ x, y \in S$. Această structură algebrică $(S, (\ )_*, \circ)$ este, de asemenea, un $AE - (n, 2)-$semiinel.

În continuare vom extinde anumite proprietăţi din cazul binar enunţate de Kepka [73], pentru $AE - (n, 2)-$semiinele.

Propoziţie 4.2.1. Adina Pop [90]) *Fie $(S, (\ )_+, \cdot)$ un $AE - (n, 2)-$semiinel. Dacă f este un endomorfism aditiv al lui S, atunci:*

i) Submulţimea $f(S)$ este un sub$-(n, 2)-$semiinel al lui S şi $f(S)$ este, de asemenea, un $AE - (n, 2)-$semiinel;

ii) Pentru orice $a \in S$, mulţimile $aS = \{ax;\ x \in S\}$ şi $Sa = \{xa;\ x \in S\}$ sunt $AE - (n, 2)-$semiinele;

iii) $(n, 2)-$Semiinelul S este un $D - (n, 2)-$semiinel;

iv) $a(bc); (ab)c \in$Idm(S) pentru orice $a, b, c \in S$.

Demonstraţie. i) Afirmaţia este imediată.

$ii)$ Deoarece pentru orice $a \in S$, translaţiile $\varphi_a, \psi_a : S \to S$, $\varphi_a(x) = ax$; $\psi_a = xa$ sunt endomorfisme aditive al lui S, atunci conform punctului $i)$ rezultă că $\varphi_a(S) = aS$, $\psi_a(S) = Sa$ sunt $AE-(m,2)-$semiinele şi în plus φ_a, ψ_a sunt endomorfisme multiplicative ale lui S.

$iii)$ Pentru orice $a, x, y \in S$, vom avea

$$a(xy) = \varphi_a(xy) = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y) = (ax) \cdot (ay)$$

respectiv

$$(xy)a = \psi_a(xy) = \psi_a(x) \cdot \psi_a(y) = (xa) \cdot (ya).$$

Rezultăcă conform Definiţiei 4.2.3 că S este un $D-(n,2)-$semiinel.

(iv) Deoarece S este un $D-(n,2)-$semiinel vom avea

$$a(aa) = (aa) \cdot (aa) = [a(aa)] \cdot [a(aa)]$$

şi deci $a(aa) \in \mathrm{Idm}(S)$ pentru orice $a \in S$. Analog se arată că $(aa)a \in$Idm(S). În plus, $a(aa) = (aa)a$. Mai mult decât atât, dacă $a \in$Idm(S) şi $b \in S$, atunci $ab, ba \in$Idm(S). Într-adevăr, $(ab)(ab) = (aa)b = ab$ şi analog $ba \cdot ba = ba$.

Conform punctului $iii)$, pentru orice $a, b, c \in S$, avem

$$\begin{aligned} a(bc) &= (ab)(ac) = [(ab)a)][(ab)c] = [(aa)(ba)][(ab)c] \\ &= [(aa)b][(aa)a][(ab)c) \in \mathrm{Idm}(S). \end{aligned}$$

Analog se demonstrează că $(ab) \cdot c \in$Idm(S). □

Menţionăm faptul că, în demonstraţia acestei teoreme nu am folosit asociativitatea operaţiei multiplicative.

Teoremă 4.2.1. (**Adina Pop** [90] *Fie $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ un $AE-(n,2)-$semiinel. Atunci:*

(i) Ida(S) =Id(S) $\subseteq$Idm(S);

(ii) $(ab)^{[t]} = \begin{cases} (ab)^{[r]}, \text{ dacă } t = nk + r;\ 0 < r < n;\ k \in \mathbb{N}^*, \\ (ab)^{[n]}, \text{ dacă } t = nk,\ \ k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Demonstraţie. (i)Dacă $a \in$Ida(S), $a^{[1]} = a$, atunci $f : S \to S$, $f(x) = a$ este un endomorfism aditiv. Conform Propoziţiei 4.2.1 rezultă că submulţimea $f(S) = \{a\}$ este un sub$-(n,2)-$semiinel al lui S şi f este un endomorfism multiplicativ . Rezultă că

$$a \cdot a = f(x) \cdot f(y) = f(xy) = a,$$

adică a este un idempotent multiplicativ.

Aşadar,

$$\mathrm{Ida}(S) \subseteq \mathrm{Idm}(S) \text{ şi } \mathrm{Id}(S) = \mathrm{Ida}(S)$$

(ii) Aplicaţia $g : S \to S$, $g(x) = x^{[1]}$ este un endomorfism aditiv.

Într-adevăr, folosind comutativitatea şi asociativitatea operaţiei $n-$are vom avea

$$\begin{aligned} g((x_1^n)_+) &= (x_1^n)_+^{[1]} = ((\overset{(n)}{x_1^n})_+)_+ = \left((\overset{(n)}{x_1})_+, \ldots, (\overset{(n)}{x_n})_+ \right)_+ = \\ &= (x_1^{[1]}, x_2^{[1]}, \ldots, x_n^{[1]})_+ = (f_1(x_1), \ldots, f_1(x_n))_+. \end{aligned}$$

Deoarece S este un $AE-(n,2)-$semiinel, aplicaţia g este endomorfism multiplicativ, adică $(ab)^{[1]} = a^{[1]}b^{[1]}$, oricare ar fi $a, b \in S$. Conform regulilor de calcul cu puteri (2.4), obţinem

$$(ab)^{[n+1]} = ((ab)^{[1]})^{[1]} = (a^{[1]} \cdot b)^{[1]} = a^{[1]} \cdot b^{[1]} = (ab)^{[1]}.$$

$$(ab)^{[n+2]} = ((ab)^{[n+1]} \, (\overset{(n-1)}{ab}))_+ = ((ab)^{[1]} \, (\overset{(n-1)}{ab}))_+ = (ab)^{[2]}.$$

Iterativ, observăm că $(ab)^{[n+r]} = (ab)^{[r]}$ oricare ar fi $r \in \{3, ..., n-1\}$.

Dacă presupunem că $(ab)^{[n(k-1)+r]} = (ab)^{[r]}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $r \in \{3, .., n-1\}$, atunci conform relaţiei(2.3) , vom avea

$$\begin{aligned} (ab)^{[nk+r]} &= ((ab)^{[1]}, ..., (ab)^{[1]}, (ab)^{[(n-1)(k-1)+r]})_+ \\ &= (ab)^{[1]}, ..., (ab)^{[1]}, (ab)^{[r]})_+ = (ab)^{[n+r]} = (ab)^{[r]}. \end{aligned}$$

Dacă $t = nk$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\begin{aligned} (ab)^{[nk]} &= ((ab)^{[nk-1]}, \, (\overset{(n-1)}{ab}))_+ = ((ab)^{[n(k-1)+n-1]}, \, (\overset{(n-1)}{ab}))_+ = \\ &= ((ab)^{[n-1]} \, (\overset{(n-1)}{ab}))_+ = (ab)^{[n]}. \end{aligned}$$

□

Corolar 4.2.1. (**Adina Pop** [90] *Dacă* $(S, (\,)_+, \cdot)$ *este un* $AE-(n,2)-$*semiinel, atunci:*

(i) $(ab)^{[1]} \in$*Id*(S)*, oricare ar fi* $a, b \in S$*;*

(ii) Dacă $a \in$*Idm*(S)*, atunci* $a^{[1]} \in$*Id*(S)*;*

(iii) Mulţimea Idm(S) *este un ideal al grupoidului* $(S, \cdot)$

şi Mulţimea Id(S) *este un ideal al* $(n,2)-$*semiinelului* $(S, (\,)_+, \cdot)$.

Demonstraţie. (i) Conform Teoremei 4.2.1(ii) avem:

$$((ab)^{[1]})^{[1]} = (ab)^{[n+1]} = (ab)^{[1]}$$

şi deci $(ab)^{[1]} \in$ Ida(S) =Id(S).

(ii) Dacă $a \cdot a = a$, atunci conform punctului (i) avem $a^{[1]} = (a \cdot a)^{[1]} \in$Id$(S)$.

(iii) Dacă $a \in$Idm(S) şi $x \in S$, deoarece S este un $D-(n,2)-$semiinel, vom avea

$$(ax) \cdot (ax) = (a \cdot a)x = ax$$

adică $ax \in$ Idm(S). Analog se arată că $xa \in$Idm(S), deci Idm(S) este un ideal al $n-$grupoidului $(S, \cdot)$.

Dacă $a \in$Ida(S), atunci pentru orice $x \in S$ vom avea

$$(ax)^{[1]} = a^{[1]} \cdot x = ax \text{ şi } (xa)^{[1]} = xa.$$

Rezultă că $ax, xa \in$ Ida(S). În plus, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in$Ida$(S)$, atunci $(a_1^n)_+ \in$Ida(S), şi în concluzie Id(S)= Ida(S) este un ideal al $(n,2)-$semiinelului S. $\square$

Teoremă 4.2.2. (Maria S. Pop, **Adina Pop** [98] *Fie* $(S, (\,)_+, \cdot)$ *un* $AE-(n,2)-$*semiinel şi*

$$S_r = \{x^{[r]}; x \in S\};\ r \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Atunci:

i) $(S_r, (\,)_+ \cdot)$ *este un sub-*$(n,2)$*-semiinel al lui* S *şi un* $AE-(n,2)-$*semiinel pentru orice* $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$*;*

ii) Id(S_r) *=Id*(S) *pentru orice* $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$*;*

iii)Pentru orice $x, y \in S_1$ *avem* $xy \in$*Id*S_1.

Demonstraţie. Dacă aplicăm Teorema 4.2.1, endomorfismului aditiv $f_r : S \to S$, $f_r(x) = x^{[r]}$, pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obţinem că $f_r(S) = S_r$ este un $AE-$sub-$(n,2)-$semiinel al lui S şi un $AE-(n,2)-$semiinel.

(ii) Pentru orice $x \in$Id(S), $x^{[1]} = x$ şi mai mult $x^{[r]} = x$, oricare ar fi $r \in \mathbb{N}^*$ şi deci $x \in S_r$.

În plus, $x \in$Ida(S_r) =Id(S_r),pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Aşadar, Id$(S)$ $\subseteq$Id(S_r). În concluzie Id(S_r) =Id(S).

iii) Dacă $x, y \in S_1$, adică există elementele $a, b \in S$ cu proprietatea că $x = a^{[1]}$ şi $y = b^{[1]}$, atunci

$$\begin{aligned} (xy)^{[1]} &= \left(a^{[1]}b^{[1]}\right)^{[1]} = \left((ab)^{[1]}\right)^{[1]} = (ab)^{[n+1]} = \\ (ab)^{[1]} &= a^{[1]}b^{[1]} = xy. \end{aligned}$$

□

Rezultatele obţinute în acest paragraf sunt adevărate chiar dacă operaţia multiplicativă a $(n,2)-$semiinelului nu este asociativă.
Nu toate $AE-(n,2)-$semiinelele sunt comutative aşa cum s-a văzut în Exemplul 4.2.3.

4.3 Teoreme de scufundare pentru $(n,2)-$ semiinele

În acest paragraf ne propunem să dăm o construcţie a unui $(n,2)-$inel de fracţii plecând de la un $(n,2)-$semiinel, care generalizează teorema binecunoscută din cazul binar:

Orice semiinel comutativ poate fi scufundat într-un inel comutativ.

O aplicaţie a acestei teoreme este extinderea semiinelului $(\mathbb{N},+,\cdot)$ a numerelor naturale la inelul întregilor $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

Reamintim că un $(n,2)-$semiinel $(R,(\,)_+,\cdot)$ se numeşte $(n,2)-$inel, dacă $(R,(\,)_+)$ este $n-$grup comutativ.

Observaţie 4.3.1. Reamintim, de asemenea, că într-un $(n,2)-$inel au loc următoarele egalităţi:

$$\overline{(a_1^n)_\circ} = (\overline{a}_1^n)_\circ \quad \text{şi} \quad \overline{a\cdot b} = \overline{a}\cdot b = a\cdot \overline{b}; \text{ oricare ar fi } a_i, a, b \in R, \text{ şi } i\in\{1,2,\dots n\}$$

Exemplul 4.3.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [88]) Fie

$$\mathcal{M}_m(R) = \{A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m} \mid a_{ij}\in R; 1\le i,j\le m\},\ m\equiv 1(\mathrm{mod}\, n-1).$$

Mulţimea tuturor matricilor pătratice de ordin m cu elemente dintr-un $(n,2)-$ inel $(R,(\,)_+,\cdot)$.

Definim o operaţie $n-$ară, respectiv una binară astfel: dacă $A_k = \left(a_{ij}^k\right)_{1\le i,j\le m}$ atunci

$$[A_1^n]_+ = (b_{ij})_{1\le i,j\le m},\ b_{ij} = \left(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^n\right)_\circ,$$

iar dacă

$$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le m},\ C = (c_{ij})_{1\le i,j\le m};\ A * C = (d_{ij})_{1\le i,j\le m}$$
$$d_{ij} = \left(\dots(a_{i1}c_{ij}, a_{i2}c_{2j}, \dots, a_{in}c_{nj})_\circ \dots a_{im}c_{mj}\right)_\circ$$

Este uşor de arătat că $(\mathcal{M}_m(R),[\ ]_\circ, *)$ este un $(n,2)-$inel.

În cele ce urmează vom demonstra câteva teoreme de scufundare pentru $(n,2)-$semiinele care le generalizează pe cele cunoscute la semiinele obişnuite, cu câteva precizări suplimentare.

Teoremă 4.3.1. (**Adina Pop**, M.S.Pop [88]) *Orice* $(n,2)-$*semiinel comutativ* $(S, (\,)_\circ, \cdot)$ *cu reducere, (adică cu simplificare relativ la operaţia n−ară) poate fi scufundat într-un* $(n,2)-$*inel comutativ.*

Demonstraţie. Fie $(S, (\,)_\circ, \cdot)$ un $(n,2)-$semiinel comutativ cu reducere. La fel ca şi în lucrările lui M. Pop , M.Câmpian [107] şi L. Iancu, M. Pop [64] pe S^n definim relaţia " $\sim$ " astfel:

$$as_2^n \sim bt_2^n \Leftrightarrow (at_2^n)_\circ = (bs_2^n)_\circ\,.$$

Se verifică uşor că această relaţie este una de echivalenţă. Notăm prin $\frac{a}{s_2^n}$, clasa de echivalenţă cu reprezentantul as_2^n şi prin $S_{S^{n-1}}$ mulţimea factor $S^n/_\sim$.

Se verifică uşor că:

$$\frac{a}{s_2^n} = \frac{(at_2^n)_\circ}{(s_2^n t_2)_\circ\, t_3^n}, \quad \text{oricare ar fi } t_2, t_3, ..., t_n \in S.$$

Definim operaţia $n-$ară $(\,)_+ : (S_{S^{n-1}})^n \to S_{S^{n-1}}$ prin

$$\left(\frac{a_1}{s_{12}^{1n}}, \frac{a_2}{s_{22}^{2n}}, \ldots, \frac{a_n}{s_{n2}^{nn}}\right)_+ = \frac{(a_1^n)_\circ}{(s_{12}^{n2})_\circ\,(s_{13}^{n3})_\circ \cdots (s_{1n}^{nn})_\circ}$$

şi o operaţie binară $* : (S_{S^{n-1}})^n \to S_{S^{n-1}}$ prin

$$\frac{a}{s_2^n} * \frac{b}{t_2^n} = \frac{((\ldots((ab, s_2t_2, \ldots, s_2t_n)_\circ, s_3t_2, \ldots, s_3t_n)_\circ \ldots)_\circ, s_nt_2, \ldots, s_nt_n)_\circ}{(at_2, \ldots, at_n, bs_2)_\circ bs_3, \ldots, bs_n}.$$

Aceste operaţii sunt bine definite, întrucât nu depind de alegerea reprezentaţilor. Conform Teoremei 1.5 din lucrarea [7] a lui M. S. Pop, perechea $(S_{S^{n-1}}, (\,)_+)$ este un $n-$grup comutativ în care transversala elementului $\frac{a}{s_i^n}$ este de forma:

$$\overline{\left(\frac{a}{s_2^n}\right)} = \frac{(\ldots((a, s_i^n)_\circ, s_i^n)_\circ \ldots, s_2^n)_\circ}{\overset{(n-1)}{a}}.$$

Se verifică, de asemenea, că operaţia multiplicativă " $*$ " în $S_{S^{n-1}}$ este asociativă şi distributivă relativ la operaţia $n-$ară $(\,)_+$,adică $(R_{R^{n-1}}, ()_+, *)$ este un $(n,2)-$inel comutativ.

În continuare definim aplicaţia

$$\alpha : S \to S_{S^{n-1}},\ \alpha(a) = \frac{\left(a_1 \overset{(n-1)}{s}\right)_\circ}{\overset{(n-1)}{s}}, \text{oricare ar fi } s \in S.$$

Aplicaţia α este bine definită, nedepinzând de alegerea reprezentanţilor şi este un omomorfism de $(n,2)-$semiinele.

Într-adevăr,

$$(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))_+ = \left(\frac{(a_1, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}}, \ldots, \frac{(a_n, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}}\right)_+ =$$

$$= \frac{\left(\left(a_1, \overset{(n-1)}{s}\right)_\circ, \ldots, \left(a_n, \overset{(n-1)}{s}\right)_\circ\right)_\circ}{\overset{(n-1)}{s^{[1]}}} = \frac{\left((a_1^n)_\circ \ \overset{(n-1)}{s^{[1]}}\right)_\circ}{\overset{(n-1)}{s^{[1]}}} = \frac{\left((a_1^n)_\circ \ \overset{(n-1)}{s}\right)_\circ}{\overset{(n-1)}{s}} = \alpha\left((a_1^n)_\circ\right).$$

Folosind asociativitatea, comutativitatea operaţiei "$(\,)_\circ$" şi distributivitatea operaţiei "$\cdot$" faţă de operaţia "$(\,)_\circ$" obţinem $\alpha(a \cdot b) = \alpha(a) * \alpha(b)$.
Într-adevăr

$$\begin{aligned}
\alpha(a) * \alpha(b) &= \frac{(a, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}} * \frac{(b, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}} = \\
&= \frac{(((a, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot (b, \overset{(n-1)}{s})_\circ, \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ, \ldots,)_\circ \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ}{((a, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot s, \ldots, (a, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot s, (b, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot s), \ldots, (b, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot s)_\circ} \\
&= \frac{(((a, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot (b, \overset{(n-1)}{s})_\circ, \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ, \ldots,)_\circ \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ}{((a, \overset{(n-1)}{s^{(n-1)}})_\circ \cdot s, (b, \overset{(n-1)}{s})_\circ \cdot s)_\circ, (b, \overset{(n-2)}{s^{(n-1)}})_\circ \cdot s} \\
&= \frac{(a \cdot b, \overset{(n-1)}{a \cdot s}, \overset{(n-1)}{b \cdot s}, \overset{(n-1)^2}{s \cdot s}, \overset{(n-1)^2}{s \cdot s})_\circ}{((a \cdot s, \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ, b \cdot s)_\circ, \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ \overset{(n-1)}{b \cdot s}, \overset{(n-1)(n-2)}{s \cdot s}} \\
&= \frac{((a \cdot b, \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ, \overset{(n-1)}{a \cdot s}, \overset{(n-1)}{b \cdot s}, \overset{(n-1)}{s} \cdot \overset{(n-2)}{s})_\circ}{(\overset{(n-1)}{s \cdot s}, \overset{(n-1)}{a \cdot s})_\circ \overset{(n-1)}{b \cdot s}, \overset{(n-1)(n-2)}{s \cdot s}} \\
&= \frac{((a \cdot b) \overset{(n-1)}{s \cdot s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s \cdot s}} = \frac{((a \cdot b), \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}} = \alpha(a \cdot b)
\end{aligned}$$

Mai mult, dacă $\alpha(a) = \alpha(b)$ vom avea $\frac{(a, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}} = \frac{(b, \overset{(n-1)}{s})_\circ}{\overset{(n-1)}{s}}$ şi deci

$$((a, \overset{(n-1)}{s})_\circ, \overset{(n-1)}{s})_\circ = ((b, \overset{(n-1)}{s})_\circ \overset{(n-1)}{s})_\circ.$$

Folosind proprietatea de reducere relativ la $(\,)_\circ$ obţinem $a = b$, adică α este un omomorfism injectiv de $(n,2)-$semiinele.

□

În continuare menţionăm că are loc următoarea proprietate de universalitate care determină $(n,2)-$inelul $(S_{S^{n-1}}, (\,)_+, *)$ până la un izomorfism.

Teoremă 4.3.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop) *Fie* $(S, (\,)_\circ, \cdot)$ *un* $(n,2)-$*semiinel comutativ, cu reducere. Dacă* $S_{S^{n-1}}$ *este* $(n,2)-$ *inelul construit mai sus şi* $\alpha : S \to S_{S^{n-1}}$

este omomorfismul canonic definit în Teorema 4.3.1, atunci pentru orice morfism $\beta : S \to R'$, *unde* $(R', [\,], <>)$ *este un* $(n,2)-$*inel comutativ există un unic omomorfism* $\gamma : S_{S^{n-1}} \to R'$ *astfel încât* $\gamma \circ \alpha = \beta$.

O altă teoremă binecunoscută de scufundare ne spune că orice inel poate fi scufundat într-un inel de matrici. Absenţa elementului zero în $(n,2)-$inele nu restrânge, însă valabilitatea teoremei în cazul acestor tipuri de inele.

Teoremă 4.3.3. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [88]) *Orice* $(n,2)-$ *inel poate fi scufundat într-un* $(n,2)-$*inel de matrici.*

Demonstraţie. Fie $(R, (\,)_\circ, \cdot)$ un $(n,2)-$inel şi $(\mathcal{M}_m(R), [\,]_+, *)$, $(n,2)-$ inelul de matrici definit în Exemplul 4.3.1 unde $m = k(n-1)+1$.
Aplicaţia

$$f : R \to \mathcal{M}_m(R), f(a) = \begin{pmatrix} a & a & . & . & . & a \\ a & a & . & . & . & a \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{a} & \overline{a} & . & . & . & \overline{a} \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{a} & \overline{a} & . & . & . & \overline{a}; \end{pmatrix}$$

unde pe ultimele k linii avem elementul transversal al lui $a \in R$, $\overline{a}$, este un omomorfism injectiv de $(n,2)-$inele.

Într-adevăr, deoarece $a_1, a_2, ..., a_n \in R$, $\overline{(a_1^n)_\circ} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)_\circ$ vom avea

$$f((a_1^n)_\circ) = [f(a_n), \ldots, f(a_n)]_+.$$

Conform distributivităţilor operaţiei binare " $\cdot$ "faţă de operaţia $n-$ară "$(\,)_\circ$" şi a proprietăţii transversalei într-un $(n,2)-$inel vom obţine:

$$(\overset{(n-1)}{a \cdot b}, a \cdot \overline{b})_\circ = a \cdot (\overset{(n-1)}{b}, \overline{b})_\circ = a \cdot b$$

respectiv

$$(\overset{(n-1)}{\overline{a} \cdot b}, \overline{a} \cdot \overline{b})_\circ = \overline{a} \cdot (\overset{(n-1)}{b}, \overline{b})_\circ = \overline{a} \cdot b = \overline{a \cdot b},$$

relaţii care au loc şi pentru produsul "lung" de $m = k(n-1)+1$.
Produsul lung conduce la k produse de n termeni.

$$\begin{aligned} (\overset{(m-k)}{a \cdot b}, \overset{(k)}{a \cdot \overline{b}})_\circ &= a \cdot (\overset{(k(n-2)+1)}{b}, \overset{(k)}{\overline{b}})_\circ = \\ &= a \cdot (\overset{(n-2)}{b}, (\ldots (\overset{(n-2)}{b}, (\overset{(n-1)}{b}, \overline{b})_\circ, \overline{b})_\circ, \ldots)_\circ, \overline{b})_\circ = a \cdot b \end{aligned}$$

şi analog

$$(\overset{(m-k)}{\overline{a}\cdot b}, \overset{(k)}{\overline{a}\cdot \overline{b}})_\circ = \overline{a}\cdot b = \overline{a\cdot b}$$

În plus

$$f(a)*f(b) = \begin{pmatrix} a & a & . & . & . & a \\ a & a & . & . & . & a \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{a} & \overline{a} & . & . & . & \overline{a} \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{a} & \overline{a} & . & . & . & \overline{a} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b & b & . & . & . & b \\ b & b & . & . & . & b \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{b} & \overline{b} & . & . & . & \overline{b} \\ . & . & . & . & . & . \\ \overline{b} & \overline{b} & . & . & . & \overline{b} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\overset{(m-k)}{a\cdot b}, \overset{(k)}{a\cdot \overline{b}})_\circ & \dots & (\overset{(m-k)}{a\cdot b}, a\cdot \overset{(k)}{\overline{b}})_\circ \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\overset{(m-k)}{\overline{a}\cdot b}, \overset{(k)}{\overline{a}\cdot \overline{b}})_\circ & \dots & (\overset{(m-k)}{\overline{a}\cdot b}, \overset{(k)}{\overline{a}\cdot \overline{b}})_\circ \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\overset{(m-k)}{\overline{a}\cdot b}, \overset{(k)}{\overline{a}\cdot \overline{b}})_\circ & \dots & (\overset{(m-k)}{\overline{a}\cdot b}, \overset{(k)}{\overline{a}\cdot \overline{b}})_\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot b & \dots & a\cdot b \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{a\cdot b} & \dots & \overline{a\cdot b} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{a\cdot b} & \dots & \overline{a}\cdot \overline{b} \end{pmatrix} = f(a\cdot b)$$

□

În demonstraţiile Teoremelor 4.3.1 şi 4.3.3 comutativitatea operaţiei $n-$arĕ poate fi înlocuită cu o condiţie mai slabă şi anume aceea de semicomutativitate.

4.4 Teoreme de scufundare pentru $(n, m)-$semiinele

În acest paragraf vom considera $(n, m)-$semiinele $S, (\,)_+, (\,)_\circ$ în care perechea $(S, (\,)_+)$ este $n-$semigrup, operaţia "$(\,)_+$" nefiind în general comutativă.

Dacă considerăm $(S, (\,)_+)$ un n-semigrup medial şi End$(S, (\,)_+)$ mulţimea

$$\text{End}(S, (\,)_+) = \{f : S \to S | f \text{ endomorfism al } n-\text{semigrupului}(R, (\,)_+)\}$$

, atunci definim pe End$(S, (\,)_+)$ două operaţii, una $n-$ară astfel:

$$(f_1^n)_+(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))_+ \ (\forall) f_1 f_2, ... f_n \in \text{End}(S, (\ )_+)$$

şi una $m-$ară

$$(f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_m)(x) = f_1(f_2(...(f_m(x))...))$$

pentru orice $f_1, f_2, \dots, f_m \in$End$(S, (\ )_+)$.

Daca $f_1, f_2, \ldots, f_n \in$End$(S, (\ )_+)$ atunci pentru orice $x_1, x_2, ..., x_n \in S$, folosind faptul ca $(S, (\,)_\circ)$ este un $n-$semigrup medial, vom avea:

$$\begin{aligned}(f_1^n)_+((x_1^n)_+) &= (f_1((x_1^n)_+), f_2((x_1^n)_+), \ldots, f_n\,((x_1^n)_+))_+\\ &= (f_1(x_1), \ldots, f_1(x_n))_+, \ldots, (f_n(x_1), \ldots, f_n(x_n))_+)_+\\ &= (f_1^n(x_1), f_1^n(x_2), \ldots, f_1^n(x_n))_+\,.\end{aligned}$$

Iar

$(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m)\,((x_1^n)_+) = (f_1(f_2(\ldots(f_m((x_1^n)_+))\ldots))$

$= f_1(f_2(\ldots(f_m(x_1), \ldots, f_m(x_n))_+)\ldots))$

$= (f_1(f_2(\ldots(f_m(x_1))\ldots)), f_1(f_2(\ldots f_m(x_2))\ldots)), \ldots, f_1(f_2(\ldots(f_m(x_n))\ldots)))_+$

$= ((f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m)(x_1), \ldots, (f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m)(x_n))_+$

Deci

$$(f_1^n)_+\,, (f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m) \in \mathrm{End}(R, (\,)_+)$$

Se verifică uşor că au loc următoarele afirmaţii

Propoziţie 4.4.1. Adina Pop [87] *Mulţimea tuturor endomorfismelor unui $n-$semigrup medial $(S, (\,)_+)$ formează un $(n, m)-$semiinel (End$(S, (\,)_+, \circ)$ cu unitate, unde " $\circ$ " este compunerea repetată a endomorfismelor.*

Următoarea teoremă reprezintă o generalizare a Teoremei 6 a lui I.Purdea [111]

Teoremă 4.4.1. *Dacă $(S, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel, $c_1, c_2, \ldots, c_{m-2} \in S$ elemente fixate, nu neapărat distincte, atunci:*
i)aplicaţia $\varphi : (S, (\,)_+) \to End(S, (\,)_+)$, $\varphi(a) = t_a$ unde $t_a : S \to S$, $t_a(x) = (a\, c_1^{m-2}\, x)_\circ$ este un omomorfism de $n-$semigrupuri.

ii) Dacă $(n, m)-$semiinelul S este comutativ şi $c_1, c_2, \ldots, c_{m-2} \in Idm(S)$, atunci φ este omomorfism de $(n, m)-$semiinele. Dacă $(n, m)-$semiinelul S este cu simplificare, atunci omonorfismul φ este injectiv.

Demonstraţie. i) Fie elementele $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$. Atunci

$$\varphi((a_1^n)_+) = t_{(a_1^n)_+} \text{ şi } t_{(a_1^n)_+}(x) = ((a_1^n)_+, c_1^{m-2}, x)_\circ$$

pentru orice $x \in S$.

Aplicând distributivitatea operaţiei $m-$are "$(\,)_\circ$" faţă de operatia $n-$ară "$(\,)_+$", vom avea

$$t_{(a_1^n)_+}(x) = ((a_1\, c_1^{m-2}\, x)_\circ, \ldots, (a_n\, c_1^{m-2}\, x)_\circ)_+ = (t_{a_1}(x), \ldots, t_{a_n}(x))_+$$

pentru orice $x \in S$.
Prin urmare,

$\varphi((a_1^n)_+) = (\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))_+$ oricare ar fi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$ adică φ este un omomorfism de $n-$semigrupuri.

ii) Dacă considerăm elementele $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S$, atunci

$$\varphi((a_1^m)_\circ) = t_{(a_1^m)_\circ},$$
$$t_{(a_1^m)_\circ}(x) = ((a_1^m)_\circ \, c_1^{m-2} \, x)_\circ$$

pentru orice $x \in S$.
Folosind comutativitatea, asociativitatea operaţiei $m-$are şi faptul că $c_i^{<1>} = c_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$ vom obţine

$$t_{(a_1^m)_\circ}(x) = ((a_1^m)_\circ, c_1^{<1>}, \ldots, c_{m-2}^{<1>}, x)_\circ = (a_1, c_1^{m-2}, (a_2 c_1^{m-2}, (\ldots (a_m \, c_1^{m-2} \, x)_\circ \ldots)))_\circ$$

$$= t_{a_1}(t_{a_2}(\ldots(t_{a_m}(x))\ldots)) = (t_{a_1} \circ t_{a_2} \circ t_{a_m})(x).$$

oricare ar fi $x \in S$. Prin urmare $\varphi((a_1^m)_\circ) = (\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots \varphi(a_m))_\star$.

În continuare vrem să arătăm că omomorfismul φ este injectiv. Dacă presupunem că $\varphi(a) = \varphi(b)$ rezultă că $t_a = t_b$ adică $t_a(x) = t_b(x)$ pentru orice $x \in S$. Deoarece $(n, m)-$semminelul S este cu simplificare vom avea $(a \, c_1^{m-2} \, x)_\circ = (b \, c_1^{m-2} \, x)_\circ \Rightarrow a = b$. □

În cazul particular al $(n, 2)-$semiinelelor se obţine o generalizare a Teoremei 7 din lucrarea lui I. Purdea [111].

Corolar 4.4.1. *Dacă $(S, ( )_+, \cdot)$ este un $(n, 2)-$semiinel, atunci aplicaţi $\varphi : S \to End(S, ( )_+); \varphi(a) = t_a : S \to S$ unde $t_a(x) = a \cdot x$ este un omomorfism de $(n, 2)-$semiinele. Dacă $(n, 2)-$semiinelul S are element neutru multiplicativ, atunci omomorfismul φ este injectiv.*

Dacă $(S, ( )_+)$ este un $n-$grup şi $f \in$End$(S, ( )_+)$, atunci putem defini o funcţie $\overline{f}(x) = f(\overline{x})$, unde $\overline{x}$ este transversala aditivă al lui $x \in S$.

Atunci are loc următoarea propoziţie:

Propoziţie 4.4.2. Adina Pop [87] *Mulţimea tuturor endomorfismelor unui $n-$grup comutativ formează un $(n, m)-$inel.*

Următorul corolar este o generalizare a Teoremei lui Poincaré de scufundare a inelelor [112]: *Orice inel cu unitate se scufundă izomorf în inelul endomorfismelor unui grup abelian.*

Corolar 4.4.2. **Adina Pop** [87] *Orice* $(n,m)-$*semiinel* $(S,(\,)_+,(\,)_*)$ *cu element neutru multiplicativ se poate scufunda izomorf în* $(n,m)-$*semiinelul endomorfismelor* $(End(S,(\,)_+,\circ)$.

Demonstraţie. Această afirmaţie rezultă din Teorema 4.4.1, Propoziţia 2.1.1, considerând endomorfismul $t_a : S \to S,\ t_a(x) = (a\,x\,\overset{(m-2)}{e})_\circ$, oricare ar fi $a \in A$. $\square$

Pentru $m = 2$ regăsim un rezultat al lui Glazek şi Gleichgewicht [49]

Corolar 4.4.3. *Dacă*$(n,2)-$*inelul* $(R,(\,)_+,(\,)_*)$ *are un element cu care se poate simplifica (relativ la operaţia multiplicativă* $(\,)_*$*), atunci el este izomorf cu un* $(n,2)-$*inel de endomorfisme al* $n-$*grupului* $(R,(\,)_+)$.

Fie $R^X = \{f \mid f : X \to R\}$ unde X este o mulţime şi $(R,(\,)_+,(\,)_*)$ un $(n,m)-$inel. Definim operaţiile

$$\left((f_n^1)_+\right)(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))_+$$

pentru orice $f_1, f_2, \ldots, f_m \in R^X$, respectiv $(f_1^m)_*(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))_*$ oricare ar fi $f_1, f_2, \ldots, f_m \in R^X$.
Se verifică uşor că $(R,(\,)_+,(\,)_*)$ este un $(n,m)-$inel.

Teoremă 4.4.2. *Orice* $(n,m)-$*inel* $(R,(\,)_+,(\,)_*)$ *poate fi scufundat într-un* $(n,m)-$*inel al tuturor aplicaţiilor definite pe o mulţime* X *cu valori în* $(n,m)-$ *inelul* $(R,(\,)_+,(\,)_*)$.

Demonstraţia acestei teoreme este analoagă Teoremei 4.1.23 din monografia domnului profesor I.Purdea [112].

Capitolul 5

Contribuţii la teoria (n,m)-semiinelelor topologice

5.1 Definiţii. Exemple

n-Grupurile topologice au fost studiate prima dată de G. Crombez şi G. Six [26], apoi de către Opp [85], Dudek [36]. În articolele menţionate se arată că deşi elementul unitate lipseşte în general în $n-$grupuri sau există mai multe unităţi, acesta nu constituie un impediment în obţinerea unor rezultate asemănătoare celor din cazul binar.

De asemenea, M. S. Pop [99] a studiat posibilitatea extinderii unor rezultate din teoria clasică a semigrupurilor topologice la cazul $n-$ar. S. Kar [71], [70] a studiat anumite aspecte toplogice pe semiinele ternare. În acest paragraf se studiază unele proprietăţi algebrice ale $(n, m)-$semiinelelor topologice. Reamintim pentru început definiţiile unor noţiunicu care vom opera în continuare.

Definiţie 5.1.1. Se numeşte spaţiu topologic, o pereche (X, τ) unde X este o mulţime arbitrară, iar τ o familie de submulţimi ale lui X care verifică condiţiile :
(i) $\emptyset, X \in \tau$
(ii) dacă $A, B \in \tau$ atunci $A \cap B \in \tau$
(iii) dacă $A_\alpha \in \tau, \alpha \in \Omega$ atunci $\cup\{A_\alpha | \alpha \in \Omega\} \in \tau$. Elementele lui τ se numesc mulţimi deschise ale spaţiului topologic (X, τ). Familia τ de submulţimi deschise ale lui X se numeşte topologie pe mulţimea X.

Definiţie 5.1.2. O submulţime V a unui spaţiu topologic X se numeşte vecinătate a unui punct $x \in X$ dacă există o mulţime deschisă $U \subset X$ astfel încât $x \in U$ şi $U \subseteq V$.

Definiţie 5.1.3. Fie X şi Y două spaţii topologice. O aplicaţie $f : X \to Y$ se numeşte continuă dacă imaginea inversă $\overset{-1}{f}(U)$ a oricărei submulţimi deschise U a lui Y este deschisă în X.

Teoremă 5.1.1. Dacă $f : X \to Y$ este o aplicaţie a unui spaţiu topologic X într-un spaţiu topologic Y, următoarele condiţii sunt echivalente :
(1) f este continuă
(2) imaginea inversă $\overset{-1}{f}(F)$ a unei submulţimi închise F a lui Y este închisă în X
(3) pentru orice punct $x \in X$ şi orice vecinătate $V_{f(x)}$ a lui $f(x)$ există o vecinătate U_x a punctului x astfel încât $f(U_x) \subseteq V_{f(x)}$
(4) pentru orice submulţime $A \subseteq X$ are loc $f(clA) \subseteq cl(f(A))$

Definiţie 5.1.4. Un spaţiu topologic X se numeşte spaţiu Hausdorff sau spaţiu separat dacă pentru orice puncte distincte $x_1, x_2 \in X$ există mulţimile disjuncte $D_1 \subset X, D_2 \subset X$ astfel încât $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$.

Într-un spaţiu Hausdorff orice puncte distincte din X pot fi separate prin vecinătăţi disjuncte. Într-un spaţiu Hausdorff orice mulţime finită este închisă fiindcă orice mulţime formată dintr-un singur element este închisă.

Definiţie 5.1.5. O mulţime $F \subseteq X$,unde X este un spaţiu topologic, se numeşte mulţime închisă dacă complementara sa $X \setminus F$ este mulţime deschisă.

Definiţie 5.1.6. Dacă A este o submulţime a spaţiului topologic X, se numeşte aderenţa lui A sau închiderea lui A intersecţia tuturor mulţimilor închise care conţin pe A şi se notează Cl(A).

Definiţie 5.1.7. O mulţime $A \subset X$ se numeşte densă in X, dacă Cl(A)=X.

Definiţie 5.1.8. Un spaţiu topologic X se numeşte spaţiu compact, dacă X este un spaţiu Hausdorff şi orice acoperire deschisă a lui X are o subacoperire finită. Cu alte cuvinte, pentru orice acoperire deschisă $\{U_s\}_{s \in S}$ a spaţiului X există o mulţime finită $\{s_1, s_2, ..., s_k\} \subseteq S$ astfel încât

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{s_i}$$

Definiţie 5.1.9. Fie X un spaţiu topologic şi Y o submulţime a lui X.Familia $\{Y \cap U : U \in \tau\}$ defineşte o topologie pe Y numită topologia indusă pe Y şi se notează $\tau_{|_Y}$. Mulţimea Y împreună cu acestă topologie se numeşte subspaţiu a spaţiului X.

Definiţie 5.1.10. Un spaţiu topologic X se numeşte spaţiu local compact, dacă pentru orice $x \in X$ există o vecinătate U a punctului x astfel încât Cl(U) este subspaţiu compact a lui X.

Definiţie 5.1.11. Un spaţiu topologic X se numeşte conex dacă orice submulţime închisă şi deschisă a lui X este $\emptyset$ sau X.

Definiţie 5.1.12. Fie (S,τ) un spaţiu topologic şi $(S,(\,)_+,(\,)_\circ)$ un $(n,m)-$semiinel. Atunci $(S,\tau,(\,)_+,(\,)_\circ)$ se numeşte $(n,m)-$*semiinel topologic* dacă operaţiile privite ca aplicaţii $(\,)_+ : S^n \to S$, $(a_1,a_2,...,a_n) \mapsto (a_1^n)_+$ şi $(\,)_\circ : S^m \to S$, $(a_1,a_2,...,a_m) \mapsto (a_1^m)_\circ$ sunt continue.

Axiomele unui $(n,m)-$semiinel topologic pot fi scrise cu ajutorul vecinătăţilor elementelor după cum urmează:

(S,τ) este un (n,m)-semiinel topologic dacă şi numai dacă $(S,(\,)_\circ)$ este un (n,m)-semiinel, τ o topologie şi următoarele condiţii sunt satisfăcute :
(i) Pentru orice elemente $a_1,a_2,...,a_n \in S$ şi orice vecinătate $U_{(a_1^n)_+}$ a elementului $(a_1^n)_+$ există vecinătăţile $U_{a_1},...U_{a_n}$ a elementelor $a_1,a_2,...,a_n$ astfel încât $(U_{a_1},U_{a_2},...Ua_n)_+ \subseteq U_{(a_1^n)_+}$;
(ii) Pentru orice elemente $a_1^m \in S$ şi orice vecinătate $U_{(a_1^m)_\circ}$ a elementului $(a_1^m)_\circ$ există vecinătăţile $U_{a_1},...U_{a_m}$ a elementelor $a_1,a_2,...,a_m$ astfel încât $(U_{a_1},U_{a_2},...Ua_m)_\circ \subseteq U_{(a_1^m)_\circ}$

Următoarea definiţie generalizează definiţia unui inel topologic uzual dată de M. Ursul în lucrarea [136].

Definiţie 5.1.13. O pereche (R,τ), unde $(R,(\,)_+,(\,)_\circ)$ este un $(n,m)-$inel şi τ este o topologie definită pe R se numeşte $(n,m)-$inel topologic dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(i) aplicaţia $(\,)_+ : S^n \to S$, $(a_1,a_2,...,a_n) \to (a_1^n)_+$ este continuă;

(ii) aplicaţia $S \to S$, $a \to \overline{a}$, unde $\overline{a}$ este transversala lui a, este continuă;

(iii) aplicaţia $(\,)_\circ : S^m \to S$, $(a_1,a_2,...,a_m) \to (a_1^m)_\circ$ este continuă.

Cu ajutorul vecinătăţilor avem următoarea definiţie echivalentă:
(R,τ) este un (n,m)-inel topologic dacă şi numai dacă $(R,(\,)_\circ)$ este un (n,m)-inel, τ o topologie şi următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) Pentru orice elemente $a_1,a_2,...,a_n \in R$ şi orice vecinătate $U_{(a_1^n)_+}$ a elementului $(a_1^n)_+$ există vecinătăţile $U_{a_1},...U_{a_n}$ a elementelor $a_1,a_2,...,a_n$ astfel încât $(U_{a_1},U_{a_2},...Ua_n)_+ \subseteq U_{(a_1^n)_+}$;

(ii) Pentru orice element $a \in R$ şi orice vecinătate $U_{\overline{a}}$ a transversalei lui a, $\overline{a}$ există o vecinătate V_a a elementului a astfel încât $\overline{V}_a \subseteq U_{\overline{a}}$;
(iii) Pentru orice elemente $a_1^m \in S$ şi orice vecinătate $U_{(a_1^m)_\circ}$ a elementului $(a_1^m)_\circ$ există vecinătăţile $U_{a_1}, ...U_{a_m}$ a elementelor $a_1, a_2, ..., a_m$ astfel încât $(V_{a_1}, V_{a_2}, ...Va_m)_\circ \subseteq V_{(a_1^m)_\circ}$

Definiţie 5.1.14. Dacă $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic şi (S, τ) este un spaţiu topologic Hausdorff, atunci $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte $(n, m)-$semiinel topologic separat.

Dacă $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic şi (S, τ) este un spaţiu topolgic compact, atunci $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ se numeşte $n-$semigrup topologic compact.

Deoarece în cazul $n-$grupurilor elementul $\overline{a}$ desemnează transversala lui a, pentru evitarea oricărei confuzii, închiderea submulţimii $H \subseteq A$ o vom nota cu ClH.

Observaţie 5.1.1. Operaţia $n-$ară "$(\,)_\circ$" este continuă dacă şi numai dacă pentru orice $H_i \subseteq A$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem

$$(\mathrm{Cl}\, H_1, \mathrm{Cl}\, H_2, \ldots, \mathrm{Cl}\, H_n)_+ \subseteq \mathrm{Cl}\,(H_1, H_2, \ldots, H_n)_+;$$

$$(\mathrm{Cl}\, H_1, ..., \mathrm{Cl}\, H_m)_\circ \subseteq \mathrm{Cl}\,(H_1^m)_\circ.$$

Exemplul 5.1.1. Fie mulţimea $\mathbb{R}^2$ înzestrată cu topologia obisnuită τ_0. Dacă pe mulţimea $\mathbb{R}^2$ definim operaţiile ;
$(\ \ )_+ : (\mathbb{R}^2)^n \to \mathbb{R}^2$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n))_+ = (x_1 + x_2 + ... + x_n, y_1 + y_2 + ... + y_n)$
respectiv
$(\ \ )_\circ : (\mathbb{R}^2)^3 \to \mathbb{R}^3$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))_\circ = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3)$
atunci $(\mathbb{R}^2, \tau_0, (\ \ )_+, (\ \ )_\circ)$ este un $(n, 3)-$inel topologic semicommutativ.

Exemplul 5.1.2. Dacă mulţimea $\mathbb{N}^2$ este înzestrată cu topologia obişnuită şi aceleaşi operaţii ternare ca şi cele definite în exemplul anterior, atunci $(\mathbb{N}^2, \tau_0, (\ \ )_+, (\ \ )_\circ)$ este un $(n, 3)-$semiinel topologic semicomutativ.

5.2 Proprietăţi algebrice ale $(n, m)-$semiinelelor topologice

În acest paragraf ne propunem să studiem unele proprietăţi algebrice ale unui $(n, m)-$semiinel înzestrat cu o topologie.

Teoremă 5.2.1. (**Adina Pop** [89]) *Într-un $(n, m)-$semiinel topologic $(S, \tau, (\ )_+(\ )_\circ)$ au loc următoarele afirmaţii:*

a) Dacă A este un sub-$(n, m)-$semiinel al lui S, atunci $Cl\,A$ este sub-$(n, m)-$semiinel al lui S;

b) Dacă I este $i-$ideal (ideal) în S, atunci $Cl\,I$ este $i-$ideal (ideal) în S.

Demonstraţie. a) Dacă A este sub-$(n, m)-$-semiinel al lui S, atunci $(\overset{(n)}{A})_+ = A^{[1]} \subseteq A$ şi $(\overset{(m)}{A})_\circ = A^{<1>} \subseteq A$ de unde, conform Observaţiei 5.1.1, rezultă că $(\mathrm{Cl}\,A)^{[1]} \subseteq \mathrm{Cl}(A^{[1]}) \subseteq \mathrm{Cl}A$ şi $(\mathrm{Cl}\,A)^{<1>} \subseteq \mathrm{Cl}(A^{<1>}) \subseteq \mathrm{Cl}A$ ceea ce demonstrează că $\mathrm{Cl}A$ este sub-(n, m)-semiinel al lui S.

b) Dacă I este $i-$ideal în S, atunci $I^{[1]} = I$ şi $(\overset{(i-1)}{S}\ I\ \overset{(n-1)}{S})_\circ \subseteq I$. Deoarece S este închisă şi operaţiile "$(\ )_+$ şi $(\ )_\circ$" sunt continue, avem $\mathrm{Cl}\,I^{[1]} \subseteq \mathrm{Cl}\,I$ şi

$$(\overset{(i-1)}{S}\ \mathrm{Cl}\,I\ \overset{(m-i)}{S})_\circ = (\mathrm{Cl}\,{}^{(i-1)}S\mathrm{Cl}\,I\ \mathrm{Cl}\ \overset{(m-i)}{S})_\circ \subseteq \mathrm{Cl}(\overset{(i-1)}{S}\ I\ \overset{(m-i)}{S})_\circ \subseteq \mathrm{Cl}\mathbb{I},$$

ceea ce ne arată că $\mathrm{Cl}I$ este $i-$ideal în S. $\square$

Teoremă 5.2.2. (**Adina Pop**[89]) *Dacă $(S, \tau, (\ )_+, (\ )_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff şi H este un sub-(n, m)-semiinel semicommutativ (commutativ) al său, atunci ClH este sub-(n, m)-semiinel semicommutativ (commutativ).*

Demonstraţie. Dacă H este un sub-$(n, m)-$semiinel al lui S, conform Teoremei 5.2.1 $a)$ rezultă că $\mathrm{Cl}H$ este sub-$(n, m)-$semiinel al $(n, m)-$semiinelului S.
Presupunem în continuare că $(x_1^m)_\circ \neq (x_m, x_2^{m-1}, x_1)_\circ$, unde $x_1, x_2, ..., x_m \in \mathrm{Cl}H$. Deoarece $(S, \tau$ este un spaţiu Hausdorff există două mulţimi deschise disjuncte disjoint D_1 şi D_2 astfel încât $(x_1^m)_\circ \in D_1$ şi $(x_m, x_2^{m-1}, x_1)_\circ \in D_2$.
Dacă $\mathcal{V}(x_i)$ reprezintă mulţimea tuturor vecinătăţilor elementului x_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, atunci, conform continuităţii operaţiei $m-$are "$(\ _\circ)$" există $V_i, V_i' \in \mathcal{V}(x_i)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ cu proprietatea că $(V_1^m)_\circ \subseteq D_1$ şi $(V_m', V_2'^{m-1}, V_1')_\circ \subseteq D_2$.
Folosind proprietăţile sistemului de vecinătăţi, avem :

$$U_i = V_i \cap V_i' \in \mathcal{V}(x_i) \ \text{ oricare ar fi } \ i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Deci ,

$$(U_1^m)_\circ \subseteq (V_1^m)_\circ \subseteq D_1$$

şi

$$(U_m, U_2^{m-1}, U_1)_\circ \subseteq (V'_m, V_2'^{m-1}, V'_1)_\circ \subseteq D_2.$$

În consecinţă,

$$(U_1^m)_\circ \cap (U_m, U_2^{m-1}, U_1)_\circ = \emptyset.$$

Deoarece elementul $x_i \in \mathrm{Cl}H$, există $y_i \in H \cap U_i$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ astfel încât $(y_1^m)_\circ \in (U_1^m)_\circ$, $(y_m, y_2^{m-1}, y_1)_\circ \in (U_m, U_2^{m-1}, U_1)_\circ$.Totodată H fiind semicomutativ şi $y_i \in H$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, avem $(y_1^m)_\circ = (y_m, y_2^{m-1}, y_1)_\circ$. Deci $(U_1^m)_\circ \cap (U_m, U_2^{m-1}, U_1)_\circ \neq \emptyset$, ceea ce contrazice faptul că D_1 şi D_2 sunt disjuncte.
Prin urmare, $(x_1^m)_\circ = (x_m, x_2^{m-1}, x_1)_\circ$ şi $\mathrm{Cl}H$ este sub-$(n, m)-$semiinel semicommutativ al lui S. □

Am arătat că proprietatea de a fi sub- $(n, m)-$semiinel semicomutativ (comutativ) al unui $(n, m)-$semiinel topologic se transmite şi închiderii sale.

Această proprietatea nu mai este adevărată în cazul sub-$(n, m)-$inelelor unui $(n, m)-$semiinel topologic oarecare, după cum se vede din contraexemplul următor: Fie $A = [0, \infty]$ $n-$semigrupul cu operaţia $n-$ară $(x_1^n)_\circ = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i$. $(0, \infty)$ este $n-$subgrup al său, dar $Cl(0, \infty) = [0, \infty)$ nu este $n-$grup.

Următoarea teoremă generalizează Teorema 3.1.11 din [99].

Teoremă 5.2.3. *Dacă $(S, \tau, ( )_+, ( )_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic compact şi A un sub-(n, m)-inel al său, atunci ClA este sub-$(n, m)-$inel al lui S.*

Demonstraţie. Faptul că $\mathrm{Cl}\, A$ este sub-$(n, m)-$semiinel rezultă din Teorema 5.2.1 a). În continuare trebuie să arătăm că oricare ar fi $i \in \{1, 2, ..., n\}$ există $x \in \mathrm{Cl}\, A$ astfel încât $(xa_2^n)_+ = a_1$.
Presupunem că există $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathrm{Cl}\, A$ cu proprietatea că $(x\, a_2^n)_+ \neq a_1$. Din faptul că (S, τ) este u spaţiu compact, deci şi spaţiu Hausdorff, există vecinătăţile $V_1 \in \mathcal{V}(a_1)$ şi $U \in \mathcal{V}(x\, a_2^n)_+$ astfel încât $V_1 \cap U = \emptyset$. Dar operaţia $n-$ară este continuă şi în consecinţă există $V_j \in \mathcal{V}(a_j)$; $j \neq 1$ respectiv $V_x \in \mathcal{V}(x)$ cu proprietatea că $(V_x\, V_2^n)_+ \subseteq U$. Prin urmare $(V_x\, V_2^n)_+ \cap V_1 = \emptyset$.
Deoarece orice submulţime închisă a unui spaţiu topologic compact este compactă rezultă că $\mathrm{Cl}\, A$ este compactă. Familia de vecinătăţi deschise $\{V_x, x \in \mathrm{Cl}\, A\}$ constituie o acoperire deschisă a lui $\mathrm{Cl}\, A$, adică $\mathrm{Cl}\, A = \bigcap\limits_{x \in \mathrm{Cl}\, A} V_x$. Din această acoperire putem extrage o subacoperire finită $V_{x_1}, V_{x_2}, ..., V_{x_t}$, $\mathrm{Cl}\, A = \bigcap\limits_{i=1}^{t} V_{x_i}$.
Dacă considerăm $V_{li} \in \mathcal{V}(a_l)$; $l \in \{1, 2, ..., n\}$ vecinătăţile corespunzătoare lui V_{x_i} şi

notăm $U_l = \bigcup_{i=1}^{t} V_{l_i}$, atunci $U_l \in \mathcal{V}(a_l)$ pentru orice $l \in \{1, 2, ..., n\}$. Din faptul că $(V_{x_i} V_{2i}^{ni})_+ \cap V_{1_i} = \emptyset$ rezultă că şi $(V_{x_i} U_2^n)_+ \cap U_1 = \emptyset$.
Dar (S, τ) este spaţiu topologic compact şi prin urmare $(\mathrm{Cl}\, A U_2^n)_+ \cap U_1 = \emptyset$.
Deoarece $a_l \in$Cl A, rezultă că există $a_l' \in U_l \cap A$; $l \in \{1, 2, ..., n\}$. Din faptul că A este sub-$(n, m)-$inel, în particular $(A, (\,)_+)$ este un $n-$grup, există $x\prime \in A \subseteq$Cl A astfel încât $(x\prime a\prime_2^n)_+ = a_1'$. Dar $(x\prime a\prime_2^n)_+ = a_1' \in U_1 \cap (\mathrm{Cl}\, A U_2^n)_+$ ceea ce arată că presupunerea iniţială nu este adevărată şi în conluzie ClA este un sub-(n, m)-inel. □

Corolar 5.2.1. *Orice sub-(n, m)-inel maximal A al unui $(n, m)-$semiinel topologic compact $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este închis.*

Demonstraţie. A fiind sub-(n, m)-inel al lui S, conform Teoremei 5.2.3ClA este sub-(n, m)-inel al lui S.

Deoarece $A \subseteq$Cl A şi A este maximal, rezultă că $A =$ClA. □

Teoremă 5.2.4. *Dacă $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff, atunni mulţimea idempotenţilor săi aditivi, Ida(S) este închisă.*

Demonstraţie. Dacă Ida$(S) = \emptyset$, atunci evident că această mulţime este închisă.
Presupunem că $|\mathrm{Ida}(S)| \geq 1$ şi că Ida(S) $\neq$Cl(Ida(S)). Prin urmare există $a \in$Cl(Ida(S))$\setminus$ Ida(S), adică $a^{[1]} \neq a$. Deoarece (S, τ) este spaţiu topologic Hausdorff, există vecinătăţile $U \in \mathcal{V}(a)$ şi $V \in \mathcal{V}(a^{[1]})$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$. Operaţia $n-$ară fiind continuă, există $V_i \in \mathcal{V}(a)$;$i \in \{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea $(V_1, V_2, ..., V_n)_+ \subseteq V$, deci $(V_1, V_2, ..., V_n)_+ \cap U = \emptyset$. Dacă $W = V_1 \cap V_2 \cap ... V_n \cap U$, atunci $W \in \mathcal{V}(a)$ şi $W^{[1]} \subseteq (V_1, V_2, ..., V_n)_+$. Rezultă că $W^{[1]} \cap U = \emptyset$. Deoarece $W \subseteq U$, rezultă că $W^{[1]} \cap W = \emptyset$. Întrucât $a \in$Cl(Ida(S)), orice vecinătate a lui a, în particular W are cel puţin un element comun cu (Ida(S)), fie acesta b. Din $b^{[1]} = b$, rezultă că $b \in W^{[1]} \cap W$, ceea ce contrazice faptul că $W^{[1]} \cap W = \emptyset$. □

Analog se poate demonstra că:

Teoremă 5.2.5. *Mulţimea idempotenţilor multiplicativi ai unui $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff este închisă.*

ă un 1$-$ideal ($n-$ideal) minimal închis. Dacă A este

5.3 Asupra frontierei unui (n, m)-semiinel

Ne propunem în continuare să investigăm câteva proprietăţi ale radicalului unui ideal şi ale frontierei radicalului unui ideal într-un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff.

Vom da câteva generalizări ale unor rezultate prezentate de Shum [125], Chow [20] relativ la semigrupuri şi Maria S. Pop [100] obţinute în cazul $n-$semigrupurilor.
Fie $(A, \mathcal{T}, (\,)_\circ)$ un semigrup topologic şi $H \subseteq A$. Amintim că prin frontiera lui H, notată $\mathrm{Fr}(H)$, întelegem mulţimea

$$\mathrm{Fr}(H) = \mathrm{Cl}H \cap \mathrm{Cl}(A \setminus H).$$

Studiind proprietăţile idealelor unui semigrup comutativ topologic , Shum [125] a demonstrat că frontiera radicalului unui ideal deschis I al lui A este subsemigrup al lui A dacă şi numai dacă I este ideal primar sau echivalent $A \backslash \mathrm{rad}I$ este un semigrup al lui A. Chow [20] generalizează aceste rezultate pentru frontiera oricărui ideal al unui semigrup comutativ topologic.
Maria S. Pop a extins rezultatele amintite în cazul $n-$ar şi a arătat că ele pot fi generalizate char şi in cazul binar, deoarece au loc într-o clasă de $n-$semigrupuri mai largă şi anume clasa $n-$semigrupurilor normale.

Următoarea teoremă reprezintă o generalizare a Teoremei 1 [100], în cazul $(n, m)-$semiinelelor.

Teoremă 5.3.1. (**Adina Pop** [89]) *Dacă $(S, \tau, (\,)_+, (\,)_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff şi I este un ideal deschis al lui S atunci frontiera sa, $Fr(I)$ este un ideal relativ la $S \backslash I$ dacă şi numai dacă $S \backslash I$ este un sub-$(n, m)-$semiinel al $(n, m)-$semiinelului S.*

Demonstraţie. Submulţimea I a lui S fiind o submulţime deschisă avem $\mathrm{Fr}(I) = \mathrm{Cl}I \cap (S \backslash I)$. Presupunem că mulţimea $S \backslash I$ este un sub-$(n, m)-$semiinel al lui S. Atunci pentru orice $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathrm{Fr}(I)$, $p = max(n, m)$, vom avea $x_1, x_2, ..., x_p \in S \backslash I$. Prin urmare $(x_1^n)_+ \in S \backslash I$ şi $(x_1^m)_\circ \in S \backslash I$.
De asemenea $x_1, x_2, ..., x_p \in \mathrm{Cl}I$. Pe de altă parte, I fiind ideal în S, conform Teoremei 5.2.1, punctul b) şi $\mathrm{Cl}I$ este un ideal în S.
Prin urmare $(x_1^n)_+ \in \mathrm{Cl}I$. Rezultă că $(x_1^n)_+ \in \mathrm{Fr}(I)$.
Pentru orice elemente $y_1, y_2, ..., y_m \in S \backslash I$, oricare ar fi $x \in Fr(I) \subseteq S \backslash I$ şi $i \in \{1, 2, ..., m\}$ obţinem că $(y_1^{i-1}\, x\, y_{i+1}^m)_\circ \in S \backslash I$.
Dar $x \in \mathrm{Fr}(I) \subseteq \mathrm{Cl}I$ implică că $(y_1^{i-1}, x, y_{i+1}^m)_\circ \in \mathrm{Cl}I$.
Aşadar $(y_1^{i-1}\, x, y_{i+1}^m)_\circ \in \mathrm{Cl}I \cap (S \backslash I) = Fr(I)$, ceea ce demonstrează că $Fr(I)$ este un ideal relativ la $S \backslash I$.

Reciproc, dacă frontiera $\mathrm{Fr}(I)$ este un ideal relativ la $S \backslash I$, atunci ea este şi sub-(n, m)-semiinel al lui S. Într-adevăr, $\mathrm{Fr}(I)^{[1]} \subseteq \mathrm{Fr}(I)$ şi pentru orice $x_1, x_2, ..., x_p \in S \backslash I$, $p = max(n, m)$ şi oricare ar fi $y_2, y_3, ..., y_{m-1} \in \mathrm{Fr}(I)$, avem $(x_i\, y_2^m) \in S \backslash I$.

Folosind distributivitatea operaţiei $m-$are ”$(\ )_\circ$” faţă de operaţia $n-$ară ”$(\ )_+$” , obţinem $((x_1^n)_+, y_2^m)_\circ = ((x_1, y_2^m)_\circ, ..., (x_n, y_2^m)_\circ))_+ \in (\mathrm{Fr}(I), ..., \mathrm{Fr}(I))_+ \subseteq \mathrm{Fr}(I) \subseteq S\backslash I$.
Dacă presupunem că $(x_1^n)_+ \in I$, atunci rezultă că $((x_1^n)_+, y_2^m)_\circ \in I$, ceea ce este fals.
În concluzie $(x_1^n)_+ \in S\backslash I$.
În plus, folosind proprietatea de asociativitate a operaţiei $m-$are ”$(\ )_\circ$”, vom avea

$$((y_1, (x_1^m)_\circ, y_3^m)_\circ, y_{m+1}^{2m-1})_\circ = ((y_1, x_1^{m-1})_\circ, (x_m, y_3^{m+1})_\circ, y_{m+2}^{2m-1})_\circ \in (\mathrm{Fr}(I), ..., \mathrm{Fr}(I))_\circ$$

şi

$$(\mathrm{Fr}(I), ..., \mathrm{Fr}(I))_\circ \subseteq \mathrm{Fr}(I) \subseteq S\backslash I,$$

ceea ce ne conduce la $(x_1^m)_\circ \in S\backslash I$.
În concluzie $S\backslash I$ este sub-(n, m)-semiinel al lui S. □

Lema 5.3.1. (**Adina Pop** [89]) *Dacă $(S, \tau, (\ )_+, (\ )_\circ)$ este un $(n, m)-$semiinel topologic Hausdorff şi $H \subseteq S$ este o submulţime deschisă a lui S, atunci rad$H$ este o submulţime deschisă în S.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $x \in \mathrm{rad}I$, atunci există $k \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $x^{<k>} \in H$. Din faptul că S este $(n, m)-$semiinel topologic, operaţia $m-$ară ”$(\ )_\circ$” este continuă şi în plus aplicaţia definită de extinderea operaţiei m-are la t factori, $t > m$, $t \equiv 1(mod\, m - 1)$ este continuă.
Mulţimea H fiind o mulţime deschisă, există o vecinătate V al lui x cu proprietatea că $V^{<k>} \subseteq H$. Rezultă că $V \subseteq \mathrm{rad}H$, ceea ce demonstreaz u a că rad$H$ este o mulţime deschisă. □

Lema 5.3.2. (**Adina Pop** [89]) *Fie I un ideal al unui $(n, m)-$semiinel comutativ $(S, (\ )_+, (\ )_\circ)$. Atunci rad$I$ este un ideal complet prim dacă şi numai dacă I este un ideal semiprimar al lui S.*

Demonstraţie. Fie Iun ideal semiprimar al lui S. Conform Teoremei 2.5.1, rad$I$ este un ideal al lui S.
Mai mult, el este un ideal complet prim deoarece din $(x_1^m)_\circ \in \mathrm{rad}I$, rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $(x_1^m)_\circ^{<k>} \in I$. Dar $(x_1^m)_\circ^{<k>} = (x_1^{<k>}, ..., x_m^{<k>})_\circ \in I$. Din faptul că I este ideal semiprimar în S, există $i \in \{1, 2, ..., m\}$ şi $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x_i^{<k>})^{<s>} = x_i^{<(m-1)ks+k+s>} \in I$ ceea ce demonstrează că $x_i \in \mathrm{rad}I$.
În concluzie rad I este un ideal complet prim.
Reciproc, fie I un ideal al $(n, m)-$semiinelului comutativ $(S, (\ )_+, (\ )_\circ)$ şi presupunem că rad$I$ este un ideal complet prim. Deoarece $I \subseteq \mathrm{rad}I$, atunci pentru orice $x_1, x_2, ..., x_m \in S$ cu proprietatea că $(x_1^m)_\circ \in I$, există $i \in \{1, 2, ..., m\}$ astfel încât $x_i \in \mathrm{rad}I$. Rezultă

că există $k \in \mathbb{N}$ cu $x_i^{<k>} \in I$, ceea ce demonstrează că I este un ideal semiprimar al $(n,m)-$semiinelului S. $\square$

Teoremă 5.3.2 (*Adina Pop[89]*)**.** *Fie I un ideal deschis al unui $(n,m)-$semiinel comutativ topologic Hausdorff $(S, \tau, (\ )_+, (\ )_\circ)$.*
i) Dacă frontiera radicalului Fr$(radI)$ este un ideal relativ la $S \backslash radI$, atunci I este ideal semiprimar;
ii) Dacă I este un ideal semiprimar tare în S, atunci Fr$(radI)$ este un ideal relativ la $S \backslash radI$.

Demonstraţie. i) Dacă I este un ideal deschis al $(n,m)-$semiinelului comutativ topologic Hausdorff $(S, \tau, (\ )_+, (\ )_\circ)$, atunci conform Teoremei 2.5.1 şi Lemei 5.3.1, rad$I$ este un ideal deschisîn S. Deosrece Fr(rad$I$) este ideal relativ la $S \backslash I$, din Teorema 5.3.1, rezultăcă $S \backslash I$ este un sub-(n,m)-semiinel . Prin urmare rad I este un ideal complet prim în S. Conform Lemei 5.3.2, obţinem că I este ideal semiprimarîn S.

ii) Dacă I este un ideal semiprimar al $(n,m)-$semiinelului comutativ topologic Hausdorff $(S, \tau, (\ )_+, (\ )_\circ)$, conform Lemei 5.3.2, rad$I$ este ideal complet prim. Rezultă că $(S \backslash \text{rad}\, I, (\ )_\circ)$ este un sub-m-semigrup al lui S.

În continuare vrem să arătăm că $(S \backslash \text{rad}\, I, (\ )_+)$ este un sub-n-semigrup al lui S. Presupunem că $a_1, a_2, \cdots a_n \in S \backslash \text{rad}\, I$ cu proprietatea că $(a_1^n)_+ \in \text{rad}\, I$. Atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a_1^n)_+^{<k>} \in I$ şi $a_i^{<k>} \notin I$ oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. Aplicând Lema 2.5.1, în partea dreaptă a relaţiei (2.18) există termeni de forma $a_i^{<k>}$. Din faptul că este un ideal tare I în $(n,m)-$semiinelul $(S, (\ )_+, (\ )_\circ)$, obţinem că $a_i^{<k>} \in I$ ceea ce este fals. Deci $(S \backslash \text{rad}\, I, (\ )_+)$ este sub-n-semigrup în S.
În concluzie $(S \backslash \text{rad}\, I, (\ )_+, (\ )_\circ)$ este un sub-(n,m)- semiinel al lui S. Conform Teoremei 5.3.1, rezultă că Fr(rad$I$) este un ideal relativ la $S \backslash$rad$I$. $\square$

Capitolul 6

Asupra stabilităţii omomorfismelor de $m-$semigrupuri

O întrebare clasică în teoria ecuaţiilor funcţionale este următoarea:
"În ce condiţii o funcţie care satisface aproximativ o ecuaţie funcţională $\mathcal{E}$ trebuie să fie aproape de o soluţie exactă al lui $\mathcal{E}$? "
Dacă această problemă are soluţie spunem că ecuaţia $\mathcal{E}$ este stabilă.

Prima problemă de acest tip relativ la stabilitatea omomorfismelor de grupuri a fost faimoasa problemă propusă în 1940 de către S. M. Ulam [130] şi anume :
Fiind date un grup $(G,\cdot)$, un grup metric $(G',\cdot,d)$ cu metrica d şi un număr pozitiv $\epsilon > 0$, să se determine $\delta > 0$, asfel încât în cazul în care o funcţie $f : G \to G'$ satisface inegalitatea $d(f(x\cdot y), f(x)\cdot f(y)) < \delta$ pentru orice $x, y \in G$ să existe un omomorfism $T : G \to G'$ pentru care $d(f(x),\ T(x)) < \varepsilon$ oricare ar fi $x \in G$. Dacă această problemă are soluţie spunem că omomorfismele de la G la G' sunt stabile. Un an mai târziu, D. H. Hyers [61] dă o soluţie pentru această problemă în cazul spaţiilor Banach, demonstrând că orice soluţie a inegalităţii $||f(x+y)-f(x)-f(y)|| \leq \delta$ poate fi aproximată de o soluţie exactă .

Teoremă 6.0.3. [61] *Fie E şi F două spaţii Banach şi $f : E \to F$ o funcţie astfel încât pentru un $\delta > 0$ are loc:*

$$||f(x+y)-f(x)-f(y)|| \leq \delta,\ \ \forall x,y \in E.$$

Atunci:
i) pentru orice $x \in E$, există o func tie aditivă $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$, ϕ este aditivă astfel încât

$$||f(x)-\phi(x)|| \leq \delta\ \ \forall x \in E.$$

Mai mult, ϕ este unica funcţie aditivă care satisface inegalitatea de mai sus.
ii) Dacă, în plus, pentru orice $x \in E$, funcţia $t \mapsto f(tx)$ este continuă, atunci funcţia ϕ este liniară.

În această teoremă, D.H. Hyers a construit în mod explicit funcţia aditivă ϕ plecând de la funţia dată f. Această metodă se numeşte "metoda directă" şi este deseori folosită pentru a construi o soluţie a unei ecuaţii funcţionale date.

În 1950 T. Aoki [7] a generalizat această teoremă pentru aplicaţii aditive iar rezultatul său a fost îmbunătăţit (independent) de Th. M. Rassias [113] (1978). El a adăugat o condiţie suplimentară legată de continuitatea aplicaţiei $f(tx)$ în t, pentru fiecare x fixat, fapt care conduce la liniaritatea funcţiei ϕ nu doar aditivitatea ei. După 1982, J. M. Rassias [115], [116], Th. M. Rassias [114] şi L. Szekelyhidi [128] au studiat problema stabilităţii in cazul diferitelor aplicaţii şi poartă numele de stabilitate Hyers-Ulam (pe scurt H-U).

De-a lungul anilor numeroşi matematicieni cum ar fi P. Găvruţa [48] care introduce o funcţie de control, Z. Gajda [47] au obţinut diverse generalizări ale stabilităţii H-U în cazul diferitelor ecuaţii funcţionale.

Mai mult, în ultimii zece ani s-a studiat stabilitatea omomorfismelor definite pe alte structuri algebrice cum ar fi semigrupurile, respectiv semigrupurile ternare. Astfel, în 2006 Amyari şi M. S. Moslehian [8] au studiat stabilitatea H-U în cazul omomorfismelor definite pe semigrupuri ternare comutative cu valori în spaţii Banach şi superstabilitatea (mai tare decât conceptul de stabilitate) omomorfismelor definite pe semigrupuri ternare comutative cu valori în algebre Banach înzestrate cu norme multiplicative.

În 2012 M. Dehghanian şi M. S. Modarres [31] au studiat stabilitatea generalizată de tip Hyers-Ulam pentru $\gamma-$homomorfisme de semigrupuri ternare . Stabilitatea omomorfismelor de algebre ternare au fost investigate de I. S. An and C. Park [6] , M. S. Moslehian and L. Szekelyhidi [83].

Menţionăm, de asemenea, că există lucrări legate de stabilitatea omomorfismelor de grupuri "pur algebrice" cum ar fi cele ale lui V. Pop [109].

6.1 O generalizare a stabilităţii Ulam-Rassias relativ la omomorfisme de $m-$semigrupuri

În cele ce urmază, folosind un şir de tip Hyers vom generaliza stabilitatea de tip Hyers-Ulam în cazul omomorfismelor definite pe $m-$semigrupuri; $m \geq 2$ cu val-

ori în spaţii Banach. Ca un caz particular, pentru $m = 2$ regăsim anumite rezultate date de D. H. Hyers [61], T. Aoki [7], Th. M. Rassias [113],[114], P. Gavruţă [48] şi J. M. Rassias[116]. Pentru $m = 3$ redescoperim anumite rezultate date de M. Amyari şi M. S. Moslehian [8] cu menţiunea că aceste rezultate sunt valabile şi în clasa $m-$semigrupurilor normale care, după cum ştim este o clasă mai largă decât clasa $m-$semigrupurilor comutative.
În plus, vom introduce superstabilitatea omomorfismelor $m-$are în algebre Banach înzestrate cu norme multiplicative, generalizând astfel rezultatele lui Szekelyhidi [128], respectiv Amyari şi Moslehian [8].

Pentru început, vom generaliza câteva definiţii din cazul binar.

Definiţie 6.1.1. Se numeşte *$n-$semigrup normat* un $m-$semigrup $(A, (\,)_\circ)$ pe care este definită o normă $\| \, \| : S \to [0, \infty)$, cu proprietatea $\|(x_1^m)_\circ\| \leq \|x_1\| + \ldots + \|x_m\|$, oricare ar fi $x_1, ..., x_m \in A$.

Vom nota un astfel de $m-$semigrup prin $(A, (\,)_\circ, \| \, \|)$.

Definiţie 6.1.2. Fie $(X, *, \| \, \|)$ un spaţiu Banach peste corpul numerelor reale sau complexe. Dacă pe mulţimea X definim operaţia m-ară $(\,)_\circ : X^m \to X$; $(x_1^m)_\circ = x_1 * x_2 \cdots * x_m$, atunci $(X, (\,)_\circ)$ este $m-$grup comutativ cu element neutru. Vom spune că $(X, (\,)_\circ, \| \, \|)$ este un *$m-$spaţiu Banach derivat din* $(X, *, \| \, \|)$.

Extinzând în cazul $m > 3$ noţiunea de algebră ternară Banach dată de Dehghanian [31] obţinem următoarea definiţie :

Definiţie 6.1.3. Se numeşte *$m-$algebră Banach* un spaţiu Banach normat $(X, \| \, \|)$ înzestrat cu o operaţie m-ară $(\,)_\circ : X^m \to X$ care este asociativă şi care satisface condiţia $\|(x_1^m)_\circ\| \leq \|x_1\| \ldots \|x_m\|$ pentru orice $x_1, ..., x_m \in S$.
Dacă $\|(x_1^m)_\circ\| = \|x_1\| \ldots \|x_m\|$ atunci spunem că norma este multiplicativă.

Definiţia puterilor în $m-$semigrupuri dată de Post [110] conduce la următoarele rela ctii referitoare la produse lungi de $(m-1)k+1$ factori:

$$(x^{[1]})^{[1]} = x^{[m+1]} = (\overset{(m^2)}{x})_\circ; \ \left(x^{[m+1]}\right)^{[1]} = (\overset{(m^3)}{x})_\circ = x^{[m^2+m+1]} \tag{6.1}$$

$$(\overset{(m^k)}{\ \ x})_\circ = x^{[m^{k-1}+m^{k-2}+\ldots+m+1]}, \ \forall \ k \in \mathbb{N}^*. \tag{6.2}$$

În lucrarea [48] apărută în Journal of Mathematical Analysis and Applications, P. Găvruţă a obţinut o generalizare a teoremei lui Th. M. Rassias înlocuind diferenţele

Cauchy printr-o funcţie de control φ care satisface a condiţie de convergenţă. În cele ce urmează generalizăm , Teorema 2.1 dată de M. Amyari şi M. S. Moslehian în [8] în cazul semigrupurilor ternare. În demonstraţie vom folosi " metoda directă " a lui Hyers.

Teoremă 6.1.1. (**Adina Pop**, Maria S.Pop [94]) *Fie* $(A, (\,)_\circ)$ *un* $m-$*semigrup,* X *un spaţiu Banach şi* $\varphi : A^m \to [0, \infty)$ *o funcţie astfel încât seria* $\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} m^{-n}\varphi((\overset{(m^n)}{x_1})_\circ, \ldots, (\overset{(m^n)}{x_m})_\circ)$ *este convergentă cu suma*

$$\tilde{\varphi}(x_1, \ldots, x_m) := \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{\infty} m^{-n}\varphi((\overset{(m^n)}{x_1})_\circ, \ldots, (\overset{(m^n)}{x_m})_\circ) < \infty \tag{6.3}$$

Dacă aplicaţia $f : A \to X$ *satisface condiţia*

$$\left\| f((x_1, \ldots, x_m)_\circ) - \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \right\| \leq \varphi(x_1, \ldots, x_m) \tag{6.4}$$

atunci există o unică aplicaţie $T : S \to X$ *astfel încât*

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \tilde{\varphi}(x, x, \ldots, x) \tag{6.5}$$

şi

$$T(x^{[1]}) = mT(x)\,, \textit{for all } x \in A. \tag{6.6}$$

În plus, dacă A *este un* $m-$*semigrup normal, atunci* T *este un omomorfism al lui* A *în* $(X, \sum)$*,* $m-$*semigrupul derivat din* $(X, +)$*.*

Demonstraţie. Dacă în relaţia (2.2) luăm $x_1 = \ldots = x_m = x$, atunci vom avea

$$\left\| f(x^{[1]}) - mf(x) \right\| \leq \varphi(x, \ldots, x)$$

sau

$$\left\| \frac{1}{m} f(x^{[1]}) - f(x) \right\| \leq \frac{1}{m}\varphi(x, \ldots, x).$$

Deoarece

$$(\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ = x^{[m^k + m^{k-1} + \ldots + m + 1]} = (x^{[m^{k-1} + m^{k-2} + \ldots + 1]})^{[1]} = ((\overset{(m^k)}{x})_\circ)^{[1]}$$

înlocuind pe x în inegalitatea de mai sus cu $(\overset{(m^k)}{x})_\circ)$, observăm că

$$\left\| f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ) - mf(\overset{(m^k)}{x})_\circ \right\| \leq \varphi((\overset{(m^k)}{x})_\circ, \ldots, (\overset{(m^k)}{x})_\circ).$$

Prin inducţie maatematică după $n \in \mathbb{N}$, se demonstrează că pentru orice $x \in A$ obţinem

$$\begin{aligned}
\left\|m^{-n}f((\overset{(m^n)}{x})_\circ)-f(x)\right\| &= \left\|\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}\left(m^{-(k+1)}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-m^{-k}f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\left(\frac{1}{m}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&\le \sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\left\|\frac{1}{m}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right\| \\
&\le \frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\varphi(x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]},\dots,x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]})
\end{aligned}$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\left\|m^{-(n+1)}f((\overset{(m^{n+1})}{x})_\circ)-f(x)\right\| &= \left\|\sum\nolimits_{k=0}^{n}\left(m^{-(k+1)}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-m^{-k}f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&\le \left\|\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\left(\frac{1}{m}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\|+ \\
&+ \left\|m^{-n}\left(\frac{1}{m}f((\overset{(m^{n+1})}{x})_\circ)-f((\overset{(m^n)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&\le \frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\varphi((\overset{(m^k)}{x})_\circ,\dots,(\overset{(m^k)}{x})_\circ)+ \\
&+ m^{-n}\frac{1}{m}\varphi((\overset{(m^n)}{x})_\circ,\dots,(\overset{(m^n)}{x})_\circ) \\
&= \frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=0}^{n}m^{-k}\varphi((\overset{(m^k)}{x})_\circ,\dots,(\overset{(m^k)}{x})_\circ)
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$\left\|m^{-n}f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1}m^i]})-f(x)\right\|\le\frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\varphi(x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]},\dots,x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]}). \tag{6.7}$$

pentru orice $x\in A$ şi oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ ceea ce este echivalent cu

$$\left\|m^{-n}f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1}m^i]})-f(x)\right\|\le\frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\varphi((\overset{(m^k)}{x})_\circ,...,(\overset{(m^k)}{x})_\circ)$$

În continuare vom arăta că şirul $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$a_n(x)=m^{-n}f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1}m^i]})$$

este un şir Cauchy pe care îl numim şirul Hyers-Ulam generalizat .

Într-adevăr, pentru orice $x\in A$, $n,r\in\mathbb{N}$; $r<n$ avem

$$\begin{aligned}
\left\|m^{-n}f((\overset{(m^n)}{x})_\circ)-m^{-r}f(\overset{m^r}{x})\right\| &= \left\|m^{-n}f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1}m^i]})-m^{-r}f(x^{[\sum_{i=0}^{r-1}m^i]})\right\| \\
&= \left\|\sum\nolimits_{k=r}^{n-1}\left(m^{-(k+1)}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-m^{-k}f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&= \left\|\sum\nolimits_{k=0}^{n-1}m^{-k}\left(\frac{1}{m}f((\overset{(m^{k+1})}{x})_\circ)-f((\overset{(m^k)}{x})_\circ)\right)\right\| \\
&\le \frac{1}{m}\sum\nolimits_{k=r}^{n-1}m^{-k}\varphi(x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]},\dots,x^{[\sum_{i=0}^{k-1}m^i]})
\end{aligned}$$

Dacă în inegalitatea de mai sus $r \to \infty$ obţinem

$$\lim_{r\to\infty} \left\| m^{-n} f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) - m^{-r} f(x^{[\sum_{i=0}^{r-1} m^i]}) \right\| = 0.$$

Dar X fiind spaţiu Banach rezultă că şirul $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Fie $T : A \to X$ limita lui, adică

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} m^{-n} f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}). \tag{6.8}$$

Deoarece pentru orice $x \in A$ avem $(x^{[1]})^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]} = x^{[\sum_{i=0}^{n} m^i]}$, din relaţia (6.8) obţinem

$$\begin{aligned} T(x^{[1]}) &= \lim_{n\to\infty} m^{-n} f((x^{[1]})^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) = \\ &= m \lim_{n\to\infty} m^{-(n+1)} f(x^{[\sum_{i=0}^{n} m^i]}) = mT(x). \end{aligned}$$

Dacă în inequalitatea (6.7), $n \to \infty$ în inequalitatea (2.5) ţinând seama de (6.3) şi (6.8) rezultă că

$$\|T(x) - f(x)\| \le \tilde{\varphi}(x, \ldots, x)$$

pentru orice $x \in A$.

Folosind metoda reducerii la absurd vom arăta că aplicaţia T este unică. Fie $T' : S \to X$ altă funcţie care are aceleaşi proprietăţi ca şi funcţia T. Conform relaţiei (6.6) obţinem

$$\begin{aligned} \|T(x) - T'(x)\| &= m^{-n} \|m^n T(x) - m^n T'(x)\| \\ &= m^{-n} \left\| T(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) - T'(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) \right\| \\ &\le m^{-n} \left\| T(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) - f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) \right\| + \\ &\quad + m^{-n} \left\| f(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) - T'(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) \right\|. \end{aligned}$$

Folosind inegalitatea (6.5) şi regulile de calcul cu puteri avem

$$\begin{aligned} \|T(x) - T'(x)\| &\le 2m^{-n} \tilde{\varphi}(x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}, \ldots, x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) \\ &= 2m^{-n} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} m^{-k} \varphi((x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]})^{[\sum_{j=0}^{k-1} m^j]}, \ldots, (x^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]})^{[\sum_{j=0}^{k-1} m^j]}) \\ &= 2\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} m^{-(k+n)} \varphi((x^{[\sum_{i=0}^{k+n-1} m^i]}), \ldots, (x^{[\sum_{i=0}^{k+n-1} m^i]}) \\ &= 2\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} m^{-(k+n)} \varphi((\overset{(m^{k+n})}{x})_\circ, \ldots, (\overset{(m^{k+n})}{x})_\circ) \\ &= 2\frac{1}{m} \sum_{p=n}^{\infty} m^{-p} \varphi((\overset{(m^{p})}{x})_\circ, \ldots, (\overset{(m^{p})}{x})_\circ) \end{aligned}$$

Dacă în această inegalitate $n \to \infty$ vom obţine $T(x) = T'(x)$ oricare ar fi $x \in A$.

În cele ce urmează, presupunem că $(A, (\,)_\circ)$ este $m-$semigrup normal, adică

$$(x_1, \ldots, x_m)_\circ^{[k]} = \left(x_1^{[k]}, \ldots, x_m^{[k]}\right)_\circ \tag{6.9}$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_m \in A$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Înlocuind x_j prin $x_j^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ în inegalitatea (6.4) vom avea

$$\begin{gathered}\left\| f\left([x_1^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}, \ldots, x_m^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}]_\circ\right) - \textstyle\sum_{j=1}^m f\left(x_j^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}\right) \right\| \\ \leq \varphi(x_1^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}, \ldots, x_m^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}).\end{gathered}$$

Folosind egalitatea (6.9), şi împărţind inegalitatea de mai sus prin m^n vom obţine

$$\begin{gathered}\left\| m^{-n} f\left((x_1, \ldots, x_m)_\circ^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}\right) - \textstyle\sum_{j=1}^m m^{-n} f(x_j^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}) \right\| \\ \leq m^{-n} \varphi(x_1^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}, \ldots, x_m^{[\sum_{i=0}^{n-1} m^i]}).\end{gathered}$$

Dacă în ultima inegalitate, trecem la limită pentru $n \to \infty$, ţinând seama de (6.3) şi (6.8), vom avea

$$\left\| T((x_1, \ldots, x_m)_\circ) - \sum_{j=1}^m T(x_j) \right\| = 0,$$

adică

$$T((x_1, \ldots, x_m)_\circ) = \sum_{j=1}^m T(x_j)$$

ceea ce ne arată că T este un omomorfism de $m-$ semigrupuri. □

Prin urmare, am arătat că în condiţii adecvate pentru funcţia φ, aproape de o soluţie a inegalităţii (6.4) există o soluţie exactă a ecuaţiei funcţionale $f((x_1^m)_\circ) = \sum_{j=1}^m f(x_j)$. Cuvântul "aproape" înseamnă că distanţa dintre soluţia ecuaţiei şi soluţia inegalităţii este evaluată în mod explicit prin funcţia $\varphi : S^m \to [0, \infty)$.
În particular, din Teorema 6.1.1, pentru $m = 3$ obţinem Teorema 2.1 lui M. Amyari şi M. S. Moslehian [8].

În continuare, pentru diferite forme ale funcţiei $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ vom obţine şi alte generalizări ale unor rezultate publicate în ultimii ani relativ la stabilitatea unor ecuaţii functionale definite pe semigrupuri obişnuite sau ternare.
Astfel, ca şi o consecinţă, dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ =constant, Teorema 6.1.1 dă o generalizare a rezultatului binecunoscut al lui Hyers [61].

Corolar 6.1.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Dacă $(A, (\,)_\circ)$ este un $m-$semigroup, $m \geq 2$, X un spaţiu Banach şi $\varepsilon > 0$ iar $f : A \to X$ este o aplicaţie care satisface inegalitatea*

$$\left\| f((x_1, \ldots, x_m)_\circ) - \sum\nolimits_{j=1}^{m} f(x_j) \right\| < \varepsilon$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_m \in A$*, atunci există o unică aplicaţie* $T : S \to X$ *asfel încât*

$$\|f(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{m-1}$$

şi

$$T(x^{[1]}) = mT(x)\,, \forall\, x \in S.$$

În plus, dacă A *este un* $m-$*semigrup normal, atunci* T *este omomorfism de* $m-$*semigrupuri.*

Demonstraţie. Deoarece $m \geq 2$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{m^{n+1}}$ este convergentă cu suma $\frac{\varepsilon}{m-1}$. Conform Teoremei 6.1 există o unică aplicaţie $T : S \to X$ asfel încât

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} m^{-n} f(x^{[m^{n-1} + \ldots + m + 1]})$$

,

$$T(x^{[1]}) = mT(x);\ \forall\, x \in S$$

şi

$$\|f(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{m-1}.$$

□

În continuare, presupunem că $f : A \to X$ este o aplicaţie care satisface o condiţie mai slabă decât conditia lui Hyers pentru aplicaţii aproximativ aditive, controlată de un produs de puteri de norme.

Corolar 6.1.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Fie* $(A, (\,)_\circ, \|\ \|_1)$ *un* $m-$*semigrup normat,* $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$*,* $(X, \|\ \|_2)$ *un spaţiu Banach. Presupunem că* $f : A \to X$ *este o aplicaţie pentru care există o constantă* $\varepsilon > 0$ *,* $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{R}$ *asfel încât* $0 \leq p = k_1 + \ldots + k_m < 1$ *şi* f *satisface condiţia*

$$\left\| f((x_1, \ldots, x_m)_\circ) - \sum\nolimits_{j=1}^{m} f(x_j) \right\|_2 \ < \ \varepsilon \|x_1\|_1^{k_1} \|x_2\|_1^{k_2} \ldots \|x_m\|_1^{k_m},$$

oricare ar fi $x_1, \ldots, x_m \in A$ *.*

Atunci există o unică aplicaţie $T : A \to X$ *astfel încât*

$$\|f(x) - T(x)\|_2 < \frac{\varepsilon \|x\|_1^p}{m - m^p}$$

şi

$$T(x^{[1]}) = mT(x),\ \forall x \in S.$$

În plus, dacă A *este un* $m-$*semigrup normal, atunci* T *este un* $m-$*omomorfism* $m-$*ar.*

Demonstraţie. Deoarece $(A, (\,)_\circ, \|\;\|_1)$ este un $m-$semigrup normat atunci pentru orice $x \in A$,

$$\left\|x^{[1]}\right\|_1 = \left\|(\overset{(m)}{x})_\circ\right\|_1 \leq m||x||_1.$$

Prin inducţie demonstrăm că $\left\|x^{[k]}\right\|_1 \leq ((m-1)k+1)\left\|x\right\|_1$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Într-adevăr,în ipoteza de mai sus, avem

$$\begin{aligned}\left\|x^{[k+1]}\right\|_1 &= \left\|(x^{[k]}, \overset{(m-1)}{x})_\circ\right\| \\ &\leq ((m-1)k+1)\left\|x\right\|_1 + (m-1)\left\|x\right\|_1 \\ &= ((m-1)(k+1)+1)\left\|x\right\|_1\end{aligned}$$

Aplicând această inegalitate pentru $k = m^{n-1+\ldots+m+1}$ avem

$$\left\|x^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]}\right\|_1 \leq m^n \left\|x\right\|_1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in A$.

Dacă $\varphi : A^m \to [0,\infty)$ este o funcţie definită prin $\varphi(x_1,\ldots,x_m) = \varepsilon\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m}$ unde $0 \leq p = k_1+\ldots+k_m < 1$.

Observăm că

$$\begin{aligned}\varphi((\overset{(m^n)}{x})_\circ,\ldots,(\overset{(m^n)}{x})_\circ) &= \varepsilon\left\|(\overset{(m^n)}{x_1})_\circ\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|(\overset{(m^n)}{x_m})_\circ\right\|_1^{k_m} \\ &\leq \varepsilon(m^n\left\|x_1\right\|_1)^{k_1}\ldots(m^n\left\|x_m\right\|_1)^{k_m} \\ &= \varepsilon(m^n)^{k_1+\ldots+k_m}\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m} \\ &= \varepsilon m^{np}\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m},\end{aligned}$$

adică $\varphi((\overset{(m^n)}{x})_\circ,\ldots,(\overset{(m^n)}{x})_\circ) \leq \varepsilon m^{np}\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m}$

Deoarece seria $\frac{1}{m}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon(m^{p-1})^n\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m}$ este convergentă având suma $\frac{\varepsilon}{m-m^p}\left\|x_1\right\|_1^{k_1}\ldots\left\|x_m\right\|_1^{k_m}$, atunci seria $\frac{1}{m}\sum m^{-n}\varphi((\overset{(m^n)}{x_1})_\circ\ldots(\overset{(m^n)}{x_m})_\circ)$ este convergentă şi în plus

$$\widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_m) \leq \frac{\varepsilon}{m-m^p}||x_1||_1^{k_1}\ldots||x_m||_1^{k_m}$$

iar

$$\widetilde{\varphi}(x,\ldots,x) \leq \frac{\varepsilon||x||_1^p}{m-m^p}.$$

Conform Teoremei 6.1.1 există o unică aplicaţie $T : A \to X$ astfel încât

$$\|f(x) - T(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon \|x\|_1^p}{m - m^p}$$

iar

$$T(x^{[1]}) = mT(x), \text{ for all } x \in A.$$

Dacă A este $m-$semigrup normal şi normat , atunci T este un omomorfism $m-$ar.

□

Observăm că în cazul în care $m = 2$, în Corolarul 6.1.2 devine Teorema 1 a lui J. M. Rassias [116].

Următorul corolar generalizează rezultatele lui T. Aoki [7] şi Th. M. Rassias [113]

Corolar 6.1.3. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Fie* $(A, ( )_\circ, \| \|_1)$ *un* $m-$*semigrup normat* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $(X, \| \|_2)$ *un* $m-$*spaţiu Banach şi* $\varepsilon > 0$. *Dacă* $f : A \to X$ *este o aplicaţie care satisface inegalitatea*

$$\left\| f(x_1, x_2, \ldots, x_m)_\circ - \sum\nolimits_{j=1}^{m} f(x_j) \right\|_2 < \varepsilon(||x_1||_1^p + \ldots + ||x_m||_1^p)$$

unde $x_1, \ldots, x_m \in A$ *şi* $0 \leq p < 1$, *atunci există o unică aplicaţie*

$T : A \to X$ *astfel încât*

$$\|f(x) - T(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon m||x||_1^p}{m - m^p}$$

şi

$$T(x^{[1]}) = mT(x), \; \forall \; x \in A.$$

În plus, dacă A *este un* $m-$*semigrup normal, atunci* T *este un* $m-$*omomorfism.*

Demonstraţie. Fie aplicaţia $\varphi : A^m \to X$, $\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \varepsilon(||x_1||_1^p + \ldots + ||x_m||_1^p)$. Aplicând Teorema 6.1.1, deoarece pentru $0 \leq p < 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} m^{n(p-1)}$ converge către $\dfrac{m}{m - m^p}$ se obţine rezultatul cerut. □

6.2 Superstabilitatea omomorfismelor de $m-$semigrupuri

Presupunem că se dă o ecuaţie funcţională $E(f) = 0$, astfel încât noţiunea de mărginire pentru f şi $E(f)$ are sens şi în plus, presupunem că $E(f)$ este mărginită de fiecare dată când f este mărginită. Vom spune cĕcuţia funcţională $E(f) = 0$ este stabilă dacă orice funcţie g care satisface aproximativ această ecuaţie este aproape de o soluţie exactă a ecuaţiei. Vom spune că această ecuaţie funcţională este superstabilă dacă mărginirea lui $E(f)$ implică că f este mărginită sau $E(f) = 0$. Prin urmare noţiunea de superstabilitate este mai "tare " decât noţiunea de stabilitate.

Mai exact, fie $(A, (\,)_\circ)$ un $m-$semigrup, X un spaţiu Banach şi $f : A \to X$ o aplicaţie. Investigaţiile făcute cu privire la stabilitatea ecuaţiilor funcţionale

$$f((x_1^m)_\circ) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)$$

în cazurile $m = 2$ (L. Szekelyhidi [128]), respectiv $m = 3$ (M. Amyari şi M.S. Moslehian [8]) au arătat că orice soluţie "aproximativă" a acestei ecuaţii poate fi aproximată de o soluţie exactă , adică de un omomorfism $m-$ar dacă privim $(X, \sum)$ ca şi un $m-$semigrup derivat al lui $(X, +)$. Ecuaţia $f((x_1^m)_\circ) = \prod\limits_{j=1}^{m} f(x_j)$ are o proprietate de stabilitate surprinzătoare şi anume , orice soluţie aproximativă nemărginită trebuie să fie omomorfism $m-$ar. Un astfel de fenomen este numit superstabilitate.

În această secţiune vom studia superstabilitatea omomorfismelor de $m-$semigrupuri, generalizând câteva rezultate întâlnite în caz ternar la M. Amyari şi M.S. Moslehian [8] şi la L. Szekelyhidi [128] în caz binar.

Teoremă 6.2.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $m-$semigrup, B o algebră normată a cărui normă este multiplicativă şi $\varepsilon \geq 0$. Dacă aplicaţia $f : A \to B$ satisface inegalitatea*

$$\left\| f((x_1, \ldots, x_m)_\circ) - \prod\nolimits_{j=1}^{m} f(x_j) \right\| \leq \varepsilon \tag{6.10}$$

pentru orice $x_1, \ldots, x_m \in A$, atunci există $\delta_\varepsilon > 1$ asfel încât sau

$$\|f(x)\| \leq \delta_\varepsilon, \textit{ for all } x \in A, \tag{6.11}$$

sau

$$f((x_1, \ldots, x_m)_\circ) = \prod\nolimits_{j=1}^{m} f(x_j), \forall x_1, \ldots, x_m \in A. \tag{6.12}$$

Demonstraţie. Ţinând seama de inegalitatea (6.10), luând $x_1 = x_2 = ... = x_m$ obţinem $\left\|f(x^{[1]}) - (f(x))^m\right\| \leq \varepsilon$. Utiliând teorema lui Rolle, observăm că ecuaţia $\delta^m - \delta = \varepsilon$ are o unică soluţie $\delta_\varepsilon > 1$. Presupunem că există $a \in A$ cu proprietatea că $\|f(a)\| > \delta_\varepsilon$ adică $\|f(a)\| = \delta_\varepsilon + p$ unde $p > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
\left\|f(a^{[1]})\right\| &= \left\|(f(a))^m - ((f(a))^m - f(a^{[1]}))\right\| \\
&\geq \|f(a)\|^m - \left\|(f(a))^m - f(a^{[1]})\right\| \\
&\geq (\delta_\varepsilon + p)^m - \varepsilon \\
&= \delta_\varepsilon^m + m\delta_\varepsilon^{m-1}p + \ldots + p^m - (\delta_\varepsilon^m - \delta_\varepsilon) \\
&> \delta_\varepsilon + mp.
\end{aligned}$$

Prin inducţie după n demonstrăm că

$$\left\|f(a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]})\right\| > \delta_\varepsilon + m^n p.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
\|f(a^{[m^n+\ldots+m+1]})\| &= \left\|f((a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]})^{[1]})\right\| \\
&\geq \left\|f(a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]})\right\|^m - \\
&- \left\|(f(a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]}))^m - f((a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]})^{[1]})\right\| \\
&\geq (\delta_\varepsilon + m^n p)^m - \varepsilon > \delta_\varepsilon + m^{n+1}p.
\end{aligned}$$

În concluzie

$$\left\|f(a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]})\right\| > \delta_\varepsilon + m^n p \tag{6.13}$$

are loc pentru orice numere întregi pozitive n.

Tinând seama de inegalitatea (6.10) şi de faptul că $x_1, x_2, \ldots, x_{2m-1} \in A$ avem

$$\left\|f((x_1^m)_\circ\, x_{m+1}^{2m-1})_\circ) - f((x_1^m)_\circ) f(\, x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1})\right\| \leq \varepsilon$$

şi

$$\left\|f((x_1^{m-1}(\, x_m^{2m-1})_\circ)_\circ) - f(x_1) \ldots f(\, x_{m-1}) f((x_m^{2m-1})_\circ)_\circ\right\| \leq \varepsilon.$$

Folosind proprietatea de asociativitate a operaţiei $m-$are $(\,)_\circ$ avem

$$\left\|f((x_1^m)_\circ\, f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1}) - f(x_1) \ldots f(x_{m-1})_\circ f((x_m^{2m-1})_\circ)\right\| \leq 2\varepsilon.$$

Datorită faptului că, din ipoteză, norma $\|\ \|$ este multiplicativă, rezultă

$$\begin{gathered}
\left\|f((x_1^m)_\circ)\ f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1}) - \prod\nolimits_{j=1}^{2m-1} f(x_j)\right\| \\
\leq \left\|f((x_1^m)_\circ)\ f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1}) - f(x_1) \ldots f(x_{m-1}) f((x_m^{2m-1})_\circ)\right\| + \\
+ \left\|f(x_1) \ldots f(x_{m-1})(f((x_m^{2m-1})_\circ) - f(x_m) \ldots f(x_{2m-1}))\right\| \\
\leq 2\varepsilon + \|f(x_1)\| \ldots \|f(x_{m-1})\|\, \varepsilon.
\end{gathered}$$

În particular, pentru $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{2m-1} = a^{[m^{n-1}+\ldots+m+1]}$ obţinem

$$\left\|f((x_1^m)_\circ) - \prod\nolimits_{j=1}^m f(x_j)\right\| \cdot \left\|f(a^{[m^{n-1}+\ldots m+1]})\right\|^{m-1}$$

$$\leq 2\varepsilon + \|f(x_1)\| \ldots \|f(x_{m-1})\|\, \varepsilon.$$

Din inegalitatea (6.13) obţinem

$$\|f((x_1^m)_\circ) - f(x_1)\dots f(x_m)\| \leq \frac{2\varepsilon + \|f(x_1)\|\dots\|f(x_{m-1})\|\,\varepsilon}{(\delta_\varepsilon + m^n p)^{m-1}}.$$

Dacă $n \to \infty$, atunci

$$f(x_1^m)_\circ = f(x_1)\dots f(x_m)$$

pentru orice $x_1, \dots, x_m \in A$. □

Extinzând un exemplu al lui J. Baker [11] în cazul produsului $m-$ar vom arăta că în cazul în care norma nu este multiplicativă, Teorema 6.2.1 nu mai este adevărată.

Într-adevăr, dacă $\varepsilon > 0$, atunci există o unică soluţie $\delta_\varepsilon > 1$ a ecuaţiei $|\delta^m - \delta| = \varepsilon$. Considerăm $m-$semigrupul numerelor reale $A = (\mathbb{R}, (\,)_\circ)$, unde operaţia $(\,)_\circ$ este definită astfel $(x_1^m)_\circ = x_1 + \dots + x_m$ şi algebra tuturor matricilor pătratice de ordin 2 cu coeficienţi reali $M_2(\mathbb{R})$ cu norma uzuală.
Atunci pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R}),\ f(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & \delta_\varepsilon \end{pmatrix}$ obţinem

$$\|f(x_1 + \dots + x_m) - f(x_1)\dots f(x_m)\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta - \delta^m \end{pmatrix} \right\| = |\delta - \delta^m| = \varepsilon,$$

pentru orice $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.
Rezultă că f este o funcţie nemărginită şi în plus $f(x_1 + \dots + x_m) \neq f(x_1)...f(x_m)$.

În lucrarea [128] L. Szekelyhidi a arătat că invarianţa spaţiului vectorial în care sunt definite funcţiile este suficientă pentru a asigura superstabilitatea. În cele ce urmează vom da o generalizare a Teoremei 6.2.1 în sensul lui L. Szekelyhidi [128], extinzând noţiunea de spaţiu vectorial invariant al func ctiilor definite pe un $m-$semigrup.

Definiţie 6.2.1. Fie $(A, (\,)_\circ)$ un $m-$semigrup şi V spaţiul linear al funcţiilor definite pe A cu valori în corpul numerelor complexe, $\mathbb{C}$. Spaţiul V se numeşte *invariant drept*(*invariant stâng*) dacă din faptul că $\varphi : A \to \mathbb{C}$, $\varphi \in V$ rezultă că translaţia la dreapta (la stânga)

$$\varphi_{y_1^{m-1}} : S \to \mathbb{C};\ \varphi_{y_1^{m-1}}(x) = \varphi((x, y_1^{m-1})_\circ)$$

$$({}_{y_1^{m-1}}\varphi : S \to \mathbb{C};\ {}_{y_1^{m-1}}\varphi(x) = \varphi((y_1^{m-1}, x)_\circ))$$

aparţine lui V pentru orice $y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in A$.

Teoremă 6.2.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Fie* $(A, (\,)_\circ)$ *un* $m-$*semigrup,* V *un spaţiu linear invariant drept al funcţiilor definite pe* A *cu valori în corpul numerelor complexe,* $\mathbb{C}$ *şi* φ, $f : A \to \mathbb{C}$ *funcţii nenule cu proprietatea că funcţia* $\psi_{y_1^{m-1}} : A \to \mathbb{C}$*;*

$$\psi_{y_1^{m-1}}(x) = \varphi((x, y_1^{m-1})_\circ) - \varphi(x)f(y_1) \cdot \ldots \cdot f(y_{m-1}),$$

aparţine lui V *pentru orice* $y_1, \ldots, y_{m-1} \in A$*. Atunci sau* $\varphi \in V$*, sau* f *este un omomorfism* $m-$*ar al* $m-$*semigrupului* $(A, (\,)_\circ)$ *cu valori în* $(\mathbb{C}, \Pi)-$ $m-$*semigrupul derivat din semigrupul* $(\mathbb{C}, \cdot)$.

Demonstraţie. Presupunem că f nu este omomorfism $m-$ar al lui A cu valori în $\mathbb{C}$. Rezultă că există $x_2, x_3, \ldots, x_{m+1} \in A$ astfel încât

$$f((x_2^{m+1})_\circ) \neq f(x_2)f(x_3) \cdot \ldots \cdot f(x_{m+1})$$

şi în plus, există

$$[f((x_2^{m+1})_\circ) - f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_{m+1})]^{-1} \overset{\text{notat}}{=} a^{-1}.$$

Presupunem că $x_i \in A$ cu proprietatea că $b_i = f(x_i) \neq 0$pentru $i \in \{m+2, ..., 2m-1\}$.

Atunci, datorită proprietăţii de asociativitate a operaţiei $m-$are, vom avea

$$\varphi(((x_1^m)_\circ x_{m+1}^{2m-1})_\circ) - \varphi((x_1^m)_\circ)f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1})$$

$$= [\varphi((x_1(x_2^{m+1})_\circ x_{m+2}^{2m-1})_\circ) - \varphi(x_1)f((x_2^{m+1})_\circ)f(x_{m+2}) \ldots f(x_{2m-1})]$$

$$-[\varphi((x_1^m)_\circ) - \varphi(x_1)f(x_2) \ldots f(x_m)]f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1})$$

$$+\varphi(x_1)[f((x_2^{m+1})_\circ) - f(x_2) \ldots f(x_{m+1})]f(x_{m+2}) \ldots f(x_{2m-1}).$$

Deci

$$\varphi(x_1) = \{[\varphi(((x_1^m)_\circ x_{m+1}^{2m-1})_\circ) - \varphi((x_1^m)_\circ)f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1})]$$

$$-[\varphi((x_1(x_2^{m+1})_\circ x_{m+2}^{2m-1})_\circ) - \varphi(x_1)f((x_2^{m+1})_\circ)f(x_{m+2}) \ldots f(x_{2m-1})]$$

$$+[\varphi((x_1^m)_\circ) - \varphi(x_1)f(x_2) \ldots f(x_m)]f(x_{m+1}) \ldots f(x_{2m-1})\}$$

$$\cdot[f(x_2^{m+1}) - f(x_2) \ldots f(x_{m+1})]^{-1}[f(x_{m+2})]^{-1} \ldots [f(x_{2m-1})]^{-1}.$$

Prin urmare

$$\varphi(x_1) = [\psi_{x_{m+1}^{2m-1}}((x_1^m)_\circ) - \psi_{(x_2^{m+1})_\circ x_{m+2}^{2m-1}}(x_1)$$

$$+\psi_{x_2^m}(x_1)f(x_{m+1})\dots f(x_{2m-1})]a^{-1}b_{m+2}^{-1}b_{m+3}^{-1}\dots b_{2m-1}^{-1}.$$

Deoarece V este spaţiul linear invariant drept rezultă că partea dreaptă a egalităţii de mai sus, privită ca o funcţie de x_1 aparţine lui V şi în concluzie funcţia φ aparţine lui V. □

Ca şi o consecinţă, obţinem o generalizare naturală a Teoremei 3.4 al lui Amyari şi Moslehian [8]:

Corolar 6.2.1. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Fie* $(A, (\,)_\circ)$ *un* $m-$*semigrup şi aplicaţiile nenule* $\varphi, f : A \to \mathbb{C}$ *pentru care există o funcţie mărginită* $\alpha : A^{m-1} \to [0, \infty)$ *cu proprietatea*

$$|\varphi((x_1^m)_\circ) - \varphi(x_1)f(x_2)\dots f(x_m)| \leq \alpha(x_2, x_3, \dots, x_m)$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$.

În aceste condiţii sau aplicaţia φ *este mărginită sau* f *este omomorfism* $m-$*ar al lui* $(A, (\,)_\circ)$ *cu valori în* $m-$*semigrupul multiplicativ al numerelor complexe* $(\mathbb{C}, \Pi)$.

Demonstraţie. Fie V spaţiul linear al tuturor funcţiilor mărginite definite pe A cu valori în $\mathbb{C}$. Aplcaţia $\psi_{x_2^m} : A \to \mathbb{C}$

$$\psi_{x_2^m}(x_1) = \varphi((x_1^m)_\circ) - \varphi(x_1)f(x_2)\dots f(x_m)$$

aparţine lui V oricare ar fi $x_2, x_3, \dots, x_m$. Atunci conform Teoremei 3 rezultă că sau aplicaţia φ este mărginită sau aplicaţia f este omomorfism $m-$ar. □

În cazul în care $f = \varphi : A \to \mathbb{C}$ şi aplicaţia $\alpha = \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ obţinem o generalizare a Corolarului 3.5 a lui Amyari şi Moslehian [8]:

Corolar 6.2.2. (**Adina Pop**, Maria S. Pop [94]) *Dacă* $(A, (\,)_\circ)$ *este un* $m-$*semigrup,* $\varepsilon > 0$ *şi* $f : A \to \mathbb{C}$ *este o funcţie nenulă cu proprietatea că oricare ar fi* $x_1, x_2, \dots, x_m \in S$,

$$\left| f((x_1^m)_\circ) - \prod_{j=1}^m f(x_j) \right| \leq \varepsilon$$

atunci sau f *este mărginită sau* f *este un omomorfism* $m-$*ar.*

Bibliografie

[1] Alam S. E., *$(m,n)-$Semirings and a generalized fault-tolerance algebra of systems, LAP LAMBERT Acad. Publ.,2012*

[2] Alam S. E., Rao S, B. Davvaz B.,$(m,n)-$Semirings and a generalized fault-tolerance algebra of systems, Journal of Applied Mathematics, vol. 2013, Article ID 482391, 10 pages, 2013

[3] Alarcón F. E., Anderson D.D., *Commutative semirings and their lattices of ideals*, Huston J. Math. **20**, No.4 (1994), 571-590

[4] Alarcón F. E., Polkowska D., *Fully prime semirings*, Kyungpook Math. J. **40** (2000), 239-245

[5] Allen P.J., *A fundamental theorem oh homomorphisms for semirings* , Proc. Amer. Math. Soc. 21(1969), 412-416

[6] An I. S., Park C. *Isomorphisms and derivations in C^*-ternary algebras*, Korean J. Math, **17**(1) (2009), 83-90

[7] Aoki T., *On the stability of the linear transformation in Banach spaces*, J. Math. Soc. Japan, vol. **2** (1950), 6466

[8] Amyari M., Moslehian M.S. *Approximate homomorphisms of ternary semigroups*, Lett. Math. Phys., vol. **77** (2006), 1-9

[9] Atani R.E., Atani S.E., *Ideal theory in commutative semirings*, Bull. Acad. Stiinţe Rep. Moldova Matematica, **2**,No.57 (2008),14-23

[10] Atani S.E., *The ideal theory in quotients of commutative semirings*, Glasnik Mat. **42**(62)(2007), 301-308

[11] Baker J., *The stability of the cosine equation*, Proc. Amer. Math. Soc.**74** (1979), 242-246

[12] Bednarek B. and Wallace A. D., *Relative ideals and their complements* I. Rev. Roum. Math. Pures Appl., **11** (1966), 13–22

[13] Bleicher M. N., Bourne S., *On the embeddability of partially ordered halfring*, J. Math. Mech. **14**(1965), 109-116

[14] Boccioni D., *Simetrizzazione di una operazione $n-$aria*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **35**(1965), 82-106

[15] Boccioni D., *Caratterizzazione di una clase di anelli generalizzati* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **35**(1965), 116-117

[16] Bogdanović S., *$r-$semigroupe*, Review Res.Univ Novi Sad, **10** (1980) p. 149-152

[17] Bogdanović S., *A note on strongly reversible semiprimary semigroups*, Publ.de l'Inst. Math.Belgrade, Nouvelle Série, Tome **28** (42)(1980), p. 19-23

[18] Bourne S., *The Jacobson radical of a semiring*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37** (1951), 163-170

[19] Chaudhari J.N., Ingale K. J., *On partitioning and subtractive ideals of ternary semirings*, Kyungpook Math. J. **51**(2011), 69-76, Doi 10.5666/KMJ.2011.51.1.069

[20] Chow H. L., *Remarks on boundaries in semigroups* , Period. Math. Hungar., **7** (1976), No. 2, 137–139

[21] Cho Y.U., *Some results of additive endomorphisms in rings*, J. Chungcheong, Math. Soc. **17**, No.2, (2004), 191-196

[22] Cohn P.M., *Universal algebra*, Second edition, Mathematics and its Applications, 6, s Reidel, Publishing Co. Dorchrecht, Boston, Mass, 1981

[23] Crombez G., *On a partially ordered n- groups*, Abhandhungen ans dem. Math-Sem. der Univ. Hamburg, **39**(1973), 141-146

[24] Crombez G., *On $(n, m)-$ rings*, Abh. Math. Sem.Univ.Hamburg,37 (1972), 180-199

[25] Crombez G., Timm J., *On (m,n)-guotient rings*,Abh. Math., Sem. Univ. Hamburg, **37** (1972), 200-203

[26] Crombez G. and Six G., *On topological n-groups*, Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, **41** (1974), No. 1, 115–124

[27] Čupona G., *On (m,n)-rings*, Bull. Soc. Math. -Phys. Macédoine **16**(1965), 5-10

[28] Čupona G., *On associatives*, Makedon, Akad. Nauk. Umet. Oddel. Prirod., Mat. Nauk, Prilozi **1**(1969), No. 1, 9-20

[29] Cupona G., *On topological n-Groups*, Bull. Soc. Math. et Phys., R. S. Skopye, **XXII** (1971), 5–19

[30] Čupona G., Celakovski, M.,*On a representation on n-associatives into-semigroups*, Makedon, Akad. Nauk. Umet. Oddel. Prirod., Mat. Nauk, Prilozi **6**(1974), No. 1, 23-24

[31] Dehghanian M. Modarres M. S., *Ternary $\gamma-$ homomorphisms and ternary $\gamma-$derivations on ternary semigroups*, J. of Ineq. and Apply., (2012), doi:10.1186/1029-242X-2012-34;

[32] Dixit V.N., Dewan S., *Congruences and Green's equivalence relation on ternary semigroups*, Commun. Fac. Sci. Univ.Ank. Series A1 V., **46**, (1997),103-117

[33] Dőrnte W., *Undersuchungen űber eine verallgemeinerten*, Gruppenbegriff, Math. Z. **29**(1928), 1-19

[34] Dudek W. A., *Remarks on $n-$groups*, Demonstratio Math. **13**(1980), No.1, 165-181

[35] Dudek W. A., Michalski, J., *On a generalization of Hosszú theorem*, Demonstratio Math. **15**(1982), No. 3, 783-805

[36] Dudek D. A and Mukhin, V. V., *On topological n-ary semigroups*, Quasigroup and Related System, **3** (1996), 73–88

[37] Dudek W. A., *Idempotents in $n-$ary semigroups*, Southeast Asian Bull.Math., **25** (2001), 97-104

[38] Dugas M., Hausen J., Johnson J.A., *Rings whose additive endomorphisms are ring endomorphisms*, Bull. of the Australian Math. Soc. **45** (1992), 91-103

[39] Dulin, B.J., Mosher, J.R., *The Dedekind property for semirings* , J. Austral. Math. Soc. **14** (1972), 82-90

[40] Dutta T. K. , S. Kar S., *On regular ternary semirings, in Advances in Algebra*, 343-355, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.

[41] Tapan K. Dutta T.K. , Kar S., *On ternary semifields* ,Discuss. Math. General Algebra and Appl. **24** (2004) 185-198

[42] Dutta T.K., Kar S., *On prime Ideals and prime radical Of ternary semirings*, Bull. Cal. Math. Soc., Vol **46**(2005), 445-454

[43] Etherington J. M. H., *Non associative arithmetics*, Proc. Roy., Soc. Edinburgh **62** (1949), 442-453

[44] Evans, T., *Abstract mean values*, Duke Mat. J. 30, 1963, No. 2, 331-347

[45] Feigelstock S., *Rings whose additive endomorphisms are N-multiplicative*, Bull. Australian Math. Soc. **39** (1989), 11-14

[46] Fuchs L., *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963

[47] Gajda Z., *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Sci., **14**(1991), 431-434

[48] Găvruţa P. , *A generalization of the Hyers-Ulam-Rassian stability of approximately additive mappings*, J. Math. Anal. Appl., vol.**184**, (1994) 431-436

[49] Glazek K., Gleichgewicht B., *Abelian $n-$groups*, Colloq. Math. Soc János Bolyai**29** (1977), 321-329

[50] Gleichgewicht B., Glasek K., *Remarks on $n-$groups as abstract algebras*, Colloq. Math. **17**(1967), 209-219

[51] Glazek K.,Gleichgewicht B., *On 3-semigroups and 3-groups polynomial-derived from integral domains*, Semigroup Forum **32** (1), (1985), 61-70

[52] Gilmer R., *Commutative semigroups Rings*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1984

[53] Golan J.S., *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, (1999), 381 pp.ISBN 0-7923-5786-8

[54] Golan J.S., *Power Algebras over Semirings with Applications in Mathematics and Computer Science*, Kluwer Acad. Publ., 488 (1999)

[55] Gratzer G., *Universal Algebra, Second edition,* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1971

[56] Gupta V., *On partitioning ideals of semirings*, Kyungpook Math. J. **46**(2006), 181-184

[57] Hebisch U., Weinert H.J., *Semirings. Algebraic theory and applications in computer science*, World Scient.Publ. 1999

[58] M. Henriksen M., *Ideals in Semirings with Commutative Addition*, Notices of the American Mathematical Society, Vol. **6**, 1958, p. 321.

[59] Hirano Y., *On rings whose additive endomorphisms are multiplicative*, Periodica Math. Hungar **23**(1991), 87-89

[60] Hosszú M., *On the explicit form of* $n-$*groups operations*, Publ. Math. Debrecen **10**(1963), 88-92

[61] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. **27** (1941) 222-224

[62] Iancu Lăcrimioara, *Contribuţii la teoria* (n, m)*-inelelor şi n-modulelor*, PhD Thesis, "Babeş-Bolyai" Univ. Cluj-Napoca, 1999

[63] Iancu Lăcrimioara, Pop S. Maria, *Some properties of the* $(m, 2)-$*reduce of an* $(m, n)-$*rings*, Bull. for Applied & Comp. Math. PAMM, BAM-2000-C/2002, Budapest, 189-196

[64] Iancu, L., Pop S. Maria, *Localization in semicomutative* $(m, n)-$*rings*, Discutiones Math. Alg. and Appl. **20**(2000), 233-253

[65] Iséki K., *Ideal theory of semirings* Proc. Japan. Acad. **32**(1956), 554-559

[66] Iséki K., *Ideals in semirings* Proc. Japan. Acad. **34**(1958), 29-31

[67] Iséki K., *On ideals in semirings* Proc. Japan. Acad. **34**(1958), 507-509

[68] Jacobson M., *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. I Basic Concepts, New York, Van Nostrand 1951

[69] Kar S., Maity B.K., *Congruences on ternary semigroups*, Journal of the Chungcheong Math. Soc., **20**, No.3, 191-201

[70] Kar S., *On Structure Space of Ternary Semirings*, Southeast Asian Bull. Math., **31**, No.3 (2007), 535-545

[71] Kar S., *Ternary Semirings, An Introduction*, VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft, 2010, ISBN:978-3-639-00401-4

[72] Kepka T., *On a class of non-associative rings*, Comment Math. Univ. Carolinae **10**(1977), 265-279

[73] Kepka T., *Semirings whose additive endomorphisms are multiplicative*, Comment Math. Univ. Carolinae, **34**(1993), 213-219

[74] Kerner R., *Ternary and non-associative algebraic structures and their applications in physics*, in *Proc. Conf. ICGTMP "Group-23"*, Dubna, Rusia, July 30-August 6, 2000

[75] Lal H., *Commutative semiprimary semigroups*, Czech. Math, J. 25 **(100)** (1975), p. 1-3

[76] Latorre D.R., *A note on quotient semirings*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 463-465

[77] Lehmer D. H., *A ternary analogue of abelian groups*, Amer. J. Math, **54**(2)(1932), 329-338

[78] Lister W. G., *Ternary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 37-55.

[79] Marichal J.-L., Mathonet P., *A description of n-ary semigroups polynomial-derived from integral domains*, Semigroup Forum, **83**(2),(2011), 241-249

[80] **Melniciuc (Pop) Adina**, *Asupra unor inele generalizate (I)*, Lucr. Sem. de Creativ. Matem. Univ. Baia Mare, Vol. II, 1992-1993, 105-113

[81] Monk J. D., Sioson F. M., *$m-$Semigroups, semigroups and function representation*, Fund. Math. **59** (1966),233-241

[82] Monk J. D., Sioson F. M., *On the general theory of $m-$groups*, Fund. Math. **72**(1971), No. 3, 233-244

[83] M. S. Moslehian M. S., Szekelyhidi L., *Stability of ternary homomorphisms via generalized Jensen equation*, Result. Math.,**49**, pp. 286-300,2006 doi: 101007/s00025-006-0225-1

[84] Mukhin V. V., *On topological n-ary semigroups*, Quasigroup and Related System, **4** (1997), 39-49

[85] Opp M., *Verbandstheoretische Behandlung topologischer n-Gruppen*, Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, **41** (1974), 124-129

[86] Paalman de Miranda, A. B., *Topological semigroups*, Math. Centr. Amsterdam, 1964

[87] **Pop Adina**, *Remarks on embedding theorems of (m,n)-semirings*, Bul. Ştiint. Univ. Baia Mare, **16**(2000), No. 2, 297-302

[88] **Pop Adina**, Pop, S. Maria, *Some embedding theorems for (n,2)-rings*, Bul. Ştiint. Univ. Baia Mare , **18**(2002), No. 2, 129-132

[89] **Pop Adina**, *On the boundary of algebraic radicals in topological (n,m)-semirings*, Creativ. Math. and Inf., **22**(2013), No. 2, 215-222

[90] **Pop Adina**, *Some results on additive endomorphisms in* $(n, 2)$*-semirings*, acceptat Analele Univ. Oradea

[91] **Pop Adina**, Pop, S. Maria, *On partially ordered n-semigroups and* (n, m)*-semigroups*, Creativ. Math. and Inf., **18**(2009), No. 2, 194-199

[92] **Pop Adina**, Pop, S. Maria, *Semiprimary n-semigroups*, Carpathian J. Math. **28**(2012), No. 1, 127-132

[93] **Pop Adina**, Pop, S. Maria, *On the (n,m)-semirings derived polynomially from infinite semidomains*, Carpathian J. Math. **29**(2013), No. 1, 61-68

[94] **Pop Adina**, Pop S. Maria, *A generalization of Hyers-Ulam stability on m-semigroups* (acceptat), Miskolc Math. Notes

[95] Pop S. Maria, **Pop Adina**, *On some relations on* $n-$*monoids*, Carpathian J. Math. **20**(2004), No. 1, 87-94

[96] Pop S. Maria, **Pop Adina**, *Some properties of generalized semirings*, Carpathian J. Math. **24**(2008), No. 3, 397-402

[97] Pop S. Maria, **Pop Adina**, *Some functorial properties of reduced (n,2)-semirings of (n,m)-semirings*, Bull. for Applied & Comp. Math. PAMM, BAM-2076, **CVI**(2003), Nr. 2102, Budapest, 91-96

[98] Pop S. Maria, **Pop Adina**, $(m, 2)-$ *Semirings whose additive endomorphisms are multiplicative*, Bull. for Applied & Comp. Math. PAMM, BAM-1969, (2001), **XCVI 13**, Budapest, 33-40

[99] Pop S. Maria, *Contribuţii la teoria n−semigrupurilor*, Teză de doctorat, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj, 1979

[100] Pop S. Maria, *On boundary in topological n-semigroups*, Mathematica, **22** (45) (1980), No. 1, 127–130

[101] Pop S. Maria, *Remarks on the generalizations of Zupnik's theorem relatively to n−semigroups*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, seria B, Mat-Info, **7**(1991), 3-8

[102] Pop S. Maria, *Structuri algebrice ternare definite pe punctele unei parabole*, Lucr. Sem. de Creativ. Matem. Univ. Baia Mare, Vol. II, 1992-1993, 25-40

[103] Pop S. Maria, *Un exemplu de grup ternar definit pe punctele unei elipse*, Lucr. Sem. de Creativ. Matem. Univ. Baia Mare, Vol. III, 1993-1994, 23-28

[104] Pop S. Maria, *On the reduction and the extension of (m,n)-rings*, Bul. Ştiint. Univ. Baia Mare, Ser. B. Mat-Inf., **19** (1993), No. 1, 81-90

[105] Pop S. Maria, *On the prime radical of an ideal in an (m,n)-ring*, Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Ser. B, Mat-Inf., **XVI** (1996), 163–168

[106] Pop S. Maria , *On congruences on n-semigroups and on their binary reduces*, Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Ser. B, Mat-Inf., **XVII** (2001), No. 1–2, 107–112

[107] Pop S. Maria, Câmpian Maria, *n−semigroups of fractions*, Mathematica **38**(61),(1996), 63-68

[108] Pop S. Maria, Purdea I., *A generalization of the Zupnik's theorem relatively to n−semigroups*, Seminar of Algebra, 56-62, Preprint, 88-5, Univ. Babeş-Bolyai, Cluj Napoca, 1988

[109] Pop V., *Functions with the Image of Cauchy Difference in a Linear Manifold* Automation Comp., Appl. Math., **18** (2009), No. 1, 169-172

[110] Post E.L., *Polyadic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), No. 2, 208-350

[111] Purdea I., *Les anneaux de type* (m, n) *(I)*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. Cluj, **20**(1975), 3-10

[112] Purdea I. ,*Tratat de algebră modernă*, vol. 1 şi 2, Edit. Acad.Republicii Soc. România, 1977

[113] Rassias Th. M., *On the stability of the linear mapping in Banach space*, Proc. Amer. Math, Soc., vol. **72**(1978), pp. 297-300,

[114] Rassias Th. M., *The Problem of S.M. Ulam for Approximately Multiplicative Mappings*, J. Math. Anal. Appl., **246**(2000), pp. 352-378

[115] Rassias J. M., *On approximation of approximately linear mappings by linear mappings*, J. Funct. Anal., vol. **46** (1982), 126-130

[116] Rassias J. M., *Solution of a Problem of Ulam*, J. Approx. Theory Math., vol. **57** (1989), 268-273

[117] Santiago M.L., Bala S. Sri, *Ternary semigroups*, Semigroup Forum **81** (2010), 380-388, DOI: 10.1007/s00233-010-9254-x

[118] Satyanarayana M., *Commutative primary semigroups*, Czech. Math, J. 22 **(**97)(1972), p. 509-516

[119] Shabir M. ,Bashir S., *Prime ideals in ternary semigroups*,Asian-European J. of Math.,Vol.**2**,No.1,(2009),p.141-154

[120] Sen M.K., Adhikary M.R., *On $k-$ideals of semirings*, Internat. J. Math. and Math. Sci. vol.**15**, No.2 (1992), 347-350

[121] Sioson, F. M., *On regular algebraic systems*, Proc. Jap. Acad. **39**, (1963), p. 283-286

[122] Sioson F. M., *Cyclic and homogenous m-semigroups,* Proc. Japan Acad. **39** (1963), No. 7, 444-449

[123] Sioson F. M., *Ideals in $(n+1)$-semigroups*, Anal. Mat. Pura, ed. Appl. LXVIII, 1965, 161-200

[124] Sioson F. M., *Ideal theory ternary semigroups*, Math. Jap.**10**(1965), 63-84

[125] Shum, K. P, *On the boundary of algebraic radicals in topological semigroups*, Acta Mathematica Acad. Scient. Hung., **25** (1974), No. (1-2), 15-19

[126] Sullivan R.P., *Research problems*, Period. Math. Hungar. **8**(1977), 313-314

[127] Szász C., *Asupra axiomelor care stau la baza definiţiei n-grupupului*, Lucrările Stiinţ. Inst. Politehnic Brasov

[128] Szekelyhidi L., *On a theorem of Baker, Lawrence and Zorzitto*, Proc. Amer. Math. Soc., vol.**84** (1982), 95-96

[129] Timm J., *Kommutative $n-$Gruppen*, Dissertation zur Erlangung der Doktorgrades, Hamburg, 1967

[130] Ulam S. M., *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no.**8**, Interscience Publishers, New York, NY, USA, 1960.

[131] Uşan J., *Neutral operations of $n-$grupoids*, Univ. u. Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak., Ser. Mat. 18, No. **2**, 1988, 117-126

[132] Ušan, J., *A comment on $n-$groups*, Zb. Rad. Prirod-Mat. Fak., Ser. Mat. **24** (1994), No. 1, 281-288

[133] Ušan J., *On congruences on $n-$groups*, Novi Sad J. Math., **27**(1997),No. 2, 89-100

[134] Ušan J., Zižović, M., *On ordered n-groups*, Quasigroups and Related Systems, **4** (1997), 77-87

[135] Ušan J., *Congruences of $n-$groups and associated Hosszú-Gluskin algebras*, Novi Sad J. Math., **28**(1998), No. 2, 91-108

[136] Ursul M., *Topological rings satisfying compactness conditions*,Series: Math. and Its Appl., Vol. 549, 2003, IX, 327 p., ISBN 978-94-010-0249-3

[137] Vandiver H.S., *Note on a simple types of algebra in which the cancellation law of addition does not hold*, Bull. Amer. Math. Soc., **40**(1934), 914-920

[138] Zhu Y., *On the Jacobson radical of an $(m,n)-$semirings*, Algebra, 2013, Algebra, Article ID 272104, 9 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/272104

[139] Zhao X., Jun Y. B. şi Ren, F., *The semirings of matrices over a finite chain*, Information Sciences **178** (2008), 3443-3450

[140] Zettl H., *A characterization of ternary rings of operators*, Adv. Math., vol. **48** (1983), 117-143

[141] Zupnik D., *Polyadic semigroups*, Publ. Math. Debrecen, **14** (1967), 273-279

[142] Wehrung F., *Injective positively ordered monoids I*, Journal Pure and Applied Algebra, **83** (1992), 43-82