Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Facultatea de Ştiinţe

Domeniul: Matematică

TEZĂ DE DOCTORAT

METODE ITERATIVE DE TIP PUNCT FIX CU APLICAŢII ÎN PROCESAREA IMAGINILOR

Coordonator ştiinţific: Prof. univ. dr. Vasile Berinde

Doctorand: Cristina Pop (căs. Ţicală)

Comisia de evaluare a tezei de doctorat:

Preşedinte: Prof. dr. Dumitru Mircea IVAN – Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca;

Conducător ştiinţific: Prof. dr. Vasile BERINDE – Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord din Baia Mare;

Referenţi:

- Prof. Emerit dr. Ioan A. RUS – Universitatea “Babeș-Bolyai” Cluj-Napoca, membru de onoare al Academiei Române ;
- Prof. dr. Mircea BALAJ – Universitatea din Oradea;
- Conf. dr. Habil. Camelia PINTEA – Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Centrul Universitar Nord din Baia Mare.

Baia Mare
2020

Cuprins

Introducere

În teza de faţă ne propunem să facem un studiu sistematic şi aprofundat al unor metode iterative de aproximare a punctelor fixe pentru diverse clase de operatori de tip contractiv din punctul de vedere al aplicaţiilor acestora la procesarea imaginilor. Tema abordată vizează atât aspecte teoretice legate de algoritmii iterativi cât şi câteva aplicaţii ale acestora la rezolvarea problemei extragerii conturului imaginilor medicale.

Punctul de plecare în studiul metodelor iterative de aproximare a punctelor fixe ale unui operator îl constituie lucrările lui E. Picard din 1890 legate de rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi integrale. Abordarea lui Picard porneşte de la ideea transformării echivalente a unei ecuaţii funcţionale de forma

$$F(x) = 0, \qquad x \in E \tag{0.1}$$

într-o problemă de punct fix, şi anume,

$$x = Tx, \qquad x \in E. \tag{0.2}$$

Dacă ecuaţia (0.2) are soluţie, atunci cea mai naturală metodă de determinare a acesteia este de a lua un punct oarecare $x_0 \in E$ şi de a calcula $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$, ş.a.m.d.,

$$x_{n+1} = Tx_n, \qquad n \geq 0. \tag{0.3}$$

Obţinem astfel un şir $\{x_n\} \subset E$, care în anumite condiţii satisfăcute de spaţiul E şi de operatorul T, este convergent către $\overline{x} \in E$, care, pentru operatori continui, este un punct fix al lui T, adică avem

$$\overline{x} = T\overline{x},$$

ceea ce revine la faptul că $\overline{x}$ este soluţie a ecuaţiei iniţiale (0.1).

Procesul iterativ (0.3) poartă denumirea de *metoda aproximaţiilor succesive* sau *iteraţie Picard*, în cinstea celui care a fost primul matematician care a aplicat sistematic această metodă la rezolvarea ecuaţiilor funcţionale, iar x_0 se numeşte aproximaţie iniţială. Fundamentele tehnicii folosite de Picard au fost sintetizate şi formulate într-o formă abstractă de către Banach în 1922 [**5**] şi poartă denumirea de principiul contracţiei al lui Banach.

Acest principiu a fost formulat iniţial în cadrul unui spaţiu liniar normat complet - ceea ce astăzi poartă denumirea de spaţiu Banach şi, în formularea dată de Caccioppolli, afirmă în esenţă că o contracţie $T : X \longrightarrow X$ definită pe un spaţiu metric complet (X, d) are un punct fix unic $\overline{x} \in X$ care poate fi obţinut ca limită a iteraţiei Picard (0.3), pentru orice aproximaţie iniţială $x_0 \in X$.

Principiul contracţiei constituie punctul de pornire al teoriei metrice a punctului fix, dezvoltată în principal în cea de-a doua parte a secolului XX, şi are aplicaţii importante în analiza neliniară şi în matematica computaţională, la rezolvarea unui spectru foarte larg de ecuaţii liniare şi neliniare.

Cu toate aceste merite incontestabile, aria de cuprindere a principiului contracţiei este limitată de faptul că orice contracţie Banach, adică orice operator care satisface condiţia

$$d\,(Tx, Ty) \leq k \cdot d\,(x, y)\,, \qquad \forall x, y \in X, \tag{0.4}$$

unde k este o constantă în $(0,1)$, este continuu pe X.

Kannan [**45**] a fost primul care a obţinut aceleaşi concluzii ca şi cele din teorema de punct fix a lui Banach dar pentru operatori în general discontinui, direcţie de cercetare care a fost dezvoltată de mulţi alţi matematicieni. Dacă coeficientul de contracţie k din relaţia (0.4) este 1, adică operatorul T este neexpansiv:

$$d\,(Tx, Ty) \leq d\,(x, y)\,, \qquad \forall x, y \in X \tag{0.5}$$

sau dacă înlocuim condiţia de neexpansivitate cu o alta mai slabă, atunci concluziile din principiul contracţiei nu mai au loc, în general.

Aceasta înseamnă, în primul rând, că un operator de tip neexpansiv nu are întotdeauna puncte fixe, adică ecuaţia

$$x = Tx$$

nu are soluţii, în general.

În al doilea rând, în oricare dintre situaţiile prezentate mai sus, iteraţia Picard (0.1) nu este convergentă sau, chiar dacă este convergentă, limita acesteia, $\overline{x}$, nu este în mod necesar un punct fix al operatorului T.

Acest lucru a dat un avânt deosebit studiului existenţei punctelor fixe pentru operatori de tip neexpansiv şi, totodată, metodelor iterative de aproximare a punctelor fixe pentru aceste clase de operatori.

Rezultatele acestor cercetări, localizate în principal în anii '60 ai secolului trecut, au arătat că, pentru a asigura existenţa punctelor fixe pentru operatori de tip neexpansiv avem nevoie ca spaţiul X să aibă proprietăţi geometrice speciale.

Cel mai important rezultat în această direcţie, pentru operatori neexpansivi, a fost obţinut, independent, în contexte diferite şi cu demonstraţii esenţial diferite, de trei matematicieni: Browder [**13**], Ghöde [**35**] şi Kirk [**50**]. Acest rezultat fundamental afirmă că un operator neexpansiv care invariază o mulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex are cel puţin un punct fix.

Totuşi, în aceste condiţii, nu se poate spune nimic despre modul în care s-ar putea determina un punct fix al unui operator neexpansiv.

Această problemă a generat o teorie extrem de bogată în rezultate referitoare la metodele iterative de aproximare a punctelor fixe. Câteva dintre metodele dezvoltate în contextul unui spaţiu normat real $(E, \|\cdot\|)$ sunt următoarele:

- Iteraţia **Krasnoselskij** ([**7**]): definită de şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dat de $x_0 \in E$ şi

$$x_{n+1} = (1-\lambda)\, x_n + \lambda T x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{0.6}$$

  unde $T : E \to E$ o aplicaţie, $x_0 \in E$ şi $\lambda \in (0, 1)$.
- Iteraţia **Mann**, cu punctul iniţial $x_0 \in E$, este şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definit prin:

$$x_{n+1} = (1-a_n)\, x_n + a_n T x_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{0.7}$$

  unde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ îndeplineşte anumite condiţii.
- Iteraţia **Ishikawa** este defintă prin $x_0 \in X$ şi

$$x_{n+1} = (1-a_n)\, x_n + a_n T\left[(1-b_n)\, x_n + b_n T x_n\right], n = 0, 1, 2, \ldots \tag{0.8}$$

  unde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ şi $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ îndeplinesc anumite condiţii.

Pe de altă parte, foarte multe clase de operatori înrudiţi cu operatorii neexpansivi s-au impus în acest domeniu de cercetare, în principal din cererile venite dinspre aplicaţiile metodelor iterative şi apoi din dezvoltarea internă a teoriei punctelor fixe pentru operatorii de tip neexpansiv.

Dintre aceste clase de operatori menţionăm:

- operatorii quasineexpansivi;
- operatorii pseudocontractivi;
- operatorii ferm neexpansivi
- punctual asimptotic quasineexpansivi

pentru care există o literatură foarte bogată, sintetizată în monografiile [**7**], [**19**], [**17**] etc.

Foarte recent, profesorul Ioan A. Rus [**73**] a iniţiat un studiu unificator al metodelor iterative de aproximare a punctelor fixe de tipul Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, prin intermediul conceptului de *perturbare admisibilă* a unui operator.

Prima parte a tezei are ca scop studiul unor metode iterative de tip Krasnoselskij, Mann şi Ishikawa în spiritul lucrărilor [**7**] şi [**73**].

Primul capitol conţine o trecere în revistă a principalelor elemente teoretice folosite în lucrare. Mai precis, se prezintă definiţiile pentru diverse clase de operatori cum ar fi operatorii demicontractivi, asimptotic demicontractivi, pseudo-contractivi, şi teoria legată de perturbarea admisibilă a unui operator. De asemenea sunt amintite noţiuni fundamentale din programarea combinatorială, se amintesc principalii algoritmi metaeuristici inspiraţi din natură şi, în special, caracteristicile algoritmilor inspiraţi din modelul coloniei de furnici.

Următoarele capitole prezintă în detaliu activitatea ştiinţifică şi rezultatele originale ale autoarei tezei. Capitolul al doilea (care reflectă conţinutul articolelor [**81**], [**82**], [**83**] şi [**84**]) este dedicat studiului operatorilor demicontractivi şi asimptotic demicontractivi cărora li s-a aplicat o perturbare admisibilă. Este dată o teoremă de convergenţă slabă şi este rezolvată o problemă de inegalităţi variaţionale exprimate în termenii perturbării admisibile a unui operator generalizat pseudocontractiv.

Capitolul trei, care are la bază lucrările [**66**] şi [**86**], leagă perturbările admisibile ale unui operator demicontractiv de algoritmii de detectare a conturului unei imagini medicale, algoritmi care au la bază modelul coloniei de furnici.

Algoritmii care mimează comportamentul furnicilor reale la găsirea celui mai scurt drum dintre adăpost şi hrană folosind ca informaţie o urmă de substanţă chimică, numită feromon, depozitată de alte furnici, au fost aplicaţi cu succes la rezolvarea mai multor probleme de optimizare. Aceşti algoritmi fac parte din metaeuristica Ant Colony Optimization (ACO).

Noutate în utilizarea operatorilor: Perturbările admisibile ale operatorului demicontractiv sunt folosite la construirea euristicii cerute în algoritmul ACO pentru extragerea conturului a patru imagini medicale. Rezultatele obţinute folosind perturbările admisibile sunt expuse în acest capitol, şi sunt comparate cu rezultate obţinute cu alţi operatori. Comparările au arătat că perturbările admisibile ale operatorului demicontractiv cercetat au generat rezultate bune la determinarea conturului imaginilor de test.

Capitolul patru este dedicat strategiilor inovative în procesarea imaginilor folosind colonii de furnici sensibile. Acest capitol reflectă rezultatele teoretice din lucrarea [**66**], şi rezultatele practice din articolele [**86**] şi [**87**]. Sensibilitatea furnicilor din ACO este cuantificată de vectorul Pheromone Sensitivity Level (PSL). Folosirea PSL împreună cu perturbările admisibile şi operatorii din capitolul 3 a dus la generarea unor rezultate practice mult îmbunătăţite faţă de cele obţinute în capitolul 3. În acest capitol sunt prezentate comparări între rezultatele obţinute cu şi fără folosirea vectorului PSL. De asemenea, sunt prezentate contururile imaginilor medicale obţinute prin segmentare imaginii originale.

Rezultatele originale conţinute în lucrarea de faţă

- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.2.80 şi Teorema 2.2.2.84 în care se stabileşte convergenţa slabă a şirului generat de perturbarea admisibilă a unui operator demicontractiv la un punct fix al operatorului demicontractiv.
- Am enunţat Corolarul 2.2.2.82 şi Corolarul 2.2.2.83 referitoare la convergenţa şirului generat de iteraţia Krasnoselskij a perturbării admisibile a unui operator demicontractiv definit într-un spaţiu Hilbert.
- Am enunţat şi demonstrat Lema 2.2.3.90 referitoare la mărginirea şirului generat de perturbarea admisibilă a unui operator L - Lipschitzian definit într-un spaţiu normat.
- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.3.91 referitoare la convergenţa tare a perturbării admisibile a operatorilor asimptotic demicontractivi.
- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.4.103 şi Teorema 2.2.4.104 referitoare la soluţia unei probleme de inegalităţi variaţionale.
- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.5.112 care priveşte convergenţa slabă a perturbării admisibile aplicate compunerii unui operator nonspreading cu operatori ferm neexpansivi.

- Am construit operatorul G prin aplicarea perturbării admisibile Krasnoselskij aplicaţiei T din exemplul 2.2.2.79.
- Am propus operatorul (3.85) denumit KH-operator ce poate fi folosit ca funcţie test pentru construirea valorii euristicii din algoritmul ACO-edge detection.
- Am construit operatorul G prin aplicarea perturbării admisibile "χ" aplicaţiei T din exemplul 2.2.2.79.
- Am construit operatorul (3.86) denumit χ-operator ce poate fi folosit ca funcţie test pentru construirea valorii euristicii din algoritmul ACO-edge detection.
- Am propus algoritmul Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model (HMIP-SAM) specific pentru imagistica medicală.
- Am detectat conturul imaginilor medicale folosind HMIP-SAM.
- Am implementat sensibilitatea furnicilor în algoritmul ACO pentru extragerea conturului imaginilor medicale.
- Am utilizat furnicile sensibile la concentraţia de feromoni.
- Am propus segmentarea imaginilor înainte de detectarea conturului pentru ca apoi contururile obţinute să ofere o acurateţe mai mare a conturului extras.
- Am implementat segmentarea imaginilor înainte de extragerea conturului.

Participări la conferinţe:

- CODECAMP Baia Mare, 17 Noiembrie 2018;
- CODECAMP Baia Mare, 22 Aprilie 2017;
- INNOVATIVE IDEAS IN SCIENCE, 2^{nd} and 3^{rd} November, 2017, Banja Luka, *"Fixed point approximation for asimptotic pseudocontractive mappings using admisible perturbation operator"*;
- SYNASC 2016, September 24-27, 2016, Timişoara, România, The 18th International Symposium on Symbolic and Numerical Algorithms for Scientific Computing, Workshop on Iterative Approximation of Fixed Points, *"Iterative approximations of asymptotically demicontractive mappings defined as admissible perturbations"*;
- 5th Minisymposium of Fixed Point Theory and Applications (ICAM10), Baia Mare, 1-7 June 2014, *"Admissibe Perturbation for a Family of Firmly Nonexpansive Mappings and a Nonspreading Mapping"*;
- 9th International Conference on Applied Mathematics. Dedicated to Professor Emeritus Constantin Corduneanu on the occasion of his 85th birthday, 25-28 September 2013, Baia Mare;
- 4th International Conference on Applied Mathematics. Baia Mare-Şuior, 23-26 septembrie 2004 - comitetul de organizare.

Diseminarea rezultelor originale conţinute în lucrarea de faţă

Cele mai multe dintre rezultatele prezentate în teză au fost publicate în următoarele articole:

- **Ţicală, C.**, Zelina, I., Pintea C.M., *Admissible Perturbation of Demicontractive Operators within Ant Algorithms for Medical Images Edge Detection*, Mathematics **2020**, 8, 1040. (revistă ISI, IF=1.747 (2019), zona roşie)

- Ţicală, C., *Approximating fixed points of asymptotically demicontractive mappings by iterative schemes defined as admissible perturbations*, Carpathian J. Math., **33** (2017), No. 3, 381–388. (revistă ISI, IF=1.438 (2019), zona roşie)
- **Ţicală**, C., Zelina, I., *New ant colony optimization algorithm in medical images edge detection*, Creat. Math. Inform., **29** (2020), No. 1, 329–336. (indexat AMS, MR, zbMATH)
- Ţicală, C., *Approximating fixed points of demicontractive mappings by iterative methods defined as admissible perturbations*, Creat. Math. Inform., **25** (2016), No. 1, 121–126. (indexat AMS, MR, zbMATH)
- Pintea, C.M., **Ţicală, C.**, *Medical Image Processing: A Brief Survey and a New Theoretical Hybrid ACO Model*, Combinations of Intelligent Methods and Applications. Smart Innovation, Systems and Technologies, Springer, Cham, vol. 46 (2016), 117–134. (indexat WoS ISI-Proceedings)
- Ţicală, C., *A weak convergence theorem for a Krasnoselskij type fixed point iterative method in Hilbert spaces using an admissible perturbation*, Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform. **25** (2015), no. 1, 243–251. (indexat AMS, MR, zbMATH)
- Ţicală, C., *Approximating solutions of generalized pseudocontractive variational inequalities by admissible perturbation type iterative methods*, Creat. Math. Inform. **22** (2013) No. 2, 237–241. (indexat AMS, MR, zbMATH)

Articolele de la care am pornit această lucrare dar care au un impact minor în cercetarea de faţă sunt

- Horvat-Marc, A.; Ţicală, C. *Localization of solutions for a problem arising in the theory of adiabatic tubular chemical reactors.* Carpathian J. Math. 20 (2004), no. 2, 187–192. [**42**]
- Ţicală, C.; Balog, L. *Empirical study of the rate of convergence of some Newton type methods.* Creat. Math. Inform. 17 (2008), no. 3, 521–524 (2009). [**85**]

CAPITOLUL 1

Preliminarii teoretice

1.1. Noţiuni fundamentale în teoria punctului fix. Metode iterative de aproximare a punctelor fixe

Fie X o mulţime nevidă şi $T : X \to X$ o aplicaţie. Spunem că $x \in X$ este un punct fix al lui T dacă

$$T(x) = x$$

şi notăm prin F_T sau $Fix(T)$ mulţimea tuturor punctelor fixe ale aplicaţiei T, adică

$$Fix(T) = \{x \in X \mid T(x) = x\}.$$

Exemplul 1.1.1.1. *Dacă* $X = \mathbb{R}$ *şi* $T(x) = x^2 + 7x + 9$*, atunci* $Fix(T) = \{-3\}$.

Exemplul 1.1.1.2. *Dacă* $X = \mathbb{R}$ *şi* $T(x) = x^2 - x$*, atunci* $Fix(T) = \{0, 2\}$.

Exemplul 1.1.1.3. *Dacă* $X = \mathbb{R}$ *şi* $T(x) = x + 7$*, atunci* $Fix(T) = \emptyset$.

Exemplul 1.1.1.4. *Dacă* $X = \mathbb{R}$ *şi* $T(x) = x$*, atunci* $Fix(T) = \mathbb{R}$.

Fie X o mulţime oarecare şi $T : X \to X$ o aplicaţie. Pentru orice $x \in X$ dat, definim $T^n(x)$ inductiv prin: $T^0(x) = x$ şi $T^{n+1} = T(T^n(x))$, $n > 0$.

Numim T^n $(n \geq 1)$ iteraţia de ordin n a lui T şi $T^n(x)$ a n-a iteraţie a lui x prin T.

Pentru a simplifica notaţiile vom scrie în continuare Tx în loc de $T(x)$.

Pentru orice $x_0 \in X$, şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ definit prin

$$x_n = Tx_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.9}$$

se numeşte şirul aproximaţiilor succesive cu valoarea iniţială x_0. Este de asemenea cunoscut şi sub numele de *iteraţia Picard* cu valoarea iniţială x_0. Evident $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$.

Pentru o aplicaţie dată, $T : X \to X$, au loc următoarele proprietăţi:

(1) $Fix(T) \subset Fix(T^n)$, pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;
(2) Dacă $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $Fix(T^n) = \{x\}$, atunci $Fix(T) = \{x\}$.

Reciproca afirmaţiei (2) nu este în general adevărată după cum se arată şi în următorul exemplu:

Exemplul 1.1.1.5. *Fie operatorul* $T : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$*, definit prin* $T(1) = 3$*,* $T(2) = 2$ *şi* $T(3) = 1$*. Atunci* $F_{T^2} = \{1, 2, 3\}$ *dar* $Fix(T) = \{2\}$.

Cercetările din domeniul teoriei punctului fix se îndreaptă spre găsirea condiţiilor ce trebuie impuse asupra structurii mulţimii X, cu care trebuie înzestrată aceasta cât şi înspre proprietăţile pe care trebuie sa le aibă operatorul $T : X \to X$, pentru a putea obţine rezultate în ceea ce priveşte existenţa şi unicitatea punctelor fixe, depedenţa de date a punctelor fixe şi de modul de determinare a punctelor fixe.

Mulţimile X implicate în teoremele de punct fix fac parte dintr-o varietate largă de structuri cum ar fi: latice, spaţii metrice, spaţii liniar topologice etc. Pentru a le prezenta pe cele mai importante, vom avea nevoie de câteva noţiuni fundamentale din analiza funcţională.

1.1.1. Spaţii metrice

Fie X o mulţime nevidă.

DEFINIŢIA 1.1.1.6. *O aplicaţie $d : X \times X \to [0, +\infty)$ se numeşte metrică sau distanţă pe X dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*
(d1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axioma separării punctelor)
(d2) $d(y, x) = d(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$ (simetria)
(d3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului).
O mulţime X înzestrată cu o metrică d se numeşte spaţiu metric şi se notează (X, d).

EXEMPLUL 1.1.1.7. *Pentru $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde $|\cdot|$ reprezintă valoarea absolută, este o metrică pe $\mathbb{R}$.*

EXEMPLUL 1.1.1.8. *Fie $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este o metrică pe $\mathbb{R}^n$ numită metrica euclidiană.*

EXEMPLUL 1.1.1.9. *Fie $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ este o metrică pe $\mathbb{R}^n$.*

EXEMPLUL 1.1.1.10. *Fie $X = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} | f$ este continuă pe $[a, b]\}$.*
Definim $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ prin

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, \text{ pentru orice } f, g \in X$$

d este o metrică pe X, numită metrica Cebyshev. Spaţiul metric (X, d) astfel definit se notează de obicei prin $C[a, b]$.

Fie $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ un şir într-un spaţiu metric (X, d).

DEFINIŢIA 1.1.1.11. *Spunem că şirul $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ este convergent către $a \in X$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel încât $d(x_n, a) < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.*

DEFINIŢIA 1.1.1.12. *Spunem că $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ este şir fundamental sau Cauchy dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel încât $d(x_n, n_{n+p}) < \varepsilon$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$.*

DEFINIŢIA 1.1.1.13. *Un spaţiu metric X se numeşte complet dacă orice şir Cauchy în X este convergent.*

Fie (X, d) un spaţiu metric.

DEFINIŢIA 1.1.1.14. *O aplicaţie* $T : X \to X$ *se numeşte aplicaţie Lipschitz (sau L-Lipschitz) dacă există* $L > 0$ *astfel încât* $d(Tx, Ty) \leq L \cdot d(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X$.

DEFINIŢIA 1.1.1.15. *O aplicaţie* $T : X \to X$ *se numeşte* (strict) contracţie (sau a-contracţie) *dacă* T *este* a*-Lipschitz cu* $a \in [0, 1)$. *Constanta* a *se numeşte* coeficient de contracţie.

DEFINIŢIA 1.1.1.16. *O aplicaţie* $T : X \to X$ *se numeşte* aplicaţie neexpansivă *dacă* T *este* 1*-Lipschitz.*

DEFINIŢIA 1.1.1.17. *O aplicaţie* $T : X \to X$ *se numeşte* aplicaţie contractivă *dacă* $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, *pentru orice* $x, y \in X,\ x \neq y$.

DEFINIŢIA 1.1.1.18. *O aplicaţie* $T : X \to X$ *se numeşte* izometrie *dacă* $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ *pentru orice* $x, y \in X$.

EXEMPLUL 1.1.1.19. *Aplicaţia* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = \dfrac{x}{3} + 6$, $x \in \mathbb{R}$, *este o strict contracţie şi* $Fix(T) = \{9\}$.

EXEMPLUL 1.1.1.20. *Aplicaţia* $T : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $T(x) = \dfrac{1}{x}$, *este* 4*-Lipschitz cu* $Fix(T) = 1$.

EXEMPLUL 1.1.1.21. *Aplicaţia* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x + 2$, *este izometrie.*

Următoarea teoremă este fundamentală în teoria punctului fix.

TEOREMA 1.1.1.22 (PRINCIPIUL CONTRACŢIEI). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $T : X \to X$ *o contracţie. Atunci* T *are un unic punct fix* p, $Tp = p$, *iar şirul* $\{T^n x\}$, $x \in X$, *are limita* p, *adică*

$$T^n(x) \to p \text{ (când } n \to \infty\text{), pentru orice } x \in X.$$

Una dintre cele mai importante metode de extindere a Teoremei (1.1.1.22) constă în înlocuirea condiţiei ca T să fie contracţie cu o condiţie similară, dar mai slabă, şi anume

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)),\ x, y \in X,$$

unde $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este o anumită funcţie de comparaţie care păstrează anumite proprietăţi ale funcţiei $\varphi(t) = at$, $\forall t \geq 0$ $(0 \leq a < 1)$.

DEFINIŢIA 1.1.1.23 ([**74**]). *Un operator* $T : X \to X$ *se numeşte operator slab Picard - Weakly Picard Operator (WPO) dacă şirul* $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ *este convergent,* $\forall\ x \in X$, *iar limita sa (care poate depinde de* x*) este un punct fix al operatorului* T.

1.1.2. Spaţii normate

Fie $E = (V, K, +, \cdot)$ un spaţiu vectorial real (complex), adică avem $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$.

DEFINIŢIA 1.1.1.24. *O normă pe E este o aplicaţie $\|\cdot\| : E \times E \to \mathbb{R}_+$ cu următoarele proprietăţi:*

(n1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$, *elementul nul al spaţiului E;*

(n2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, *pentru orice $x \in E$ şi orice scalar λ;*

(n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *pentru orice $x, y \in E$ (inegalitatea triunghiului).*

Perechea $(E, \|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu normat.

OBSERVAŢIA 1.1.1.25. *Dacă $\|\cdot\|$ este o normă pe spaţiul liniar E, atunci aplicaţia $d : E \times E \to \mathbb{R}$ dată de*

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ x \in E \tag{1.10}$$

este o metrică (distanţă) pe E.

DEFINIŢIA 1.1.1.26. *Un spaţiu normat $(E, \|\cdot\|)$ care este spaţiu metric complet în raport cu metrica indusă de normă se numeşte spaţiu Banach.*

EXEMPLUL 1.1.1.27. *Exemplele date în secţiunea Spaţii metrice sunt spaţii normate şi distanţele prezentate în acele exemple sunt normele corespunzătoare obţinute prin considerarea aplicaţiei definite prin* (1.10).

DEFINIŢIA 1.1.1.28 ([**7**]). *Un spaţiu Banach $(E, \|\cdot\|)$, se numeşte **uniform convex** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in E$ cu $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ şi $\|x - y\| > \varepsilon$ implică $\frac{1}{2}\|x + y\| < 1 - \delta$.*

EXEMPLUL 1.1.1.29. *Fie $E = \mathbb{R}^n$. Considerăm norma euclidiană $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, unde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mulţimea E înzestrată cu norma euclidiană este spaţiu Banach uniform convex.*

EXEMPLUL 1.1.1.30. *Fie Mulţimea $E = \mathbb{R}^n$ şi norma $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ nu este spaţiu Banach uniform convex.*

DEFINIŢIA 1.1.1.31. *O submulţime C a unui spaţiu vectorial $(E, \|\cdot\|)$ se numeşte **convexă** dacă pentru orice pereche de puncte $x, y \in C$ segmentul închis cu capetele în x, respectiv y, adică mulţimea $\{\lambda x + (1 - \lambda) y : \lambda \in [0, 1]\}$, este conţinută în C.*

DEFINIŢIA 1.1.1.32. *O submulţime C a unui spaţiu normat real se numeşte **mărginită** dacă există $M > 0$ astfel încât $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in C$.*

TEOREMA 1.1.1.33. *Fie C o submulţime închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Banach uniform convex şi $T : C \to C$ o aplicaţie neexpansivă. Atunci T are un punct fix, adică există $p \in C$ astfel încât $T(p) = p$.*

DEFINIŢIA 1.1.1.34 ([**80**]). *Un spaţiu normat liniar* $(E, \|\cdot\|)$ *se numeşte* ***strict convex*** *dacă pentru* $x, y \in E$ *cu* $\|x\| = \|y\| = 1$ *egalitatea* $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| = 1$, *unde* $\lambda \in (0,1)$, *are loc dacă şi numai dacă* $x = y$.

OBSERVAŢIA 1.1.1.35. *Fie* $(E, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach real. Spaţiul* E^* *al tuturor funcţionalelor liniare continue pe* E,

$$E^\star = \{f : E \to E | f - \text{funcţională liniară}\}$$

se numeşte spaţiul dual al lui E. *Pentru* $f \in E^*$ *şi* $x \in E$ *valoarea lui* f *în punctul* x *se notează cu* $\langle f, x\rangle$ *şi se numeşte relaţie de dualitate.*

OBSERVAŢIA 1.1.1.36. *Spaţiul dual* E^* *este spaţiu Banach în raport cu norma*

$$\|f\|_* = \sup\{\langle f, x\rangle : \|x\| \le 1\},$$

notată de obicei cu $\|\cdot\|$.

OBSERVAŢIA 1.1.1.37. *Spaţiul dual al lui* E^* *este* E^{**} *numit spaţiul bidual al lui* E. *Cum în general* $E \subseteq E^{**}$, *se spune că* E *este reflexiv dacă* $E = E^{**}$.

OBSERVAŢIA 1.1.1.38. *Un spaţiu Banach uniform convex este şi strict convex şi reflexiv. Conceptele de uniform convexitate şi strict convexitate sunt echivalente pentru spaţii finit dimensionale, deoarece bilele în astfel de spaţii sunt compacte.*

DEFINIŢIA 1.1.1.39. *Fie* E^* *spaţiul dual al unui spaţiu Banach real* E. *Aplicaţia multivocă* $J : E \to \mathcal{P}(E^*)$ *definită prin:*

$$Jx = \{f \in E^* : \langle f, x\rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|x\| = \|f\|\}$$

se numeşte aplicaţia de dualitate normalizată a lui E.

OBSERVAŢIA 1.1.1.40. *Este binecunoscut faptul că dacă* E^* *este strict convex, atunci* Jx *este univocă. În consecinţă, vom nota cu* jx *această valoare.*

EXEMPLUL 1.1.1.41. *Spaţiul*

$$l_p(\mathbb{R}) = \left\{x = (x_n)_{n\ge1} \subset \mathbb{R} | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$$

înzestrat cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ x \in l_p,$$

este spaţiu Banach pentru orice $p \ge 1$.

EXEMPLUL 1.1.1.42. *Spaţiul* L_p *al tuturor funcţiilor* p*-integrabile este un spaţiu Banach, pentru orice* $p \ge 1$, *în raport cu norma corespunzătoare (*$\sum$ *se înlocuieşte cu integrala).*

Într-un spaţiu Banach E, în afară de convergenţa tare, definită cu ajutorul normei, vom considera şi noţiunea de convergenţa slabă, corespunzătoare topologiei slabe în E.

Definiţia 1.1.1.43. *Şirul* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$ *este tare convergent la* a *dacă şi numai dacă*

$$\|x_n - a\| \to 0, \text{ când } n \to \infty.$$

Convergenţa tare se notează de obicei prin $x_n \to a \ (n \to \infty)$.

Definiţia 1.1.1.44. *Spunem că* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$ *converge slab la* a *dacă pentru orice* $f \in E^*$ *avem*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, a \rangle, \text{ când } n \to \infty.$$

Convergenţa slabă o vom nota cu $x_n \rightharpoonup a \ (n \to \infty)$.

Observaţia 1.1.1.45. *În spaţiile* L_p *convergenţa slabă a unui şir împreună cu convergenţa normelor* ($\|x_n\| \to \|a\|$) *implică convergenţa tare a lui* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *către* a.

Observaţia 1.1.1.46. *Orice şir slab convergent* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *într-un spaţiu Banach este mărginit. În plus, dacă* $x_n \rightharpoonup a$*, atunci* $\|a\| \le \liminf \|x_n\|$.

Definiţia 1.1.1.47. *Fie* E *un spaţiu Banach real oarecare. Un operator* T *cu domeniul* $D(T)$ *şi codomeniul* $R(T)$ *în* E *se numeşte pseudo-contractiv* [**14**] *dacă pentru orice* $x, y \in D(T)$ *există* $j(x-y) \in J(x-y)$ *astfel încât*

$$\langle j(x-y), (I-T)x - (I-T)y \rangle \ge 0;$$

unde J *este aplicaţia de dualitate normalizată.*

Definiţia 1.1.1.48. *Fie* E *un spaţiu Banach real oarecare. O aplicaţie* T *cu domeniul* $D(T)$ *şi codomeniul* $R(T)$ *în* E *se numeşte tare pseudocontracţie dacă există* $k > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, y \in D(T)$ *există* $j(x-y) \in J(x-y)$ *astfel încât*

$$\langle j(x-y), (I-T)x - (I-T)y \rangle \ge k\|x-y\|^2;$$

unde J *este aplicaţia de dualitate normalizată.*

Observaţia 1.1.1.49. *Conceptul de operator pseudocontractiv poate fi definit echivalent după cum urmează:*

(i) T *este tare pseudocontractiv dacă există* $t > 1$ *astfel încât, pentru orice* $x, y \in D(T)$ *şi* $r > 0$*, are loc următoarea inegalitate:*

$$\|x-y\| \le \|(1+r)(x+y) - rt(Tx - tY)\|;$$

(ii) T *este pseudocontractiv dacă* $t = 1$ *în inegalitatea precedentă.*

Teorema 1.1.1.50 ([**93**]). *Fie numărul real* $q > 1$ *şi* E *un spaţiu Banach real. Atunci* E *este q-uniform neted dacă şi numai dacă există constanta* $c_q > 0$ *astfel încât*

$$\|x+y\|^q \le \|x\|^q + q\langle j(x), y\rangle + c_q\|y\|^q, \ \forall\, x, y \in E \tag{1.11}$$

LEMA 1.1.1.51 ([**76**]). *Fie* $\{a_n\}$ *şi* $\{b_n\}$ *şiruri de numere reale nenegative pentru care are loc inegalitatea*

$$a_{n+1} < a_n + b_n, \quad n \geq 0$$

Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ *şi* $\{a_n\}$ *are un subşir care converge la* 0*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1.1.3. Spaţii Hilbert

Spaţiile Hilbert sunt cele mai importante exemple de spaţii Banach uniform convexe ce pot fi folosite în modul cel mai natural ca ambient pentru numeroase proceduri iterative de punct fix.

DEFINIŢIA 1.1.1.52. *Fie* H *un spaţiu vectorial real. Produsul scalar este o funcţională* $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *ce îndeplineşte următoarele cerinţe:*

(p1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *pentru orice* $x \in H$ *şi* $\langle x, x \rangle = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$*, vectorul nul din* H*;*
(p2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ *pentru orice* $x, y \in H$*;*
(p3) $\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle$*, pentru orice* $x, y, z \in H$ *şi* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

DEFINIŢIA 1.1.1.53. *Fie* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *un produs scalar definit pe* H*. Atunci funcţia* $x \to \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ *este o normă pe* H*, normă care se numeşte norma indusă de produsul scalar.*

DEFINIŢIA 1.1.1.54. *Perechea* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *se numeşte spaţiu prehilbertian.*

DEFINIŢIA 1.1.1.55. *Un spaţiu prehilbertian care este complet în raport cu metrica corespunzătoare normei indusă de produsul scalar se numeşte spaţiu Hilbert.*

OBSERVAŢIA 1.1.1.56. *Orice spaţiu Hilbert este un spaţiu Banach uniform convex.*

OBSERVAŢIA 1.1.1.57. *Este cunoscut că în spaţiile prehilbertiene are loc relaţia*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle . \tag{1.12}$$

OBSERVAŢIA 1.1.1.58. *Într-un spaţiu prehilbertian,* $\mathcal{H}$ *, avem (a se vedea, de exemplu,* [**55**]*)*

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\|^2 = \lambda \|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2 \tag{1.13}$$

pentru $\forall\ x, y \in \mathcal{H}$ *şi* $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$*.*

DEFINIŢIA 1.1.1.59 ([**7**]). *Într-un spaţiu Hilbert* H*, o pseudocontracţie* $T : H \to H$ *este o aplicaţie ce îndeplineşte condiţia*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|(Tx - Ty) - (x - y)\|^2, \ \ x, y \in H$$

echivalentă cu

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \leq \|x - y\|^2 \ \Leftrightarrow\ \langle (I - T)\, x - (I - T)\, y, x - y \rangle \geq 0.$$

DEFINIŢIA 1.1.1.60 ([**7**]). *Un operator* T *se numeşte strict (tare) pseudocontractiv pe* C *dacă există o constantă* $k > 1$ *astfel încât*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\| \,(I - T)\, x - (I - T)\, y\|^2, \forall x, y \in C.$$

1.1.4. L-spaţii

Fie X o mulţime nevidă şi $f : X \longrightarrow X$ un operator. Notăm prin $I(f)$ mulţimea tuturor submulţimilor invariante ale lui f, şi anume $I(f) = \{Y \subset X | f(Y) \subseteq Y\}$.[**62**]

Cu $A_f(x^*)$, notăm bazinul de atracţie a lui f în raport cu $x^* \in X$, unde $A_f(x^*) = \{x \in X | f^n(x) \longrightarrow x^*,\ \text{când } n \longrightarrow +\infty\}$.

Definiţia 1.1.1.61 ([**62**]). *Fie X o mulţime nevidă. Se notează cu $s(X)$ mulţimea $\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in X, n \in \mathbb{N}\right\}$ şi fie $c(X) \subset s(X)$ o submulţime a lui $s(X)$. Fie $Lim : c(X) \longrightarrow X$ un operator. Atunci tripletul $(X, c(X), Lim)$ se numeşte L - spaţiu (Fréchet* [**24**]*) dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) *Dacă $x_n = x$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$*

(ii) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi $Lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x$ atunci pentru toate subşirurile $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avem $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} \in c(X)$ şi $Lim\,(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}} = x$.*

Observaţia 1.1.1.62. *Prin definiţie, un element al mulţimii $c(X)$ este şir convergent, $x = Lim(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este limita şirului şi scriem $x_n \longrightarrow x$ când $n \longrightarrow +\infty$. Un L- spaţiu se notează cu $(X, \longrightarrow)$.*

Fie X o mulţime nevidă şi $Y \subset X$ o submulţime nevidă a mulţimii X.

Definiţia 1.1.1.63 (Noţiunea de retracţie, [**41**]). *O aplicaţie $\rho : X \to Y$ se numeşte retracţie a mulţimii X pe Y dacă şi numai dacă $\rho|_Y = 1_Y$, adică $\rho(x) = x,\ \forall x \in Y$.*

Dacă X are o anumită structură, aplicaţia ρ trebuie să fie compatibilă cu acea structură. De exemplu, o retracţie a unui spaţiu topologic se presupune că este continuă.

Definiţia 1.1.1.64 ([**41**]). *Fie H un spaţiu Hilbert, $K \subset H$, o submulţime nevidă, convexă şi închisă a lui H. Fie $P : H \to K$ o aplicaţie dată prin $P(u) = w$, unde $w \in K$, astfel încât*

$$\|u - w\| = d = \inf_{v\in K} \|u - v\| \tag{1.14}$$

Atunci aplicaţia P se numeşte proiecţie metrică a spaţiului H pe K.

1.2. Perturbarea admisibilă a unui operator

Definiţia 1.1.2.65 ([**73**]). *Fie X o mulţime nevidă şi $G : X \times X \to X$ un operator cu proprietăţile:*

(A1) $G(x, x) = x, \forall x \in X$;

(A2) $x, y \in X, G(x, y) = x$ implică $y = x$,

Fie $f : X \to X$ un operator. Atunci operatorul $f_G : X \to X$ definit prin

$$f_G(x) = G(x, f(x)).$$

se numeşte perturbarea admisibilă a lui f corespunzătoare operatorului G.

Se observă că

$$Fix(f_G) = Fix(f) = \{x \in X | f(x) = x\}.$$

În general

$$Fix(f_G^n) \neq Fix(f^n),\ n \geq 2.$$

EXEMPLUL 1.1.2.66 ([**73**]). *Fie $(V, +, \mathbb{R})$ un spaţiu vectorial, $X \subset V$ o submulţime convexă, o constantă $\lambda \in (0,1)$, un operator $f : X \to X$ şi $G : X \times X \to X$ definit prin:*

$$G(x,y) := (1-\lambda)x + \lambda y \tag{1.15}$$

Atunci f_G este o perturbare admisibilă a lui f. Vom numi f_G perturbarea Krasnoselskij a lui f.

EXEMPLUL 1.1.2.67 ([**73**]). *Fie $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ un spaţiu vectorial, $X \subset V$ o submulţime convexă, şi operatorii $\chi : X \times X \to (0,1)$, $f : X \to X$ şi $G : X \times X \to X$ definită prin*

$$G(x,y) := (1-\chi(x,y))x + \chi(x,y)y. \tag{1.16}$$

Atunci f_G este o perturbare admisibilă a lui f.

DEFINIŢIA 1.1.2.68 ([**9**]). *Fie $G : X \times X \to X$ un operator perturbare admisibilă pe un spaţiu normat X. Operatorul G se numeşte afin Lipschitzian dacă există o constantă $\mu \in [0,1]$ astfel încât*

$$\|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)\| \leq \|\mu(x_1-x_2) + (1-\mu)(y_1-y_2)\|,\ \forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in X. \tag{1.17}$$

1.3. Operatori iterativi în termenii perturbării admisibile

Fie $(X, \to)$ un L-spaţiu şi operatorii $f : X \to X$ şi $G, G_n : X \times X \to X, n \in \mathbb{N}$

EXEMPLUL 1.1.3.69 (Algoritmul $\mathbb{G}$K, ([**73**])). *Considerăm algoritmul iterativ*

$$x_0 \in X, x_{n+1} = G(x_n, f(x_n)), n \in \mathbb{N}$$

Prin definiţie, acest proces iterativ este convergent dacă şi numai dacă

$$x_n \to x^*(x_0) \in Fix(f),\ \text{când } n \to \infty,\ \text{pentru orice } x_0 \in X.$$

Se observă că $x_n = f_G^\infty(x_0)$. Aşadar, acest algoritm este convergent dacă şi numai dacă f_G este WPO. Dacă f_G este WPO şi o perturbare admisibilă a lui f, atunci

$$F_G^\infty : X \to Fix(f)$$

este retracţie de mulţime.

Aceste algoritm se numeşte algoritmul Krasnoselskij corespunzător lui G sau algoritmul $\mathbb{G}$K.

Exemplul 1.1.3.70 (Algoritmul $\mathbb{G}$M). *Considerăm metoda iterativă*

$$x_0 \in X, x_{n+1} = f_{G_n}(x_n), n \in \mathbb{N}$$

Presupunem că f_{G_n} este o perturbaţie admisibilă a lui f pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi că

$$x_n \to x^*(x_0) \in Fix(f), \text{ când } n \to \infty, \text{ pentru orice } x_0 \in X.$$

În condiţiile de mai sus, considerăm operatorul $f_G^\infty : X \to Fix(f)$, definit prin $f_G^\infty := x^*(x)$.

Se observă că $f_G^\infty : X \to Fix(f)$ este o retracţie de mulţime. Numim această metodă iterativă algoritmul Mann corespunzător lui $G = (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau algoritmul $\mathbb{G}M$.

1.4. Noţiuni fundamentale în programarea combinatorică în procesarea imaginilor

În matematica aplicată şi informatica teoretică, optimizarea combinatorială este un subiect care constă în alegerea unui obiect optim dintre obiectele unei mulţimi finite de obiecte. [**75**] În multe dintre aceste probleme căutarea exhaustivă nu este fezabilă, se poate folosi în cazul problemelor de optimizare a căror mulţime de soluţii este discretă sau poate fi redusă la o mulţime discretă. Dintre problemele remarcabile care implică optimizarea combinatorială amintim problema comis - voiajorului *Travelling Salesman Problem (TSP)*, problema arborelui parţial de cost minim: *Minimum Spanning Tree problem (MST)*.

Optimizarea combinatorică este o ramură a optimizării matematice care este legată, la rândul ei de cercetarea operaţională, teoria algoritmilor, şi teoria complexităţii computaţionale. Are importante aplicaţii în domenii precum inteligenţa artificială, automatizări, matematică, teoria licitaţiilor, inginerie software.

În unele articole de specialitate se consideră că optimizarea discretă (combinatorială) este compusă atât din programarea liniară cât şi din probleme de optimizare. Programarea liniară constă în determinarea valorii maxime sau minime a unei funcţii liniare în care variabila de optimizare este supusă unor restricţii. O problemă de programare liniară este o problemă care necesită minimizarea unei funcţii care are o expresie liniară în prezenţa unor restricţii liniare (Dantzig [**25**]). O problemă de optimizare are caracter combinatorial dacă fiecare variabilă poate lua independent un număr de valori numerice apriori cunoscute ca de exemplu valori întregi nenegative, inferioare unui prag dat, sau numai valorile 0 sau 1. [**31**]

Programarea combinatorială implică determinarea unui mod eficient de alocare a resurselor folosite pentru găsirea soluţiilor unor probleme matematice.

Există o cantitate impresionantă de literatură care tratează algoritmii cu timp de execuţie polinomial pentru clase speciale a optimizării discrete, majoritatea fiind unificaţi de programarea liniară. Unele exemple de optimizare combinatorială, care se încadrează în această categorie, sunt cele legate de găsirea celor mai scurte drumuri sau a arborilor minimi de acoperire, probleme legate de matroizi (structuri care abstractizează şi generalizează noţiunea de independenţă liniară în spaţii vectoriale) sau în problemele de "matching".

În teoria complexităţii computaţionale, Nondeterministic Polynomial (NP) este o clasă de complexitate folosită pentru clasificarea problemelor de decizie. NP este mulţimea problemelor de decizie, pentru care toate exemplele de probleme la care răspunsul este "da", au demonstraţii verificabile în timp polinomial ([**77**]).

Pentru problemele de optimizare discretă NP-complete literatura de specialitate include următoarele teme:

(1) cazuri speciale de probleme cum ar fi cele cu parametru fix (fixed parameter tractable);

(2) algoritmi care funcţionează bine pe instanţe aleatoare (problema comis - voiajorului);

(3) algoritmi pentru aproximare care au timp de execuţie polinomial şi care găsesc o soluţie ”apropiată” de cea optimă;

(4) rezolvarea de probleme din lumea reală care apar în practică şi care nu au în mod necesar cel mai defavorabil comportment precum în problemele NP-complete (complexa problemă a comis - voiajorului cu număr de zeci de mii de noduri).

Problemele de optimizare combinatorială pot fi văzute sub forma problemelor care caută cel mai ”potrivit” element dintr-o mulţime discretă; de aceea, în principiu, ar trebui ca orice algoritm de sortare sau metaeuristică să poată fi folosit pentru a le rezolva. Totuşi algoritmii generici de sortare nu garantează nici o soluţie optimă şi nu au timp de execuţie polinomial.

Problemele de optimizare sunt importante atât din punct de vedere practic cât şi ştiinţific. Exemple de probleme practice în care se poate aplica optimizarea sunt: orarul trenurilor, crearea orarelor, optimizarea configuraţiilor, designul reţelelor de telecomunicaţie sau probleme din biologia computaţională. Comunitatea ştiinţifică a simplificat multe din aceste probleme pentru a obţine probleme de test aşa cum este problema comis - voiajorului *Travelling Salesman Problem (TSP)*. TSP modelează problema comis - voiajorului care trebuie să viziteze un anumit număr de oraşe. Scopul său este să viziteze fiecare oraş parcurgând o distanţă minimă. Un alt exemplu este problema înlănţuirii proteinelor, ea fiind una dintre cele mai dificile probleme din biologia computaţională, biologia moleculară, biochimie şi fizică. Ea constă în găsirea formei funcţionale sau conformaţia unei proteine într-un spaţiu bi- sau tri-dimensional. Algoritmii completi garantează pentru orice instanţă finită a unei probleme de optimizare combinatorială găsirea unei soluţii într-o perioadă limitată de timp. Totuşi, pentru problemele care sunt NP-dificile nu există algoritmi care să găsească soluţia în timp polinomial. De aceea, metodele complete de rezolvare au nevoie de algoritmi cu timp de execuţie polinomial în cazul cel mai defavorabil. Aceasta duce la timpi de execuţie prea mari pentru a putea fi puşi în practică. Prin urmare, s-au dezvoltat metode de aproximare, în care se sacrifică garanţia găsirii unei soluţii optime pentru a găsi o soluţie bună dar reducând semnificativ timpul de execuţie al algoritmului. Aproximarea colonie de furnici este una dintre metodele de aproximare cele mai recente.

Optimizarea cu ajutorul coloniei de furnici este o tehnică introdusă la începutul anilor 1990. Sursa de inspiraţie a fost comportamentul manifestat de colonia de furnici în procesul de căutare a hranei. La baza acestui comportament stă comunicarea indirectă dintre furnici, prin intermediul traseului de feromoni, care le permite să găsească drumuri mai scurte între colonie şi sursele de hrană. Acest comportament este exploatat de furnicile artificiale în căutarea de soluţii pentru problemele de optimizare discretă sau pentru cele de optimizare continuă, şi pentru soluţii la probleme importante de telecomunicaţii cum ar fi rutarea.

1.5. Programare combinatorială. Procesarea imaginilor

O problemă de optimizare (adică o funcţie de mai multe variabile care trebuie maximizată sau minimizată cu satisfacerea unui set finit de restricţii) are caracter combinatorial dacă fiecare variabilă poate lua independent un număr de valori numerice apriori cunoscute de exemplu: valori întregi, nenegative inferioare unui prag dat sau numai valori 0 sau 1. Analiza noastră se va restrânge la acele probleme cuantificabile matematic prin datele amintite: funcţia obiectiv, variabilele, restricţiile, valori permise variabilelor, deoarece clasa de probleme combinatoriale este cu mult mai largă. Caracteristica unei probleme combinatoriale este că numărul combinaţiilor posibile de valori este finit. Aceste combinaţii se numesc **soluţii** ale problemei şi mulţimea lor se va nota cu Ω.

Combinaţiile care, în plus, satisfac restricţiile problemei, şi ele în număr finit, se vor numi **soluţii admisibile** şi mulţimea lor se va nota cu A. Cu aceste notaţii, o problemă combinatorială se formalizează astfel: dată fiind o funcţie definită pentru toate elementele din Ω să se determine $x^* \in A$ cu proprietatea: $f(x^*) = \max\{f(x) : x \in A\}$. La prima vedere o problemă de programare liniară este o problemă combinatorială deoarece soluţia sa optimă se poate găsi inspectând doar mulţimea A care este finită. Există totuşi o mare deosebire: o soluţie de bază nu poate fi construită prin acordarea de valori variabilelor întrucât, din start, plaja de valori admisibile este infinită. În notaţiile de mai sus, A poate fi socotită finită, însă mulţimea ω a combinaţiilor posibile de valori date variabilelor este $\mathbb{R}_n$ care este infinit. Şansa de a da peste un element din A considerând o combinaţie de valori sau alta este practic nulă.

Metaeuristici

Metaeuristica reprezintă un ansamblu de concepte algoritmice (building box) care permit definirea unor metode euristice ce pot fi aplicate mai multor tipuri de probleme; este un cadru general de rezolvare a problemelor care poate fi adaptat uşor pentru diferite probleme particulare.

Metaeuristicile inspirate de natură sunt ideile de rezolvare ale problemelor preluate din modul în care se desfăşoară anumite procese în natură.

Modele de metaeuristici inspirate din natură:

- Swarm Intelligence - comportamentul inteligent al mulţimilor.
- Ant Colony Optimization (ACO) - Modelul coloniei de furnici [**27**]. În ACO o colonie de agenţi relativ simpli, numiţi furnici, rezolvă sarcini complexe cum ar fi optimizarea şi controlul resurselor. Furnicile acţionează conform cu o schemă de decizie secvenţială, în care furnicile construiesc şi evaluează adaptiv o metodă de decizie stocastică. Aşa cum Dorigo, Bonabeau şi Theraulaz arată în lucrarea lor [**12**], comunicarea stigmergică între furnici este cea mai importantă caracteristică a acestui algoritm. Stigmergia este o paradigmă definită prin comunicarea indirectă şi asincronă mijlocită de mediu.
- Particle Swarm Optimization (PSO) - Modelul ansamblului de particule (sau a stolului de păsări) este o metodă computaţională de rezolvare a unei probleme de optimizare încercând iterativ să îmbunătăţească soluţiile candidat, numite de aici înainte candidaţi, şi mutând particulele în spaţiul de căutare folosind o formulă matematică simplă

care influenţează atât poziţia cât şi viteza particulelor. Fiecare mutare a fiecărei particule este influenţată de cea mai bună poziţie a particulei cunoscută până la momentul mutării şi este ghidată spre cele mai bune poziţii cunoscute în spaţiul de căutare, care sunt actualizate ca fiind cele mai bune poziţii de către celelalte particule. Această tehnică trebuie să mişte ansamblul spre cea mai bună soluţie globală [**48**].

- Artificial Bee Optimization (ACO) - Modelul roiului de albine. ABC ca tehnică de optimizare, furnizează o procedură de căutare bazată pe o populaţie compusă din indivizi numiţi poziţii ale hranei. Aceste poziţii sunt modificate de albine artificiale care acţionează într-un interval de timp. Scopul albinelor este să descopere poziţii ale surselor de hrană şi, la final, poziţia cu cea mai mare cantitate de hrană. În ABC, albinele artificiale zboară în spaţiul de căutare. Albinele cu funcţie de angajate şi supraveghere aleg sursele de hrană pe baza experienţei lor şi a celor din jur şi îşi ajustează poziţia. Albinele cercetaşe zboară aleator şi aleg sursele fără a folosi experienţa. Dacă sursa de hrană este mai mare decât cea anterioară, din memoria lor, ele memorează noua poziţie şi o uită pe cea anterioară. Astfel, ABC combină metodele de căutare locală, efectuată de albinele angajate şi albinele cu funcţie de supraveghere, cu metode de căutare globală de care se ocupă albinele cu funcţie de supraveghere şi albinele cercetaşe, încercând să echilibreze procesele de căutare şi exploatare. [**46**]

1.6. Modelul coloniei de furnici

Sursa de inspiraţie este comportarea furnicilor în procesele de

(1) *Căutare a hranei* este echivalentă cu rezolvarea unei probleme de optimizare, şi anume: identificarea drumului optim între hrană şi cuib;
(2) *Organizare a coloniei* în rezolvarea unei probleme de grupare a datelor: separarea hranei de corpurile furnicilor moarte sau a larvelor după dimensiuni sau gruparea furnicilor aparţinând unor specii diferite.

Elemente cheie:

(1) *Comunicarea indirectă* prin intermediul unor substanţe chimice numite feromoni. Acest proces de comunicare este denumit stigmergie;
(2) *Stabilirea similarităţii* dintre furnici pe baza mirosului (o furnică recunoaşte dacă o altă furnică face parte din acelaşi cuib sau nu).

1.6.1. Metaeuristica Ant Colony Optimization (*ACO*)

O furnică artificială este o procedură constructivă stocastică a cărei scop este crearea incrementală a soluţiei unei probleme, prin adăugarea unor componente potrivite ale soluţiei la o soluţie parţială care trebuie construită. De aceea, metaeuristica *ACO* poate fi aplicată oricărei probleme de optimizare pentru care se poate defini o euristică constructivă [**27**].

Totuşi, *ACO* nu se poate aplica rezolvării oricărei probleme de programare combinatorială, aplicarea se poate face doar dacă problema considerată se poate modela astfel încât furnicile artificiale să poată construi soluţia.

În ceea ce urmează vom da o caracterizare formală a reprezentării problemelor pe care furnicile o pot folosi.

Fie problema de minimizare $(\mathcal{S}, f, \Omega)$, unde $\mathcal{S}$ este setul de soluţii candidat ale problemei, f este funcţia obiectiv care asociază o valoare obiectiv (un cost) $f(s,t)$ fiecărei soluţii $s \in \mathcal{S}$, iar $\Omega(t)$ este un set de restricţii. Parametrul t indică faptul că funcţia obiectiv, respectiv restricţiile pot depinde de timp.

Scopul este de a găsi o soluţie fezabilă global optimă s^*, adică o soluţie fezabilă de cost minim la o problemă de minimizare.

O problemă de optimizare combinatorială $(\mathcal{S}, f, \Omega)$ este modelată pentru probleme care sunt caracterizate de următorii itemi:

- Se dă o mulţime finită de *componente* $C = \{c_1, c_2, ..., c_{N_C}\}$, unde N_C este numărul componentelor.
- *Stările*, x, ale problemei sunt definite sub forma unor şiruri de lungime finită $x = \langle c_i, c_j, ..., c_h, ...\rangle$ de elemente din C. Mulţimea tuturor stărilor posibile se notează cu $\mathcal{X}$. Lungimea unei secvenţe x este notată cu $|x|$. Lungimea maximă a unui şir este mărginită de o constantă pozitivă $n < +\infty$.
- Mulţimea soluţiilor candidat $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $\mathcal{X}$, (adică $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$).
- O mulţime de stări fezabile $\tilde{\mathcal{X}} \subseteq \mathcal{X}$, definite prin intermediul unui test dependent de problemă. Testul verifică dacă nu este imposibil să se completeze un şir, $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ într-o soluţie care satisface restricţiile din Ω.
- O mulţime nevidă $\mathcal{S}^*$ de soluţii optime, cu $\mathcal{S}^* \subseteq \tilde{\mathcal{X}}$ şi $\mathcal{S}^* \subseteq \mathcal{S}$.
- Un cost $g(s,t)$ este asociat fiecărei soluţii candidat $s \in \mathcal{S}$. În cele mai multe cazuri $g(s,t) \equiv f(s,t)$, $\forall s \in \tilde{\mathcal{S}}$, unde $\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ este mulţimea soluţiilor candidat fezabile, obţinute din $\mathcal{S}$ aplicând restricţiile din $\Omega(t)$.
- În unele cazuri un cost sau o estimare a unui cost, $J(x,t)$ poate fi asociat cu alte stări decât soluţiile candidat. Dacă starea x_j poate fi obţinută prin adăugarea de componente ale unei soluţii la o stare x_i, atunci $J(x_i,t) \leq J(x_j,t)$. Se observă că $J(x,t) \equiv g(s,t)$.

Fiind dată această formulare furnicile artificiale construiesc soluţii prin parcurgerea de drumuri aleatoare prin graful $G_C = (C, L)$ ale cărui noduri sunt elemente din C care împreună cu mulţimea de muchii L formează un graf complet. Elementele mulţimii L se numesc "legături".

Restricţiile problemei $\Omega(t)$ sunt implementate în metoda de rezolvare aplicată de către furnici. Alegerea de a implementa restricţiile în metoda furnicilor artificiale permite un anumit grad de flexibilitate în construirea soluţiei. În funcţie de problema care trebuie rezolvată poate fi mai rezonabil să se impună restricţiile mai aspru, să le permită furnicilor sa construiască doar soluţii fezabile; sau mai lejer, caz în care furnicile pot alege şi soluţii care nu sunt fezabile (adică soluţiile candidat din $\mathcal{S} \setminus \tilde{\mathcal{S}}$ vor fi penalizate mai mult cu cât gradul lor de fezabilitate este mai mic).

1.6.2. Comportamentul furnicilor

După cum am spus, în algoritmii *ACO* furnici artificiale sunt proceduri constructive stocastice care construiesc soluţii mişcându-se înt-un graf complet $G_C = (C, L)$. Restricţiile problemei $\Omega(t)$ sunt conţinute în metoda euristică de rezolvare a furnicilor. Pentru cele mai multe probleme furnicile construiesc soluţii fezabile. Totuşi, în unele cazuri poate fi necesar sau benefic să se accepte şi soluţii care nu sunt fezabile. Componentele $c_i \in C$ şi legăturile $l_{ij} \in L$ pot avea asociat un *traseu de feromoni*, τ (τ_i dacă este asociat cu componentele şi τ_{ij} dacă este asociat cu legăturile), şi o *valoare a euristicii* η (η_i, respectiv η_{ij}). Traseul de feromoni înglobează memoria pe termen lung a procesului de căutare, şi este actualizat de către furnici. În contrast, valoarea euristicii, deseori numită (informaţie euristică) reprezintă informaţia apriori despre instanţele problemei sau informaţii despre execuţia programului provenite din alte surse decât furnicile. În multe cazuri valoarea η reprezintă costurile, sau o estimare a costurilor, suplimentare care se adaugă odată cu adăugarea unei componente a sau unei legături la soluţia care se construieşte. Aceste valori sunt folosite de către regula euristică a furnicilor pentru a lua decizii, conform unei probabilităţi de tranziţie, despre cum să se mişte prin graf.

Mai exact, fiecare furnică k are următoarele proprietăţi:

- Exploatează graful $G_C = (C, L)$ căutând soluţii optime $s^* \in \mathcal{S}$.
- Are memorie $\mathcal{M}^K$ pe care o poate folosi pentru a stoca traseul urmat. Memoria poate fi folosită (1) pentru a construi soluţii fezabile; (2) pentru a calcula valorile euristicii η; (3) pentru evaluarea soluţiei găsite şi (4) pentru a reface traseul în ordine inversă.
- Are o *stare iniţială* x_s^k şi una sau mai multe *condiţii de terminare* e^k. De obicei starea iniţială este exprimată prin şirul vid sau printr-un şir care are un singur element.
- Când se găseşte în starea $x_r = \langle x_{r-1}, i\rangle$, dacă nu se îndeplineşte nici o condiţie de terminare, furnica se mută într-un nod j din vecinătatea nodului (componentei) i, $\mathcal{N}^k(x_r)$, adică într-o stare $\langle x_r, j\rangle \in \mathcal{X}$. Dacă se îndeplineşte cel puţin o condiţie de oprire e^k, atunci furnica se opreşte. Atunci când o furnică construieşte o soluţie, ea nu poate face mutări astfel încât sa ajungă în stări care nu sunt fezabile, în majoritatea algoritmilor; interzicerea se face prin memoria furnicii sau prin valori potrivite ale euristicii η.
- Selectează o mutare prin aplicarea unei probabilităţi de tranziţie. Probabilitatea de tranziţie depinde de: (1) traseul de feromoni local şi valoarea euristicii; (2) de memoria privată a furnicii şi starea curentă a furnicii; şi (3) de restricţiile problemei.
- Când se adăugă o componentă c_j la starea curentă, furnica poate actualiza traseul de feromoni τ asociat cu starea adăugată sau legătura corespunzătoare.
- Odată ce o soluţie este construită, furnica poate reface traseul în ordine inversă şi actualiza traseul de feromoni al componentelor folosite.

Este important de observat că furnicile acţionează simultan şi independent şi că, deşi fiecare furnică este suficient de complexă încât să poată găsi o soluţie (nu foarte bună) a problemei considerate, soluţiile bune pot apărea în urma interacţiunii tuturor furnicilor din colonie. Interacţiunea este obţinută prin comunicare indirectă mediată de informaţia pe care furnicile o scriu sau o citesc din variabile, stocând astfel valori ale traseelor de feromoni.

În acest fel, se obţine un proces de învăţare distribuit în care furnicile, individual, nu se adaptează, dar, adaptează iterativ felul în care problema este prezentată şi este percepută de către alte furnici.

1.6.3. Descrierea informală a *ACO*

Informal, ACO poate fi văzut ca fiind interacţiunea dintre trei proceduri *ConstructAntsSolutions, UpdatePheromones,* and *DaemonActions* [**27**].

```
procedure ACOMetaheuristic
   ScheduleActivities
      ConstructAntsSolutions
      UpdatePheromones
      DaemonActions          % optional
   end-ScheduleActivities
end-procedure
```

FIGURA 1. [**27**]Pseudocodul metaeuristicii *ACO*. Procedura *DaemonActions* este opţională şi se referă la acţiuni centralizate.

ConstructAntsSolutions dirijează o colonie de furnici care vizitează concomitent şi asincron stări adiacente ale problemei considerate mutându-se în vecinătăţi ale nodurilor din graful G_C. Furnicile se mută folosind o politică de decizie locală şi stocastică folosind informaţiile de pe traseul de feromoni şi ale euristicii. În acest fel, furnicile construiesc soluţii ale problemei de optimizare. Odată ce o furnică a construit o soluţie, sau pe parcursul construirii ei, furnica evaluează soluţia (parţială) care va fi folosită de procedura *UpdatePheromones*, procedură care va decide ce cantitate de feromon va fi depozitată pe traseu.

UpdatePheromones este un proces prin care traseul de feromoni este modificat. Valorile traseului pot atât să crească cât să şi scadă. Valorile cresc atunci când furnicile depozitează feromoni şi scad datorită fenomenului de evaporare al feromonului. Practic, acumularea de feromoni (pe componente sau conexiuni) creşte probabilitatea ca acele componente / conexiuni, care au produs o soluţie bună, să fie folosite şi de alte furnici. Pe de altă parte, evaporarea feromonului implementează o formă folositoare de *uitare*, fenomen care permite evitarea unei convergenţe rapide a algoritmului spre o regiune suboptimă, şi astfel, se permite şi explorarea unor zone noi ale spaţiului de căutare.

Procedura *DaemonActions* este folosită pentru a implementa acţiuni centralizate, care nu pot fi efectuate de o singură furnică. Exemple de procese *daemon* pot fi procedura de optimizare locală, sau colectarea globală de informaţii care pot fi folosite pentru a decide dacă este folositor sau nu sa se actualizeze suplimentar traseul de feromoni.

Figura 1 include descrierea metaeuristicii ACO în pseudocod. Procedura principală a metaeuristicii administrează graficul celor trei componente principale ale *ACO* prin intermediul procedurii *ScheduleActivities*: dirijează activitatea furnicilor, actualizează feromonii şi execută acţiuni *daemon*. În procedura *ScheduleActivities* nu se specifică felul în care se programează sau sincronizează aceste trei activităţi, dacă rulează independent sau se dacă este necesară sincronizarea lor; de aceea proiectantul este liber să aleagă felul în care aceste proceduri interacţionează, în funcţie de caracteristicile problemei.

În prezent au fost făcute numeroase implementări de succes ale metaeuristicii *ACO* şi ele sunt aplicate în rezolvarea multor probleme de optimizare combinatorială.

CAPITOLUL 2

Teoreme de punct fix în termenii perturbării admisibile

2.1. Introducere

În prezenţa unui rezultat privind existenţa şi sau unicitatea unui punct fix pentru un anumit operator, principala preocupare este legată de a identifica o anumită metodă iterativă care să permită aproximarea punctului fix şi de a obţine teoreme de convergenţă pentru clase cât mai largi de operatori de tip contractiv.

Teoria perturbărilor admisibile ale unui operator, introdusă de Rus în [**73**], a deschis o nouă direcţie de cercetare şi a unificat multe dintre aspectele importante privind metodele iterative de aproximare a punctelor fixe ale operatorilor contractivi.

Berinde [**8**], [**10**] a continuat studiul metodelor iterative de punct fix prin intermediul perturbărilor admisibile şi a obţinut teoreme de convergenţă foarte generale cu privire la metodele de tip Krasnoselskij definite în termenii perturbării admisibile pentru o clasă de operatori neexpansivi şi operatori φ-pseudocontractivi în spaţii Hilbert.

2.2. Operatori demicontractivi în termenii perturbărilor admisibile. Exemplu numeric

Pentru un operator T, definit pe un interval compact din mulţimea numerelor reale, care are un punct fix unic, Mann a demonstrat în [**54**] că procesul iterativ $x_{n+1} = (1 - a_n)\, x_n + a_n T x_n$, cu $a_n = \frac{1}{n+1}$, converge la punctul fix.

Franks şi Marzec [**30**] au demonstrat că cerinţa de unicitate a punctului fix nu este necesară. Outlaw şi Groetsch [**61**] au generalizat procedeul pentru un operator T neexpansiv definit pe o submulţime a planului complex, şi apoi Groetsch în [**37**] a extins aceeaşi procedură la un spaţiu Banach uniform convex.

Hicks şi Kubicek, în [**39**] au lărgit clasa operatorilor pentru care procesul iterativ converge la un punct fix, la aplicaţiile demicontractive.

DEFINIŢIA 2.2.2.71 ([**19**]). *Fie K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$. Operatorul $T : K \to K$ se numeşte demicontractiv (k-demicontractiv) dacă există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\|Tx - x^\star\|^2 \leq \|x - x^\star\|^2 + k\|Tx - x\|^2,\ \forall x \in K \text{ şi } x^\star \in Fix(T). \tag{2.18}$$

În cadrul acestei lucrări, pentru un operator T k-demicontractiv vom folosi noţiunea de operator demicontractiv cu coeficient de demicontracţie k.

Operatorii demicontractivi au fost studiaţi, în paralel dar independent de Hicks şi Kubicek, de către cercetătorul român Şt. Măruşter. Rezultatele lui Măruşter sunt mai generale şi sunt prezentate în lucrarea [**56**].

OBSERVAŢIA 2.2.2.72. *Constanta k este de obicei considerată în intervalul $(0,1)$. Din definiţie se observă că pentru cazul $k \geq 0$, clasa de operatori demicontractivi include clasa operatorilor cvasi-neexpansivi.*
*În lucrarea [**6**] autorii au studiat o clasă de operatori demicontractivi cu constanta $k < 0$, care sunt numiţi operatori tare atractivi. Într-o altă lucrare, [**90**], autorii au studiat o clasă de operatori k-demicontractivi cu constanta $k = -1$ şi i-au numit operatori pseudo-contractivi.*

OBSERVAŢIA 2.2.2.73. *În cazul particular în care $k = 1$, operatorii k-demicontractivi se numesc hemicontractivi, a se consulta spre exemplu lucrările [**71**] şi [**78**].*

OBSERVAŢIA 2.2.2.74. *În lucrarea [**19**] autorii au dat o definiţie pentru operatorii pseudo-contractivi echivalentă cu Definiţia 1.1.1.47.*

*Un operator T cu domeniul $\mathcal{D}(T)$ şi codomeniul $\mathcal{R}(T)$ din $\mathcal{H}$ se numeşte strict pseudo-contractiv de tip Browder-Petryshyn [**14**] dacă, pentru orice $x, y \in \mathcal{D}(T)$, există $k < 1$ astfel încât*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|x - y - (Tx - Ty)\|^2. \tag{2.19}$$

OBSERVAŢIA 2.2.2.75. *Dacă inegalitatea (2.19) este îndeplinită pentru $k = 1$ atunci operatorul T se numeşte pseudocontractiv [**19**].*

OBSERVAŢIA 2.2.2.76. *Dacă în (2.19) luăm $y \in Fix(T)$, atunci obţinem (2.18) şi, prin urmare, T este demicontractiv. Evident, clasa operatorilor demicontractivi este mai largă decât clasa operatorilor strict pseudo-contractivi de tip Browder-Petryshyn.*

LEMA 2.2.2.77 (Opial). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert, şi $\{x_n\}$ un şir care convergent slab la x_0. Atunci, pentru orice $x \neq x_0$, avem*

$$\liminf \|x_n - x_0\| < \liminf \|x_n - x\|. \tag{2.20}$$

TEOREMA 2.2.2.78 ([**39**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi K o submulţime convexă a lui $\mathcal{H}$. Fie $T : K \to K$ un operator demicontractiv cu coeficientul de demicontracţie k. Presupunem că mulţimea punctelor fixe ale lui T este nevidă. Fie $\{d_n\}$ un şir cu elemente din intervalul $(0,1)\,, \forall n \in \mathbb{N}$, cu $d_n \to d < 1 - k$ şi $\sum d_n(1 - d_n) = +\infty$. Atunci $\liminf \|v_n - Tv_n\| = 0$, pentru orice $v_1 \in K$, unde v_{n+1} este definit prin*

$$v_{n+1} = (1 - d_n)\,v_n + d_n T v_n.$$

Folosind acest rezultat, dorim să demonstrăm câteva teoreme de convergenţă pentru aplicaţiile demicontractive. Extindem astfel rezultatele lui Hicks şi Kubicek folosind tehnica perturbării admisibile pentru aplicaţii demicontractive şi în prezenţa iteraţiei Krasnoselskij.

EXEMPLUL 2.2.2.79. *Definim operatorul $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin*

$$Tx = \begin{cases} \frac{2}{3}x \sin \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Acesta este un exemplu de operator demicontractiv care nu este pseudocontractiv, prin urmare nu este nu este nici strict pseudocontractiv.

Putem considera în particular restricţia lui T la mulţimea $K = [-1, 1]$.

Evident, 0 este singurul punct fix al lui T. De asemenea, pentru $x \in K$,

$$|Tx - 0|^2 = |Tx|^2 = \left|\frac{2}{3}x \sin \frac{1}{x}\right|^2 \leq \left|\frac{2x}{3}\right|^2 \leq |x|^2 \leq |x - 0|^2 + k\,|Tx - x|^2$$

pentru orice $k < 1$. Deci T este demicontractiv.

Fie $x = \frac{2}{\pi}$ şi $y = \frac{2}{3\pi}$. Atunci $|Tx - Ty|^2 = \frac{256}{81\pi^2}$. Totuşi,

$$|x - y|^2 + |(I - T)\,x - (I - T)\,y|^2 = \frac{160}{81\pi^2} < \frac{256}{81\pi^2} = |Tx - Ty|^2,$$

ceea ce arată că operatorul T nu este pseudocontractiv.

În continuare vom extinde Teorema 2.2.2.78, demonstrată pentru iteraţia Mann de Hicks şi Kubicek în [**39**], la cazul general al perturbării admisibile, unde şirul d_n se înlocuieşte cu constanta $\lambda \in (0, 1)$, adică se ia în considerare iteraţia Krasnoselskij. Evident, condiţia ca seria $\sum d_n(1 - d_n)$ să fie divergentă este îndeplinită pentru constanta λ aleasă.

Deci, are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.2.2.80 ([**83**]). *Fie K o mulţime închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$. Fie $T : K \to K$ un operator demicontractiv cu coeficientul de demicontracţie k. Presupunem că mulţimea punctelor fixe ale lui T, $Fix(T)$, este nevidă.*

Fie $G : K \times K \to K$ o perturbare admisibilă a operatorului T, care este afin Lipschitziană cu constanta $1 - \lambda$, unde $\lambda < 1 - k$.

Atunci $\lim \|x_n - Gx_n\| = 0$ pentru orice $x_0 \in K$, unde şirul $\{x_n\}$ este definit pornind de la $x_0 \in K$, prin

$$x_{n+1} = G\,(x_n, Tx_n)\,,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.22}$$

Demonstraţie: Vom folosi în continuare operatorul perturbare admisibilă $F : K \times K \to K$ asociat operatorului T, definit prin

$$Fx = G\,(x, Tx)\,,\ x \in K \tag{2.23}$$

Folosim proprietatea fundamentală a operatorului de perturbare admisibilă, $(A1)$, din definiţia 1.1.2.65 (a se vedea [**73**]), şi, în plus, proprietatea

$$Fix\,(F) = Fix\,(T)\,. \tag{2.24}$$

Cum operatorul perturbare admisibilă G este afin Lipschitzian, putem considera că $1 - \lambda$ preia rolul şirului $\{d_n\}$ din Teorema 2.2.2.78, şi folosim faptul că $G\,(x, x) = x$ şi $Tp = p$. Avem

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2 &= \|Fx_n-p\|^2 = \|G(x_n,Tx_n)-p\|^2\\ &= \|G(x_n,Tx_n)-G(p,Tp)\|^2\\ &\leq \|(1-\lambda)(x_n-p)+\lambda(Tx_n-p)\|^2\end{aligned}$$

Folosind relaţia (1.13) obţinem

(2.25)
$$\|(1-\lambda)(x_n-p)+\lambda(Tx_n-p)\|^2 = (1-\lambda)\|x_n-p\|^2+\lambda\|Tx_n-p\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x_n-Tx_n\|^2.$$

Deoarece T este operator demicontractiv avem

$$\|Tx_n-p\|^2 \leq \|x_n-p\|^2+k\|Tx_n-x_n\|^2 \tag{2.26}$$

Înlocuind (2.26) în relaţia (2.25) avem

$$\|x_{n+1}-p\|^2 \leq \|x_n-p\|^2-\lambda(1-\lambda-k)\|x_n-Tx_n\|^2 \tag{2.27}$$

Prin inducţie obţinem că:

$$0 \leq \|x_1-p\|^2-\lambda(1-\lambda-k)\sum_{j=1}^{n}\|x_j-Tx_j\|^2.$$

Deci

$$\lambda(1-\lambda-k)\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n-Tx_n\|^2 \leq \|x_1-p\|^2 \tag{2.28}$$

Din această inegalitate deducem că $\lim\|x_n-Tx_n\|=0$ □

Observaţia 2.2.2.81. *Din inegalitatea (2.27) obţinem* $\|x_{n+1}-p\| \leq \|x_n-p\|$, $\forall\ n\geq N$, $n,N\in\mathbb{N}$.

Corolarul 2.2.2.82. *Fie K este o submulţime închisă, mărginită şi convexă a unui spaţiu Hilbert, $\mathcal{H}$. Considerăm că $T:K\to K$, λ şi $G:K\times K\to K$ satisfac ipotezele din Teorema 2.2.2.80. Presupunem că aplicaţia $I-T$ transformă submulţimi închise şi mărginite ale lui K în submulţimi închise ale lui K (în particular, dacă T este demicompact). Atunci pentru orice $x_1\in K$, procedeul iterativ definit prin (2.22) converge la un punct fix al lui T.*

Corolarul 2.2.2.83. *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi $K\subset\mathcal{H}$ o submulţime a lui $\mathcal{H}$ închisă, mărginită şi convexă. Fie $T:K\to K$, $\lambda>0$ şi $G:K\times K\to K$ care satisfac ipotezele din Teorema 2.2.2.80. Fie p un punct de acumulare al şirului $\{x_n\}$ şi presupunem că T este continuă în p. Atunci $\{x_n\}$ converge la p şi $p\in Fix(T)$.*

Teorema 2.2.2.84 ([**83**]). *Fie K o submulţime convexă a unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$. Fie $T:K\to K$ astfel încât:*

(1) $Fix(T)\neq\emptyset$.
(2) T este demicontractivă cu coeficientul de demicontracţie k.
(3) Dacă un şir $\{v_n\}$ converge slab la v şi $\{(I-T)(v_n)\}$ converge tare la 0 atunci $(I-T)(v)=0$.

Fie $G : K \times K \to K$ o aplicaţie perturbare admisibilă afin Lipschitziană cu constanta $1 - \lambda$, unde $\lambda < 1 - k$.

Atunci pentru $x_1 \in K$, iteraţia definită prin (2.22) converge slab la un punct fix al lui T.

Demonstraţie: Fie $Tp = p$. Din Observaţia 2.2.2.81, avem $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ pentru orice $n \geq 1$. Dacă există $M \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = p$ pentru orice $n \geq M$ atunci, evident, $x_n \to p$. Dacă $x_n \neq p$ orice n, notam $r = \|x_1 - p\| > 0$. Fie $S_r(p) = \{y : \|y - p\| \leq r\}$, şi fie $D = K \cap S_r(p)$. Atunci $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset D$.

De asemenea, D este o mulţime slab compactă, fiind închisă, mărginită şi convexă. Prin urmare există un subşir $\left\{x_{n_j}\right\}$ care converge slab la $y \in D \subset K$. Din Teorema 2.2.2.84 avem că $(I - T)\, x_{n_j} \to 0$; prin urmare din condiţia (3), $Ty = y$ astfel încât $Gy = y$.

Presupunem că $\{x_n\}$ nu converge slab la y. Atunci pentru şirul $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ există măcar un punct de acumulare $q \neq y$. Presupunem că $\{x_{m_i}\}$ converge slab la q. La fel ca şi în cazul lui y, $Tq = q$ şi atunci $Gq = q$. Din Observaţia 2.2.2.81, deducem că şirurile $\{\|x_n - y\|\}$ şi $\{\|x_n - q\|\}$ sunt descrescătoare pentru un n suficient de mare. Aşadar ambele limite $\lim \|x_n - y\|$ şi $\lim \|x_n - q\|$ există. Folosind Lema Opial obţinem următoarea contradicţie:

$$\begin{aligned}\lim_n \|x_n - y\| &= \liminf_j \|x_{n_j} - y\| < \liminf_j \|x_{n_j} - q\| \\ &= \liminf_i \|x_{m_i} - q\| < \liminf_i \|x_{m_i} - y\| = \lim_n \|x_n - y\|.\end{aligned}$$

Aşadar, $\{x_n\}$ converge slab la $y \in Fix(T)$. $\square$

Considerăm acum aplicaţia demicontractivă din Exemplul 2.2.2.79, şi anume:

$T : K \to K$ dată prin

$$Tx = \begin{cases} \frac{2}{3} x \sin \frac{1}{x}, \text{ if } x \neq 0 \\ 0, \text{ if } x = 0, \end{cases} \tag{2.29}$$

unde $K = [-4, 4]$ şi considerăm iteraţia Krasnoselskij definită cu operatorul perturbare admisibilă:

$$G(x, y) = (1 - \lambda)\, x + \lambda y,\ x, y \in X.$$

Atunci $T : K \to K$ satisface toate ipotezele din Teorema 2.2.2.84 şi $x^* = 0$ este unicul punct fix al lui T în K. În continuare am folosit aplicaţia Maple pentru a aproxima punctul fix x^* prin intermediul iteraţiei Krasnoselskij, pentru diferite valori ale parametrului λ şi anumite valori ale punctelor iniţiale $x_0 \in K$.

Cazul 1. $\lambda = 0.5$.

Pentru $x_0 = 4$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* = 3.897899350 \cdot 10^{-9}$.

Pentru $x_0 = 0.1$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* = 6.880966745 \cdot 10^{-11}$.

Cazul 2. $\lambda = 0.1$.

Pentru $x_0 = 4$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* = 0.7679623220$.

Pentru $x_0 = 0.1$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* = 0.006063533294$.

Cazul 3. $\lambda = 0.9$.

Pentru $x_0 = 4$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* = -8.463201309 \cdot 10^{-16}$.

Pentru $x_0 = 0.1$, după 25 iteraţii găsim valoarea punctului fix $x^* - 1.326700368 \cdot 10^{-15}$.

În concluzie, cu cât valoarea parametrului λ creşte obţinem o convergenţă mai rapidă la punctul fix al lui G.

2.3. Operatori asimptotic demicontractivi în termenii perturbărilor admisibile

Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi fie $\mathcal{K}$ o mulţime nevidă convexă a spaţiului $\mathcal{H}$. Fie $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ un operator neliniar.

Vom presupune că mulţimea punctelor fixe, $Fix(T)$, este nevidă.

DEFINIŢIA 2.2.3.85 ([**19**]). *Operatorul T se numeşte cvasi-neexpansiv dacă*

$$\|Tx - x^\star\| \le \|x - x^\star\|, \forall x \in \mathcal{K} \text{ and } x^\star \in Fix(T). \tag{2.30}$$

Daca pentru orice $x \neq x^*$ inegalitatea (2.30) este strictă, atunci T se numeşte strict cvasi-neexpansiv.

DEFINIŢIA 2.2.3.86 ([**69**]). *Un operator $T : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ se numeşte k-strict asimptotic pseudo-contractiv* ([**69**]) *dacă există un şir $\{a_n\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ astfel încât*

$$\|T^n x - T^n y\|^2 \le a_n^2 \|x - y\|^2 + k\| (I - T^n) x - (I - T^n) y\|^2 \tag{2.31}$$

pentru o anumită constantă $k \in [0, 1)$ şi pentru orice $x, y \in K$ şi $n \in \mathbb{N}$.
T se numeşte asimptotic demicontractiv dacă $Fix\,(T) \neq \emptyset$ şi există un şir $\{a_n\}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ astfel încât

$$\|T^n x - x^*\|^2 \le a_n^2 \|x - x^*\|^2 + k\|x - T^n x\|^2. \tag{2.32}$$

pentru o constantă $k \in [0, 1)$ şi pentru orice $x \in K$, şi $x^* \in F\,(T)$.

Aceste clase de operatori au fost introduse de către Qihou în [**69**] şi sunt mai bogate decât clasele de operatori introduse prin definiţiile (2.2.2.74) şi (2.2.2.71).
Dacă fixăm constanta $k = 0$ în (2.31) atunci T se numeşte *asimptotic nonexpansiv.* Este evident că un operator k-strict asimptotic pseudocontractiv care are cel puţin un punct fix, $Fix\,(T) \neq \emptyset$, este *asimptotic demicontractiv.*

În [**69**], Qihou, folosind metoda iterativă Mann modificată prezentată pentru prima dată de către Schu [**76**], a demonstrat câteva teoreme de convergenţă pentru aproximarea iterativă a punctelor fixe ale operatorilor k-strict asimptotic pseudocontractivi şi pentru operatorii asimptotic demicontractivi. Amintim că un operator T se numeşte uniform L-Lipschitzian dacă există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$\|T^n x - T^n y\| \le L\|x - y\| \tag{2.33}$$

pentru orice $x, y \in K$ şi $n \in \mathbb{N}$.

Mai exact, Qihou a demonstrat următoarele teoreme:

TEOREMA 2.2.3.87 ([**69**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert şi K o submulţime închisă, convexă şi mărginită a lui $\mathcal{H}$. Fie $T : K \to K$ un operator k-asimptotic demicontractiv complet continuu şi uniform L-Lipschitzian cu şirul $\{a_n\} \subseteq [0, \infty)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n^2 - 1) < \infty$, $0 < \varepsilon \le \alpha_n \le 1 - k - \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi un $\varepsilon > 0$ oarecare. Pentru un $x_0 \in K$ arbitrar definim şirul $\{x_n\}$ prin*

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)\, x_n + \alpha_n T^n x_n,\ n \ge 0. \tag{2.34}$$

Atunci $\{x_n\}$ *converge tare la un punct fix al lui* T.

TEOREMA 2.2.3.88 ([**69**]). *Fie* $\mathcal{H}$ *un spaţiu Hilbert şi* K *o submulţime nevidă închisă convexă şi mărginită a spaţiului* $\mathcal{H}$. *Fie* $T : K \to K$ *un operator complet continuu, uniform L-Lipschitzian şi k-strict asimptotic pseudocontractiv cu şirul* $\{a_n\} \subseteq [1, \infty)$, $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 - 1) < \infty$, $0 < \varepsilon \leq \alpha_n \leq 1 - k - \varepsilon$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $\varepsilon > 0$ *oarecare. Definim şirul* $\{x_n\}$ *pornind de la un* $x_0 \in K$ *arbitrar prin*

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)\, x_n + \alpha_n T^n x_n,\ n \geq 0..$$

Atunci $\{x_n\}$ *converge tare la un punct fix al operatorului* T.

LEMA 2.2.3.89 ([**58**]). *Fie* $\mathcal{H}$ *un spaţiu Hilbert şi* K *o submulţime nevidă a spaţiului* $\mathcal{H}$. *Atunci operatorul* $T : K \to K$ *este k-strict asimptotic pseudocontractiv dacă şi numai dacă pentru orice* $x, y \in K$ *are loc*

$$Re \left\langle j\left(x - x^*\right), x - T^n x\right\rangle \geq \frac{1}{2}\left(1 - k\right)\|x - T^n x\|^2 - \frac{1}{2}\left(a_n^2 - 1\right)\|x - x^*\|^2 \tag{2.35}$$

În această secţiune ne propunem să obţinem rezultate privind convergenţa unei metode iterative de tip Krasnoselskij definită ca perturbare admisibilă a unor operatori asimptotic demicontractivi într-un spaţiu Hilbert. Vom utiliza următorul rezultat.

LEMA 2.2.3.90. *Fie* E *un spaţiu normat şi* K *o submulţime nevidă convexă a lui* E. *Fie* $T : K \to K$ *un operator uniform L-Lipschitzian şi* $G : K \times K \to K$ *un operator perturbare admisibilă, afin Lipschitzian cu constanta* $1 - \lambda$. *Pentru* λ *din intervalul* $[0, 1]$ *definim şirul* $\{x_n\}$ *pornind de la un punct iniţial arbitrar* $x_0 \in K$ *prin*

$$x_{n+1} = G\left(x_n, T^n x_n\right)$$

Notăm $c_n = \|T^n x_n - x_n\|$, $n \geq 0$.

Atunci $\|x_n - Tx_n\| \leq c_n + c_{n-1}\left[(1 - \lambda) + \lambda L\right]$

Demonstraţie: T este L-Lipschitzian aşadar există $L > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned}
\|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - T^n x_n\| + \|T^n x_n - Tx_n\| \\
&\leq \|x_n - T^n x_n\| + L\|T^{n-1}x_n - x_n\| \\
&\leq \|x_n - T^n x_n\| + L\|T^{n-1}x_n - T^{n-1}x_{n-1}\| + L\|T^{n-1}x_{n-1} - x_n\| \\
&\leq \|x_n - T^n x_n\| + L^2\|x_n - x_{n-1}\| + L\|T^{n-1}x_{n-1} - x_n\|
\end{aligned}$$

Operatorul G este afin Lipschitzian cu cosnstanta $(1 - \lambda)$ şi atunci avem

$$\begin{aligned}
\|T^{n-1}x_{n-1} - x_n\| &= \|G\left(T^{n-1}x_{n-1}, T^{n-1}x_{n-1}\right) - G\left(x_{n-1}, T^{n-1}x_{n-1}\right)\| \\
&\leq \|\left(1 - \lambda\right)\left(T^{n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\right) + \lambda\left(T^{n-1}x_{n-1} - T^{n-1}x_{n-1}\right)\| \\
&= \left(1 - \lambda\right)\|T^{n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\|,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_{n-1}\| &= \|G\left(x_{n-1}, T^{n-1}x_{n-1}\right) - G\left(x_{n-1}, x_{n-1}\right)\| \\
&\leq \|\left(1 - \lambda\right)\left(x_{n-1} - x_{n-1}\right) + \lambda\left(T^{n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\right)\| \\
&= \lambda\|T^{n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\|.
\end{aligned}$$

Astfel, obţinem

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - T^n x_n\| + \left[L^2\lambda + L(1-\lambda)\right]\|x_{n-1} - T^{n-1}x_{n-1}\| \\ &= c_n + c_{n-1}\cdot L\cdot\left[L^2\lambda + L(1-\lambda)\right].\end{aligned}$$ □

Fie X, Y spaţii Banach şi operatorul $T : D \subset X \longrightarrow Y$. Reamintim că operatorul T se numeşte *complet continuu* dacă el este continuu şi transformă o submulţime mărginită a lui D într-o submulţime relativ compactă a lui Y (o mulţime, Y, se numeşte relativ compactă dacă orice şir de elemente din mulţimea Y are subşiruri convergente). Rezultatul principal din această secţiune este dat în următoarea teoremă.

TEOREMA 2.2.3.91 ([**83**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert. Fie K o submulţime închisă, convexă şi mărginită a spaţiului $\mathcal{H}$ şi $T : K \to K$ un operator complet continuu, uniform L-Lipschitzian, asimptotic demicontractiv cu şirul $\{a_n\} \subseteq [1, \infty)$ care satisface $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n^2 - 1) < \infty$.*

Fie $G : K \times K \to K$ un operator perturbare admisibilă, afin Lipschitzian cu constanta $1-\lambda$, unde λ satisface condiţia $0 < \varepsilon \leq \lambda \leq 1 - k - \varepsilon$.

Atunci, şirul $\{x_n\}$ generat pornind de la un $x_0 \in K$ arbitrar, prin

$$x_{n+1} = G(x_n, T^n x_n) \tag{2.36}$$

converge tare către punctul fix al lui T.

Demonstraţie: Fie $x^* \in F(T)$. Atunci, folosind inegalităţile 1.11 pentru $q = 2$ şi 2.35 obţinem

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|G(x_n, T^n x_n) - G(x^*, x^*)\|^2 \\ &\leq \|(1-\lambda)(x_n - x^*) + \lambda(T^n x_n - x^*)\|^2 \\ &= \|x_n - x^* + \lambda T^n x_n\|^2 \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda\langle x_n - T^n x_n, j(x_n - x^*)\rangle + \lambda^2\|T^n x_n - x_n\|^2\end{aligned} \tag{2.37}$$

Se observă că

$$\langle x_n - T^n x_n, j(x_n - x^*)\rangle \geq \frac{1}{2}(1-k)\|x_n - T^n x_n\|^2 - \frac{1}{2}\left(a_n^2 - 1\right)\|x_n - x^*\|^2 \tag{2.38}$$

Folosind inegalitatea (2.38) în (2.37) obţinem:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| &\leq \|x_n - x^*\|^2 + \lambda^2\|T^n x_n - x_n\|^2 \\ &\quad - (1-k)\lambda\|x_n - T^n x_n\|^2 + (a_n^2 - 1)\lambda\|x_n - x^*\| \\ &= \|x_n - x^*\|^2 + \lambda(a_n^2 - 1)\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + \left[\lambda^2 - \lambda(1-k)\right]\|x_n - T^n x_n\|\end{aligned} \tag{2.39}$$

Condiţia $0 < \varepsilon \leq \lambda \leq 1 - k - \varepsilon$ implică faptul că

$$1 - k - \lambda \geq \varepsilon. \tag{2.40}$$

Putem alege

$$\lambda \geq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.41}$$

Mai mult, mărginirea mulţimii K implică faptul că $\|x_n - x^*\|^2 \leq M$ pentru orice $n \geq 0$ şi pentru o anumită valoare a constantei $M > 0$, astfel încât folosind (2.40) şi (2.41) în 2.39 obţinem

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\|x_n - T^n x_n\|^2 + \sigma_n,\ \forall n \geq N_0. \tag{2.42}$$

unde $\sigma_n = (a_n^2 - 1) \cdot \lambda \cdot M$
astfel încât

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{n=N_0}^{\infty} \|x_j - T^j x_j\|^2 \leq \|x_{N_0} - x^*\| + \sum_{n=N_0}^{\infty} \sigma_j \tag{2.43}$$

Condiţia $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 - 1) < \infty$ implică faptul că $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n - T^n x_n\|^2 < \infty$, astfel încât $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T^n x_n\|^2 = 0$. Aşadar folosind Lema 2.2.3.90 obţinem că

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \tag{2.44}$$

Cum T este complet continuu şi $\{x_n\}$ este mărginit, rezultă că $\{Tx_n\}$ are un subşir convergent $\left\{Tx_{n_j}\right\}_{j=0}^{\infty}$, astfel încât (2.44) implică faptul că $\{x_n\}$ are un subşir convergent $\left\{x_{n_j}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Fie $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = y^*$. Atunci din (2.44) obţinem că $y^* = Ty^*$ astfel încât y^* este un punct fix al operatorului T. Prin urmare, din (2.42) rezultă că

$$\|x_{n+1} - y^*\|^2 \leq \|x_n - y^*\|^2 + \sigma_n, \ n \geq N_0.$$

Cum $\{\|x_n - y^*\|\}$ are un subşir care converge la 0 şi $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n < \infty$, din Lema (1.1.1.51) rezultă că $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y^*\| = 0$, completând demonstraţia teoremei. □

Observaţia 2.2.3.92. *Pentru a obţine Teorema 2.2.3.91 am folosit ca prototip o teoremă din lucrarea* [**69**] *unde am înlocuit şirul* $\{a_n\}$ *din iteraţia Mann cu constanta* λ *şi prin urmare am putut folosi algoritmul GK, aşa cum a fost definit de către Rus în* [**73**]. *În cazul particular*

$$G(x, y) = (1 - \lambda)x + \lambda y,$$

Teorema 2.2.3.91 ne furnizează o teoremă de convergeţă pentru iteraţia Krasnoselskij.

Această teorema este similară cu rezultatul lui Qihou [**69**], *diferenţa constă în faptul că iteraţia Krasnoselskij din prezenta lucrare este înlocuită cu iteraţia Mann în* [**69**].

Observaţia 2.2.3.93. *Dacă operatorul* T *este doar demicontractiv, atunci din Teorema 2.2.3.91 obţinem teorema de convergenţă dată de Ţicală în* [**83**].

Teorema 2.2.3.94 ([**83**]). *Fie* K *o submulţime închisă, mărginită, convexă a unui spaţiu Hilbert* $\mathcal{H}$ *şi* $T : K \to K$ *un operator demicontractiv având coeficientul de demicontracţie* k *şi mulţimea punctelor fixe nevidă.*

Fie $G : K \times K \to K$ *un operator admisibil afin* $1 - \lambda$*-Lipschitzian, cu constanta* $\lambda < 1 - k$. *Atunci* $\liminf \|x_n - Tx_n\| = 0$ *pentru orice* $x_1 \in K$, *unde* x_{n+1} *este definit prin (2.22).*

Noţiunea de qvasi-neexpansivitate a fost introdusă de către Tricomi în 1916 [**19**] pentru o funcţie reală T definită pe un interval finit sau infinit (a, b) cu valori în acelaşi interval. El a demonstrat că şirul $\{x_n\}$ generat pornind de la un x_0 dat, din intervalul (a, b), folosind iteraţia $x_{n+1} = T(x_n)$, pentru $n > 0$, converge la un punct fix al operatorului T dacă T este continuu şi cvasi-neexpansiv pe (a, b). În 1975 Stepleman [**79**] a demonstrat că pentru a asigura convergenţa acestui şir este suficient ca a doua iteraţie a lui T să fie strict cvasi-neexpansivă.

Fie procesul iterativ Mann definit de şirul $\{x_n\}$ generat pornind de la punctul iniţial x_0 şi iteraţia dată de ecuaţia

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T x_n,\ n \geq 0. \tag{2.45}$$

Condiţia de demicontractivitate nu este suficientă pentru a asigura convergenţa iteraţiei Mann nici în spaţiile infinit dimensionale nici în cele finit dimensionale. De aceea, este necesar să impunem condiţii adiţionale asupra operatorului cum ar fi cea de continuitate sau de demi-închidere [**19**].

Definiţia 2.2.3.95 ([**19**]). *Fie $\{x_n\}$ un şir care îndeplineşte condiţiile:*

(i) *este slab convergent la x;*
(ii) *şirul asociat $\{Tx_n\}$ converge tare la y;*

Un operator T se numeşte demi-închis în y, dacă pentru orice şir care îndeplineşte condiţiile (i) şi (ii) avem că $T(x) = y$.

Deseori este folosită proprietatea de demi-închidere în 0, care este un caz particular obţinut pentru $y = 0$.

Clasa operatorilor care îndeplinesc condiţia (2.18) şi numele de demicontractivitate au fost introduse de Hick şi Kubicek în 1977 [**89**]. Ei au studiat proprietăţile de convergenţă ale şirului $\{x_n\}$ generat de un procedeu iterativ de tip Mann la un punct fix al operatorului T în spaţii Hilbert reale. Au demonstrat că dacă T este demicontractiv şi $I-T$ este demi-închis în 0, atunci şirul generat de iteraţia de tip Mann (2.45) converge slab la un punct fix al lui T. Şirul $\{b_n\}$ trebuie să îndeplinească condiţia $b_n \longrightarrow b$, $0 < t < k$, unde k este constanta de demicontracţie.

Aceeaşi condiţie de demicontractivitate a fost de asemenea prezentată de către Măruşter în 1977 [**56**], independent de Hicks şi Kubicek. Dacă $\mathcal{D}(T)$ (domeniul de definiţie al lui T) este o submulţime închisă convexă a unui spaţiu Hilbert $\mathcal{H}$, atunci definiţia dată de Măruşter este:

Definiţia 2.2.3.96 ([**56**]). *Operatorul T satisface condiţia (A) dacă mulţimea punctelor sale fixe, Fix(T), este nevidă şi dacă există un număr real pozitiv λ astfel încât*

$$\langle x - Tx, x - \xi\rangle \geq \lambda\|x - Tx\|^2,\ \forall x \in \mathcal{D}(T), \xi \in Fix(T) \tag{2.46}$$

Se verifică uşor echivalenţa dintre condiţia de demicontractivitate şi condiţia (A) în care $\lambda = (1 - k)/2$. În [**56**] a fost demonstrat acelaşi rezultat în condiţii mai generale asupra parametrului a_n decât cele ale lui Hicks şi Kubicek, mai precis, dacă T satisface condiţia (A) şi $I - T$ este demi-închis în 0, atunci şirul $\{x_n\}$ converge slab la un punct fix al lui T.

Clasa operatorilor asimptotic nonexpansivi a fost prezentată de Göebel şi Kirk [**34**] în 1972 şi în prezent mulţi autori revin asupra ei.

În 1998 Osilike [**59**] a demonstrat echivalenţa dintre condiţia de asimptotic demicontractivitate şi condiţia

$$\langle x - T^n x, x - x^\star\rangle \geq \frac{1}{2}(1 - k)\|x - T^n\|^2 - \frac{1}{2}(a_n - 1)\|x - x^\star\|^2. \tag{2.47}$$

În particular, când $a_n = 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, atunci condiţia este similară cu condiţia (A).

2.4. Ecuaţii variaţionale în termenii perturbării admisibile

Definiţia 2.2.4.97 ([**92**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert real şi K o submulţime nevidă, închisă, convexă a lui $\mathcal{H}$ cu produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ şi norma $\|\cdot\|$. Fie $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ o aplicaţie pe $\mathcal{H}$. Atunci, pentru un element fixat, b, din $\mathcal{H}$, problema găsirii unui element $x\in K$ astfel încât*

$$\langle Tx-b, y-x\rangle \geq 0\ \forall\ y\in\ K \tag{2.48}$$

se numeşte problema de inegalitate variaţională.

Aceasta poate fi prezentată ca problemă echivalentă cu cea a găsirii lui $x\in K$ astfel încât

$$b-Tx\in N_K(x), \tag{2.49}$$

unde $N_K(x)$ este conul normal la K în x definit prin:

$$N_K(x)=\{w:\langle w,y-x\rangle\leq 0 \text{ pentru orice } y\in K\}. \tag{2.50}$$

N_K este un con închis, convex care conţine originea.

Definiţia 2.2.4.98 ([**92**]). *Pentru operatorii $S,T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, problema determinării unui element x din K astfel încât*

$$\langle Sx-Tx, y-x\rangle \geq 0,\ \textit{pentru orice}\ y\in K, \tag{2.51}$$

se numeşte inegalitate variaţională tare neliniară (strongly nonlinear variational inequality - SNVI).

Observaţia 2.2.4.99. *Pentru $S=I$ (aplicaţia identitate) problema (2.51) se reduce la problema găsirii unui element x din K astfel încât*

$$\langle (I-T)\,x, y-x\rangle \geq 0\ \textit{pentru orice}\ y\ \textit{in}\ K. \tag{2.52}$$

În continuare dorim să prezentăm solvabilitatea problemei găsirii lui $x\in K$

$$\langle (I-G)\,x, y-x\rangle \geq 0 \text{ pentru orice } y \text{ in } K, \tag{2.53}$$

unde G este un operator perturbare admisibilă afin Lipschitzian asociat unui operator T, generalizat pseudocontractiv şi continuu Lipschitzian.

Rolul inegalităţilor variaţionale a fost cel de a caracteriza soluţiile a numeroase probleme ce apar în matematica aplicată, fizică, teoria controlului şi a optimizării, economie, inginerie şi altele. Există unele situaţii în care inegalităţile variaţionale pot fi reduse la probleme de complementaritate.

Complementaritatea este un concept strâns legat de inegalităţile variaţionale. Diverse probleme din programarea matematică, teoria jocurilor şi mecanică pot fi prezentate sub forma problemelor de complementaritate. Pentru mai multe detalii legate de inegalitaţile variaţionale se pot consulta lucările [**32**], [**33**], [**49**], [**57**], [**76**], [**91**].

În [**92**] Verma a prezentat solvabilitatea problemei *SNVI* (2.51) unde S este tare monotonă şi Lipschitz continuă şi T este generalizat pseudocontractivă şi Lipschitz continuă.

Definiţia 2.2.4.100 ([**9**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert cu produsul intern $\langle\cdot;\cdot\rangle$ şi norma $\|\cdot\|$. Un operator $T : H \to H$ se numeşte generalizat pseudocontractiv dacă există o constantă $k > 0$ astfel încât, pentru orice $x, y \in \mathcal{H}$,*

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq k^2 \|x - y\|^2 + \|Tx - Ty - k(x - y)\|^2 . \tag{2.54}$$

Teorema 2.2.4.101 ([**92**]). *Fie K o submulţime nevidă, închisă a unui spaţiu Hilbert real $\mathcal{H}$ şi fie $T : K \to \mathcal{H}$ un operator generalizat pseudocontractiv şi Lipschitz continuu cu constantele $k > 0$ respectiv $m > 0$. Fie $\{a_n\}$ un şir crescător în $[0, 1)$ astfel încât $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Atunci, pentru un anumit x_0 din K, şirul $\{x_n\}$ generat de algoritmul iterativ

$$x_{n+1} = (1 - a_n) x_n + a_n P_K [x_n - t(x_n - Tx_n)] \text{ pentru orice } n \geq 0, \tag{2.55}$$

unde $t > 0$ este arbitrar, converge la o soluţie a problemei SNVI (2.52) pentru

$$0 \leq M = \left((1 - t)^2 + 2t(1 - t)k + t^2 m^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

pentru orice t astfel încât $0 < t < 2(1 - k)/(1 - 2k + m^2)$ şi $k < 1$.

Verma a folosit o iteraţie de tip Krasnoselskij pentru soluţia problemei de punct fix $u = P_k [(1 - t) u + tTu]$.

În continuare vom stabili câteva teoreme de convergeţă mai generale decât cele stabilite de Verma, folosind metode iterative definite prin intermediul operatorului de perturbare admisibilă a unui operator.

Aceste tehnici au fost folosite de Berinde în [**8**], [**9**], [**11**], [**10**] la studiul operatorilor neliniari, generalizat pseudocontractivi, operatori care invariază domeniu de definiţie şi la studiul operatorilor pseudocontractivi.

Avem nevoie de următoarele rezultate ajutătoare.

Lema 2.2.4.102 ([**49**]). *Fie K o submulţime nevidă, închisă, convexă a lui $\mathcal{H}$ şi P_K proiecţia spaţiului $\mathcal{H}$ pe K. Atunci pentru un anumit element z din $\mathcal{H}$, există un element x din K satisfăcând*

$$\langle x - z, y - x\rangle \geq 0, \text{ for all } y \in K \tag{2.56}$$

dacă şi numai dacă

$$x = P_K z. \tag{2.57}$$

Teorema 2.2.4.103 ([**81**]). *Un element x din K este soluţie pentru problema (2.53) dacă şi numai dacă este soluţie a problemei de punct fix*

$$x = P_K [x - t(x - Gx)] . \tag{2.58}$$

Demonstraţie: Dacă u este soluţie a problemei (2.53) atunci

$$\langle u - Gu, y - u\rangle \geq 0, \text{ pentru orice } y \in K$$

şi deci, pentru orice $t \geq 0$ avem

$$\langle u - (u - t\,(u - Gu))\,, y - u \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } \; y \in K.$$

Acum, folosind Lema 2.2.4.102 obţinem

$$u = P_K\,[u - t\,(u - Gu)]\,.$$

Invers, dacă u satisface (2.58), atunci avem

$$u = P_K\,[u - t\,(u - Gu)]$$

şi din Lema 2.2.4.102 rezultă că

$$\langle u - (u - t\,(u - Gu))\,, y - u \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } \; y \in K.$$

Cum $t > 0$, constatăm că

$$\langle u - Gu, y - u \rangle \geq 0, \quad \text{pentru orice } \; y \in K.$$

□

Teorema 2.2.4.104 ([**81**]). *Fie K o submulţime nevidă, închisă, convexă a unui spaţiu real Hilbert $\mathcal{H}$ şi fie $T : K \to \mathcal{H}$ un operator generalizat pseudocontractiv şi Lipschitz continuu cu constantele $k > 0$, respectiv $m > 0$. Fie λ o constantă din intervalul $[0, 1)$. Presupunem că $G : K \times K \to K$, operatorul perturbare admisibilă asociat lui T, este afin Lipschitzian cu constanta $1 - \mu$.*

Atunci, există $x_0 \in K$, pentru care şirul $\{x_n\}$ generat de algoritmul iterativ

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)\,x_n + \lambda P_K\,[x_n - t\,(x_n - Gx_n)]\,, n \geq 0, \tag{2.59}$$

unde t este arbitrar, converge la o soluţie a problemei (2.53) dacă

$$0 \leq M = \left((1 - \mu)^2 + 2\mu\,(1 - \mu)\,k + \mu^2 m^2\right)^{1/2} < 1,$$

pentru orice $t \in [0, 1)$.

Demonstraţie: Fie u o soluţie a problemei (2.53). Atunci, conform Teoremei 2.2.4.103, u are forma

$$u = P_K\,[u - t\,(u - Gu)]$$

Avem

$$\|x_{n+1} - u\| = \|(1 - \lambda)\,(x_n - u) + \lambda\,(P_K\,[x_n - t\,(x_n - Gx_n)] - P_K\,[u - t\,(u - Gu)])\,\|$$

Cum P_K este neexpansiv obţinem că

$$\|x_{n+1} - u\| \leq (1 - \lambda)\|\,(x_n - u)\,\| + \lambda\|x_n - t\,(x_n - Gx_n) - u + t\,(u - Gu)\,\|$$

$$\leq (1 - \lambda)\,\|x_n - u\| + \lambda\,(1 - t)\,\|x_n - u\| + \lambda t\|Gx_n - Gu\|.$$

De asemenea avem:

$$\|Gx_n - Gu\|^2 = \|G\,(x_n, Tx_n) - G\,(u, Tu)\,\|^2 \leq \|\,(1 - \mu)\,(x_n - u) - \mu\,(Tx_n - Tu)\,\|^2$$
$$= (1 - \mu)^2\,\|x_n - u\|^2 + 2\mu\,(1 - \mu)\,\langle Tx_n - Tu, x_n - u\rangle + \mu^2\|Tx_n - Tu\|^2$$

Aplicând pseudocontractivitatea generalizată şi continuitatea Lipschitz a lui T rezultă că:

$$\|Gx_n - Gu\|^2 \leq \left((1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)k + \mu^2 m^2\right)\|x_n - u\|^2.$$

În continuare, avem:

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - u\| \leq [1 + \lambda(1-t) + \lambda t M]\|x_n - u\| \\
&= (1 - (1-M)\lambda t)\|x_n - u\| \\
&\leq \textstyle\prod_{j=0}^{n}(1 - (1-M)\lambda t)\|x_0 - u\|,
\end{aligned}$$

unde

$$M = \left((1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)k + \mu^2 m^2\right)^{1/2} < 1,$$

pentru orice μ astfel încât

$$0 < \mu < 2(1-k)(1-2k_m^2).$$

Întrucât $\lambda < 1$ şi $M < 1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n}(1 - (1-M)\lambda t) = 0.$$

Prin urmare $\{x_n\}$ converge tare la u. □

OBSERVAŢIA 2.2.4.105. *Menţionăm următoarele două cazuri particulare importante:*
1) Dacă $G(x,y) = Tx$ atunci Teorema 2.2.4.103 se reduce la Teorema 2.2.4.101.
2) Dacă

$$G(x,y) = (1-\lambda)x + \lambda Tu$$

atunci algoritmul din teorema de mai sus devine

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda P_K[x_n - t\lambda(x_n - Tx_n)].$$

2.5. Teoremă de convergenţă slabă pentru iteraţia de tip Krasnoselskij folosind perturbări admisibile în spaţii Hilbert

În 2007, Aoyama et al. [**2**] au demonstrat o teoremă de convergenţă tare a iteraţiei Halpern pentru găsirea unui punct fix comun al unei mulţimi numărabile de aplicaţii neexpansive, teoremă prezentată în continuare

TEOREMA 2.2.5.106 ([**2**]). *Fie $x_1 = x \in K$ şi*

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)T_n x_n, \tag{2.60}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde K este o submulţime nevidă, închisă, convexă a unui spaţiu Banach, $\{\alpha_n\}$ este un şir din $[0,1]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ şi T_n este o familie de aplicaţii neexpansive ale lui K în ea însăşi astfel încât $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)$ este nevidă, care satisface condiţia AKTT, adică,

$$\sum_{n=1}^{\infty} sup\{\|T_{n+1}z - T_n z\| : z \in K\} < \infty. \tag{2.61}$$

Dacă are loc

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ *sau*

ii) $\alpha_n \in (0, 1]$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 1$,

atunci şirul $\{x_n\}$ *definit prin (2.60) converge tare la* Q_x *unde* Q *este retracţie neexpansivă sunny a mulţimii* K *la* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)$.

Observaţia 2.2.5.107. *Fie* K *o submulţime a unui spaţiu Banach,* D *o submulţime a mulţimii* K *şi aplicaţia* $Q : K \to D$*. Atunci* Q *este sunny dacă*

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

are loc pentru $Qx + t(x - Qx) \in K$ *şi* $t \geq 0$*. O aplicaţie* $Q : K \to K$ *este retracţie dacă* $Q^2 = Q$*. O submulţime* D *a mulţimii* C *este o retracţie neexpansivă sunny dacă există o retracţie neexpansivă a mulţimii* K *la* D*.*

În 2008, Kohsaka şi Takahashi [**51**] au prezentat noţiunea de aplicaţie nonspreading definită pe o submulţime nevidă închisă şi convexă K a unui spaţiu Banach neted strict convex şi reflexiv E cu valori în aceeaşi mulţime K, ca fiind neliniară şi satisfăcând câteva condiţii de contractivitate.

În cazul special în care E este spaţiu Hilbert $S : K \to K$ se numeşte nonspreading dacă

$$2\|Sx - Sy\|^2 \leq \|Sx - y\|^2 + \|x - Sy\|^2, \tag{2.62}$$

pentru orice $x, y \in K$.

Aplicaţiile *ferm neexpansive* au fost definite pentru prima dată de către Browder, deşi le-a numit *ferm contractive*.

Definiţia 2.2.5.108 ([**3**]). *Fie* K *o submulţime închisă şi convexă a unui spaţiu Hilbert* $\mathcal{H}$*. O aplicaţie* $T : C \to \mathcal{H}$ *se numeşte ferm neexpansivă dacă pentru orice* $x, y \in C$

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty\rangle. \tag{2.63}$$

Pentru a demonstra rezultatele din această secţiune avem nevoie de următoarele leme date de Iemoto şi Takahashi [**43**].

Lema 2.2.5.109 ([**43**]). *Fie* $\mathcal{H}$ *un spaţiu Hilbert,* K *o mulţime convexă închisă a lui* $\mathcal{H}$*, şi* $S : K \to K$ *o aplicaţie nonspreading pentru care* $Fix(S) \neq \phi$*. Atunci* S *este semiînchisă în* 0*, adică* $x_n \rightharpoonup u$ *şi* $x_n - Sx_n \to 0$ *implică* $u \in Fix(S)$*.*

Lema 2.2.5.110 ([**43**]). *Fie* $\mathcal{H}$ *un spaţiu Hilbert,* K *o mulţime nevidă, convexă, închisă a spaţiului* $\mathcal{H}$ *şi fie* S *o aplicaţie nonspreading a lui* K *în ea însăşi şi fie* $A = I - S$*. Atunci*

$$\|Ax - Ay\|^2 \leq \langle x - y, Ax - Ay\rangle + \frac{1}{2}\left(\|Ax\|^2 + \|Ax\|^2\right).$$

Plubtieng şi Chornphrom în lucrarea [**67**] au demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 2.2.5.111 ([**67**]). *Fie* $\mathcal{H}$ *un spaţiu Hilbert real şi fie* K *o mulţime nevidă, închisă convexă a lui* $\mathcal{H}$*. Fie* S *o aplicaţie nonspreading a mulţimii* K *în ea însăşi şi fie* $\{T_n\}$ *un şir de* *aplicaţii ferm neexpansive ale mulţimii K în ea însăşi care îndeplineşte condiţia AKTT astfel încât $Fix(S)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(T_n)\right)$ este nevidă. Fie $\{\alpha_n\}\subset[a,b]$ pentru anumiţi $a,b\in(0,1)$.*

Presupunem ca $Fix(T)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(Tn)$, unde $T:K\to K$ este aplicaţia definită prin $Ty=\lim\limits_{n\to\infty}T_ny$ pentru orice $y\in K$.

Fie x_n un şir definit prin $x_0=x\in K$ şi $x_{n+1}=\alpha_nx_n+(1-\alpha_n)\,ST_nx_n, n\geq 0$.

Atunci $\{x_n\}$ converge slab la $\hat{z}\in Fix(S)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(Tn)\right)$.

Pentru obţinerea unui rezultat folosind operatorul perturbare admisibilă am adus câteva îmbunătăţiri teoremei anterioare. Modificările sunt: mai întâi înlocuim şirul $\{\alpha_n\}\subset[a,b]\subset(0,1)$ cu constanta $\alpha\in(0,1)$; apoi înlocuim şirul $\{x_n\}$ din concluzia teoremei cu şirul $\{x_n\}$ definit prin x_0 şi $x_n=G\left(x_n,STx_n\right)$, unde G este operatorul perturbare admisibilă.

TEOREMA 2.2.5.112 ([**82**]). *Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert real şi K o mulţime nevidă convexă închisă a lui $\mathcal{H}$. Fie $S:K\to K$ o aplicaţie nonspreading şi fie $\{T_n\}$ un şir de aplicaţii ferm neexpansive ale lui K în ea însăşi astfel încât $Fix(S)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(T_n)\right)$ este nevidă. Fie $\alpha\in(0,1)$.*

Presupunem că $\{T_n\}$ satisface condiţia AKTT şi că T este o aplicaţie a mulţimii K cu valori în ea însăşi definită prin $Ty=\lim\limits_{n\to\infty}T_ny$ pentru orice $y\in K$ şi presupunem că $Fix(T)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(T_n)$.

Fie $G:K\times K\to K$ un operator perturbare admisibilă care este afin Lipschitzian cu constanta $\alpha\in[0,1]$. Fie $\{x_n\}$ un şir definit prin $x_0=x\in K$ şi

$$x_{n+1}=G\left(x_n,ST_nx_n\right),n\geq 0. \tag{2.64}$$

Atunci $\{x_n\}$ converge slab la $\hat{z}\in Fix(S)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(T_n)\right)$.

Demonstraţie: Luăm un punct $v\in Fix(S)\bigcap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}Fix(T_n)\right)$ şi notăm $y_n=T_nx_n$. Vom arăta că şirul $\{x_n\}$ este mărginit. Din faptul că v este punct fix al aplicaţiei nonspreading S se deduce imediat că

$$\|Sy_n-v\|\leq\|y_n-v\|=\|T_nx_n-v\|\leq\|x_n-v\|.$$

Vom obţine:

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-v\|^2 &= \|G\left(x_n,Sy_n\right)-G\left(v,v\right)\|^2\\
&\leq\|\alpha\left(x_n-v\right)+(1-\alpha)\left(Sy_n-v\right)\|^2\\
&=\alpha\|x_n-v\|^2+(1-\alpha)\|Sy_n-x_n\|^2-\alpha\left(1-\alpha\right)\|Sy_n-v\|^2\\
&\leq\alpha\|x_n-v\|^2+(1-\alpha)\|y_n-x_n\|^2-\alpha\left(1-\alpha\right)\|Sy_n-v\|^2\\
&=\|x_n-v\|^2-\alpha\left(1-\alpha\right)\|Sy_n-x_n\|^2\\
&\leq\|x_n-v\|^2.
\end{aligned}$$

Prin urmare $\{\|x_{n+1}-v\|\}$ este un şir descrescător şi deci limita $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-v\|$ există. De aici rezultă că $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ şi $\{Sy_n\}$ sunt mărginite. Deoarece $\{T_n\}$ este ferm neexpansiv, urmează că

$$\begin{aligned}\|T_nx_n - v\|^2 &= \|T_nx_n - T_nv\|^2\\ &\le \langle x_n - v, T_nx_n - v\rangle\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\|x_n - v\|^2 + \|T_nx_n - v\|^2 - \|x_n - T_nx_n\|^2\right),\end{aligned}$$

pentru orice $v \in Fix(S) \bigcap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)\right)$ şi prin urmare

$$\|T_nx_n - v\|^2 \le \|x_n - v\|^2 - \|x_n - T_nx_n\|^2.$$

Aşadar, avem:

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - v\|^2 &= \|\alpha\,(x_n - v) + (1-\alpha)\,(Sy_n - T_nx_n)\,\|^2\\ &\le \alpha\|x_n - v\|^2 + (1-\alpha)\,\|Sy_n - v\|^2\\ &\le \alpha\|x_n - v\|^2 + (1-\alpha)\,\|y_n - v\|^2\\ &= \alpha\|x_n - v\|^2 + (1-\alpha)\,\|T_nx_n - v\|^2\\ &\le \alpha\|x_n - v\|^2 + (1-\alpha)\,(\|x_n - v\|^2 - \|x_n - T_nx_n\|^2).\end{aligned}$$

Obţinem că

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\,\|x_n - T_nx_n\|^2 &\le \alpha\|x_n - v\|^2 + \|\,(1-\alpha)\,\|x_n - v\|^2 - \|x_{n+1} - v\|^2\\ &= \|x_n - v\|^2 - \|x_{n+1} - v\|^2.\end{aligned}$$

Cum $0 < \alpha < 1$ şi $\lim_{n\to\infty}\|x_n - v\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - v\|^2$ rezultă că

$$\|x_n - T_nx_n\| = \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Notăm $A_n = I - ST_n$. Din $A_nv = 0$ rezultă folosind Lema 2.2.5.110 că

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - v\|^2 &= \|\alpha\,(x_n - v) - (1-\alpha)\,(Sy_n - v)\,\|^2\\ &= \|\alpha x_n + (1-\alpha)\,Sy_n - v\|^2\\ &= \|x_n - v - (1-\alpha)\,(x_n - ST_nx_n)\,\|^2\\ &= \|x_n - (1-\alpha)\,A_nx_n\|^2\\ &= \|x_n - v\|^2 - 2\,(1-\alpha)\,\langle x_n - v, A_nx_n - A_nv\rangle + (1-\alpha)^2\,\|A_nx_n\|^2\\ &\le \|x_n - v\|^2 - 2\,(1-\alpha)\left\{\|A_nx_n - A_nv\|^2 - \tfrac{1}{2}\,(\|A_nx_n\|^2 + \|A_nv\|^2)\right\}\\ &\quad + (1-\alpha)^2\,\|A_nx_n\|^2\\ &= \|x_n - v\|^2 - (1-\alpha)\,\|A_nx_n\|^2 + (1-\alpha)\,\|A_nx_n\|^2\\ &= \|x_n - v\|^2 - \alpha\,(1-\alpha)\,\|A_nx_n\|^2\end{aligned}$$

şi prin urmare

$$\alpha\,(1-\alpha)\,\|A_nx_n\|^2 \le \|x_n - v\|^2 - \|x_{n+1} - v\|^2$$

Deoarece $\alpha\,(1-\alpha) > 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\|A_nx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n - ST_nx_n\| = 0.$$

Aşadar, urmează că

$$\begin{aligned}\|y_n - Sy_n\| &= \|T_nx_n - ST_nx_n\|\\ &= \|T_nx_n - x_n + x_n - ST_nx_n\|\\ &\le \|T_nx_n - x_n\| + \|x_n - ST_nx_n\| \to 0 \text{ când } n \to \infty\end{aligned}$$

Cum $\{y_n\}$ este mărginit, există un subşir $\{y_{n_j}\}$ al lui $\{y_{n_i}\}$ care va converge slab la un anumit $\hat{z} \in K$.

Putem presupune că $y_{n_i} \rightharpoonup \hat{z}$ fără a pierde caracterul general al demonstraţiei. Conform Lemei 2.2.5.109, avem $\hat{z} \in Fix(S)$. Din $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \to 0$ şi $y_{n_i} \rightharpoonup \hat{z}$ obţinem că $x_{n_i} \rightharpoonup \hat{z}$.

Vom arăta că $\hat{z} \in Fix(T)$.

Din $\lim_{n\to\infty} \|T_n x_n - x_n\| \to 0$ şi condiţiile AKTT, rezultă că

$\|Tx_n - x_n\| \leq \|Tx_n - T_n x_n\| - \|T_n x_n - x_n\| \to 0.$

Presupunem $\hat{z} \notin Fix(T)$. Cum $x_{n_i} \rightharpoonup \hat{z}$ şi $\hat{z} \neq T\hat{z}$, din condiţia Opial, avem

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - \hat{z}\| &< \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - T\hat{z}\| \\ &\leq \liminf_{i\to\infty} \{\|x_{n_i} - Tx_{n_i}\| + \|Tx_{n_i} - T\hat{z}\|\}.\end{aligned}$$

Dar $\|x_{n_i} - Tx_n\| \to 0$, şi prin urmare $\liminf\limits_{i\to\infty} \|x_{n_i} - \hat{z}\| < \liminf\limits_{i\to\infty} \|Tx_{n_i} - T\hat{z}\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n - \hat{z}\|$, obţinem o contradicţie.

Astfel, obţinem $\hat{z} \in Fix(T)$. Deci $\hat{z} \in Fix(S) \bigcap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)\right)$. Fie $\{x_{n_k}\}$ un alt subşir al lui $\{x_n\}$ astfel încât $\{x_{n_k}\}$ converge slab la $\tilde{z}$.

Arătăm acum că $\hat{z} = \tilde{z}$. Presupunem, prin absurd, că $\hat{z} \neq \tilde{z}$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} \|x_n - v\|$ există, pentru orice $v \in Fix(S) \bigcap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)\right)$, din condiţia lui Opial rezultă că

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{z}\| &= \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - \hat{z}\| < \liminf_{i\to\infty} \|x_{n_i} - \tilde{z}\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n - \tilde{z}\| = \liminf_{k\to\infty} \|x_{n_k} - \tilde{z}\| \\ &< \liminf_{k\to\infty} \|x_{n_k} - \hat{z}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{z}\|.\end{aligned}$$

Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{z}\| < \lim_{n\to\infty} \|x_n - \hat{z}\|,$$

contradicţie.

Deci, avem că $\hat{z} = \tilde{z}$. De aici rezultă că $\{x_n\}$ converge slab la $\hat{z} \in Fix(S) \bigcap \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Fix(T_n)\right)$.

□

2.6. Concluzii

În acest capitol au fost prezentate câteva teoreme de convergenţă pentru operatori demicontractivi, asimptotic demicontractivi, neexpansivi, respectiv o problemă de inegalităţi variaţionale, toate în termenii perturbărilor admisibile, pentru iteraţia Krasnoselskij.

Rezultatele originale din acest capitol sunt :

- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.2.80 şi teorema Teorema 2.2.2.84 în care se stabileşte convergenţa slabă a şirului generat de perturbarea admisibilă a unui operator demicontractiv la un punct fix al operatorului demicontractiv.
- Am enunţat Corolarul 2.2.2.82 şi Corolarul 2.2.2.83 referitoare la convergenţa şirului generat de iteraţia Krasnoselskij a perturbării admisibile a unui operator demicontractiv definit într-un spaţiu Hilbert.
- Am enunţat şi demonstrat Lema 2.2.3.90 referitoare la mărginirea şirului generat de perturbarea admisibilă a unui operator L - Lipschitzian definit într-un spaţiu normat.
- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.3.91 referitoare la tare convergenţa perturbării admisibile a operatorilor asimptotic demicontractivi.

- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.4.103 şi Teorema 2.2.4.104 referitoare la soluţia unei probleme de inegalităţi variaţionale.
- Am enunţat şi demonstrat Teorema 2.2.5.112 care priveşte convergenţa slabă perturbării admisibile aplicate compunerii unui operator nonspreading cu operatori ferm neexpansivi.

Voi continua activitatea de cercetare pe aceasta linie ştiintifică ce va include perturbări admisibile pentru diverse clase de operatori, folosind mai întâi iteraţia Mann şi apoi iteraţia Ishikawa.

CAPITOLUL 3

Procesarea imaginilor folosind colonii de furnici

3.1. Introducere

Un mare număr de cercetători lucrează în zilele noastre în Procesarea Imaginilor. Această ramură a matematicii aplicate este folosită într-un domeniu vast al domeniilor din viaţa de zi cu zi cum ar fi industria, economia, medicina etc. În particular, procesarea imaginilor în medicină este frecvent folosită, de exemplu în tomografie şi este menită să rezolve problemele medicale ale pacienţilor.

Reconstrucţia iterativă a imaginilor se referă la algoritmii iterativi care reconstruiesc imagini bidimensionale şi tridimensionale în anumite tehnici de imagistică. De exemplu, la tomografie imaginea trebuie reconstruită din proiecţii printr-un obiect. Reconstrucţia iterativă furnizează imagini mai bune decât metoda *Filtered Back Projection (FBP)*. Pe de altă parte, reconstrucţia iterativă este mai costisitoare din punct de vedere computaţional decât FBP, la care se calculează valorile pixelilor direct, într-un singur pas de reconstrucţie.

Capitolul 3 ilustrează principalii algoritmi folosiţi pentru reconstrucţia imaginilor, inclusiv algoritmi inspiraţi din natură, algoritmi bazaţi pe colonii de furnici.

3.2. Tehnologii de ultimă generaţie în procesarea imaginilor

În 1917, matematicianul austriac Johann Radon a prezentat trasformarea Radon [**70**]. Radon a demonstrat matematic că o funcţie poate fi reconstituită dintr-o mulţime finită de proiecţii. În 1937 matematicianul polonez Stefan Kaczmarz, a dezvoltat o metodă pentru a găsi o soluţie aproximativă pentru un sistem de ecuaţii algebrice de dimensiune mare. Datorită teoriei matematice care stă la baza transformării Radon şi a algoritmului Kaczmarz a devenit posibilă reconstrucţia tomografică a imaginilor. Algoritmul lui Kaczmarz a condus la o alta metodă puternică de reconstrucţie numită *Tehnica Reconstrucţiei Algebrice - Algebraic Reconstruction Technique (ART)*. *ART* a fost adaptată de către Sir Godfrey Hounsfield şi a fost folosită ca metodă de reconstrucţie a imaginii la primul computer tomograf comercial.

Algoritmii ce mimează comportamentul furnicilor reale la găsirea celui mai scurt drum dintre adăpost şi hrană folosind ca informaţie o urmă de substanţă chimică, numită feromon, depozitată de alte furnici, au fost aplicaţi cu succes la rezolvarea mai multor probleme de optimizare.

În aceşti algoritmi, membrii unei colonii de furnici artificiale cooperează la rezolvarea problemei considerate, printr-un efort comun. În informatică şi cercetări operaţionale, algoritmii de optimizare ce folosesc colonii de furnici (*Ant Colony Optimization - ACO*) reprezintă o tehnică probabilistică pentru rezolvarea de probleme de optimizare combinatorială ce pot fi reduse la găsirea unor drumuri optime în grafuri.

Algoritmul a fost propus de Marco Dorigo în 1992, în teza sa de doctorat. De atunci au fost elaborate un număr impresionant de lucrări ce studiază optimizarea folosind colonii de furnici.

Algoritmii de optimizare cu colonii de furnici au fost aprofundaţi de Marco Dorigo în lucrări cum ar fi [**12**],[**27**],[**28**]. Printre alţi cercetători care au studiat, de asemenea, algoritmii *ACO*, amintim Cerello [**18**], Katteda [**47**], Schrijver [**75**], Pop şi Pintea [**20, 22, 63, 64, 65**].

La începutul cercetării în acest domeniu am studiat diverse tehnici de reconstrucţie a imaginilor pornind de la datele furnizate de aparatura de imagistică medicală, de exemplu computerul tomograf. Pe parcursul cercetării am descoperit ca tehnicile de reconstrucţie a imaginilor au fost combinate cu succes diverse euristici, tehnici bio-inspirate, inclusiv bazate pe colonii de furnici artificiale.

Pornind de la aceste premise, am realizat o sinteză inclusă într-un capitol de carte indexat în Web of Science ca ISI Proceedings, publicat [**66**] ce prezintă cele mai interesante metode de reconstrucţie ale imaginilor, în particular a imaginilor medicale. Lucrarea [**66**] mai cuprinde şi un scurt istoric al metodelor de segmentare şi de determinare a conturului imaginilor cu ajutorul coloniilor de furnici.

În descriere matematică, formularea algebrică este cea mai utilizată pentru problema reconstrucţiei imaginilor în tomografie.

Astfel, problema reconstrucţiei imaginilor în tomografie revine la problema rezolvării unui sistem algebric liniar de dimensiuni mari: $Ax = b$. Aceasta se face prin metode iterative (aproximative).

$$b_i = \sum_{j=1}^{J} A_{ij} x_j \tag{3.65}$$

Algoritmul Kaczmarz

În [**68**] se consideră sistemul menţionat anterior $Ax = b$. Fie A o matrice inversabilă de dimensiune $J \times J$ şi b un vector coloană de dimensiune J. Fie $x^* = b \cdot A^{-1}$ soluţia unică a sistemului de mai sus. Normalizăm ecuaţiile sale după cum urmează în ecuaţia (3.66) prin procedura de scalare descrisă în ecuaţia (3.67).

$$\|A_i\|^2 = \sum_{m=1}^{J} A_{ij}^2 = 1, \tag{3.66}$$

$$D^{-1}Ax = D^{-1}b, \quad \text{cu } D = diag\left(\|A_1\|, \ldots, \|A_J\|\right). \tag{3.67}$$

Pentru aproximarea iniţială x_0 din ecuaţia (3.68) definim succesiv $x^{(0,1)}, \ldots, x^{(0,J)} \in \mathbb{R}^J$ dat de ecuaţia (3.69).

$$x_0 = \left(x_1^{(0,0)}, x_2^{(0,0)}, \ldots x_J^{(0,0)}\right) \in \mathbb{R}^J \tag{3.68}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(0,1)} = x^{(0,0)} - \left[\left\langle x^{(0,0)}, A_1\right\rangle - b_1\right] A_1 \\ x^{(0,2)} = x^{(0,1)} - \left[\left\langle x^{(0,1)}, A_2\right\rangle - b_2\right] A_2 \\ \vdots \\ x^{(0,J)} = x^{(0,J-1)} - \left[\left\langle x^{(0,J-1)}, A_J\right\rangle - b_J\right] A_J \end{array}\right. \tag{3.69}$$

Atunci, pentru $r \geq 0$ arbitrar şi o aproximare dată $x^{(r,J)} \in \mathbb{R}^J$ sunt construite succesiv următoarele aproximări: $x^{(r+1,1)}, \ldots, x^{(r+1,J)} \in \mathbb{R}^J$ aşa cum se arată în ecuaţia (3.70), unde $x^{r+1,0} = x^{r,J}$.

$$x^{(r+1,i)} = x^{(r+1,i-1)} - \left[\left\langle x^{(r+1,i-1)}, A_i\right\rangle - b_i\right] A_i, \text{ pentru orice } i = 1, \ldots J. \tag{3.70}$$

Tehnica reconstrucţiei algebrice

Problema algebrică a reconstrucţiei imaginilor în tomografie este de a rezolva un sistem de ecuaţii liniare ($Ax = b$), printr-o metodă simplă, *metoda reconstrucţiei algebrice - Algebraic Reconstruction Technique (ART)*. Modelul *ART* a fost prezentat de Gordon, Bender şi Herman [**36**] ca metodă de reconstrucţie a imaginii în tomografia de transmisie şi este un caz special al algoritmului lui Kaczmarz.

Fie L_i mulţimea pixelilor de indice j pentru care pixelul j intersectează segmentul i, şi fie $|L_i|$ cardinalul acestei mulţimi. Fie $A_{ij} = 1$ pentru j din L_i şi $A_{ij} = 0$ în caz contrar. Cu $i = k\,(mod\ I) + 1$, pasul iterativ al algoritmului ART are la bază ecuaţia (3.71).

$$x_j^{k+1} = \left\{\begin{array}{l} x_j^k + \frac{1}{|L_i|}\left(b_i - \left(Ax^k\right)_i\right), j \in L_i \\ x_j^k, j \notin L_i \end{array}\right. , \tag{3.71}$$

unde $k\,(mod\ I)$ este restul împărţirii lui k la I. La fiecare pas al algoritmului considerăm eroarea $b_i - \left(Ax^k\right)_i$, asociată cu x_k curent şi ecuaţia i, şi o distribuim egal pentru fiecare pixel ce intersectează L_i.

Metoda *ART* poate fi considerată ca o metodă iterativă pentru rezolvarea un sistem liniar, arbitrar, de ecuaţii, $Ax = b$. Fie A o matrice cu elemente numere complexe, cu I linii şi J coloane, şi fie b un vector coloană cu I componente. Vrem să rezolvăm sistemul $Ax = b$. Pentru fiecare indice i fie H_i hiperplanul de vectori J-dimensionali dat în ecuaţia (3.72) şi P_i operatorul proiecţie ortogonală pe H_i:

$$H_i = \{x|\left(Ax\right)_i = b_i\}. \tag{3.72}$$

Fie x_0 arbitrar; pentru fiecare număr natural k, fie $i(k) = k\,(mod\ I) + 1$ atunci pasul iterativ al algoritmului ART este dat de ecuaţia (3.73):

$$x^{k+1} = P_{i(k)}x^k. \tag{3.73}$$

Fiind dat un vector oarecare z, cel mai apropiat vector de z din H_i, in sensul distanţei euclidiene, are componentele date de ecuaţia (3.74):

$$x_j = z_j + \overline{A_{ij}} \left(b_i - (Az)_i\right) / \sum_{m=1}^{J} |A_{im}|^2 . \tag{3.74}$$

Când sistemul $Ax = b$ are soluţie exactă algoritmul ART converge către soluţia cea mai apropiată (în sensul normei euclidiene) de x_0. Viteza de convergenţă a algoritmului va depinde de modul de ordonare al ecuaţiilor din sistem. Este importantă evitarea ordonării eronate, în care hiperplanele H_i şi H_{i+1} sunt aproape paralele [**16**].

Algoritmul Landweber

Algoritmul Landweber [**16**] cu pasul iterativ dat de ecuaţia (3.75) converge la soluţia dată de metoda celor mai mici pătrate, soluţia cea mai apropiată de vectorul inţial x^0. Valoarea furnizată $0 < \gamma < 2/\lambda_{max}$ este cea mai mare valoare proprie a matricei pozitiv-definită $A^\dagger A$, unde $A^\dagger$ reprezintă conjugata transpusei matricii A.

$$x^{k+1} = x^k + \gamma A^\dagger \left(b - Ax^k\right) \tag{3.75}$$

Algoritmii EMML şi SMART

Algoritmii *Expectation Maximization Maximum Likelihood (EMML)*, *ART simultan multiplicativă (Simultaneous Multiplicative ART - SMART)* şi metodele *"rescaled" iterative pe blocuri (Rescaled Block - Iterative - RBI)* au la bază o distanţa dintre vectori nenegativi numită distanţa *Kullback-Leibler (KL)* [**16**]. Pentru $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$ distanţa *Kullback-Leibler* de la α la β este dată de ecuaţia (3.76) unde $KL(\alpha, 0) = +\infty$, şi $KL(0, \beta) = \beta$.

$$KL(\alpha, \beta) = \alpha \log \frac{\alpha}{\beta} + \beta - \alpha. \tag{3.76}$$

Se poate face extindere la vectori nenegativi orientaţi astfel încât ecuaţia (3.77) este corectă.

$$KL(x, z) = \sum_{j=1}^{J} KL(x_j, z_j). \tag{3.77}$$

Spre deosebire de *distanţa euclidiană*, *distanţa KL* nu este simetrică. Având la bază minimizarea celor două distanţe $KL(Ax; b)$ şi $KL(b; Ax)$ în raport cu vectorul x se găsesc două soluţii aproximative ale sistemului $Ax = b$.

Algoritmul *EMML* minimizează distanţa $KL(b, Ax)$, în timp ce *(SMART)* minimizează $KL(Ax, b)$ [**15**]. Aceste metode sunt dezvoltate în principal pentru a fi aplicate la reconstrucţia imaginilor tomografice, deşi pot fi folosite în mult mai multe domenii. În cazurile în care există soluţii nenegative pentru sistemul $Ax = b$, algoritmul *SMART* converge la soluţia nenegativă ce minimizează $KL(x, x_0)$; algoritmul *EMML* converge de asemenea la o soluţie nenegativă, dar nu există o descriere explicită a soluţiei.

3.3. Metoda Colonilor de Furnici cu modele de procesare a imaginilor medicale

3.3.1. Ant Colony Optimization-ACO: Tehnica coloniilor de furnici

Metaeuristica *ACO* foloseşte furnici artificiale pentru a construi soluţia optimă pentru problema ţintă. Furnicile caută cea mai bună soluţie a problemei parcurgând spaţiul de căutare, depozitând feromoni în timpul procesului de căutare. Mai exact, presupunând că în spaţiul de căutare, $\mathcal{X}$ format din $M_1 \times M_2$ noduri, există K furnici angajate în căutare, tehnica *ACO* poate fi rezumată, conform lui Tian et all în [**88**], după cum urmează:

- Se iniţializează K furnici şi matricea feromonilor, $\tau^{(0)}$;
- Pentru fiecare pas de construcţie cu indexul $n = 1 : N$

    Pentru fiecare furnică $k = 1 : K$

    - ⋆ Se mută consecutiv a k furnică un număr de L paşi în concordanţă cu matricea probabilităţii de tranziţie;

    Se actualizează matricea feromonilor $\tau^{(n)}$;
- Se decide soluţia problemei în conformitate cu matricea finală de feromoni $\tau^{(N)}$.

Există două faze majore pe care *ACO* le implică: să construiască matricea tranziţiei de probabilitate, $p^{(n)}$, şi să actualizeze matricea feromonilor, $\tau^{(n)}$. Problemele şi soluţiile lor vor fi expuse în cele ce urmează.

La pasul n al algorimului a k-a furnică se mută de la nodul I la nodul J cu probabilitatea de tranziţie dată de

$$p_{IJ}^{n} = \frac{\left(\tau_{IJ}^{(n-1)}\right)^{\alpha} \left(\eta_{IJ}\right)^{\beta}}{\sum_{J \in \Omega_I} \left(\tau_{IJ}^{(n-1)}\right)^{\alpha} \left(\eta_{IJ}\right)^{\beta}}, \qquad \text{if } J \in \Omega_I, \tag{3.78}$$

unde $\tau_{IJ}^{(n-1)}$ este valoarea feromonului existentă pe arcul care leagă nodrile I şi J, la pasul de construcţie $n-1$; η_{IJ} este valoarea euristicii existentă pe arcul care leagă nodurile I şi J, valoare care este la fel pentru toţi cei N paşi de construcţie; α, β sunt factori de ponderare a feromonului, respectiv a euristicii; Ω_I este vecinătatea de 8 noduri a nodului I, pentru fiecare dintre nodurile spaţiului.

Informaţia din matricea feromonilor este actualizată de două ori: prima dată după mutarea fiecărei furnici, la fiecare pas de construcţie, iar a doua actualizare are loc după ce toate cele K furnici s-au mutat, în fiecare etapă de construcţie. Prima actualizare, cea locală se face după mutarea furnicii k la pasul de construcţie n conform cu ecuaţia (3.79) din lucrarea [**88**].

$$\tau_{IJ}^{(n)} = \begin{cases} \tau_{IJ}^{n-1} \cdot (1-\rho) + \rho \cdot \Delta\tau_{IJ}, & \text{dacă } (I,J) \text{ se găseşte pe traseul optim;} \\ \tau_{IJj}^{(n-1)}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.79}$$

unde ρ este rata evaporării feromonului, $\Delta\tau_{IJ}$ este cantitatea de feromon rămasă pe arcul (I, J). Mai mult, traseul optim specificat în ecuaţia (3.79) poate fi ales dintre traseul găsit la pasul curent, traseul iniţial, sau o combinaţie a traseelor.

A doua actualizare, cea globală, este executată folosind ecuaţia (3.80) din lucrarea [**27**], după cum urmează:

$$\tau^{(n)} = (1 - \psi) \cdot \tau^{(n-1)} + \psi \cdot \tau^{(0)}; \tag{3.80}$$

unde ψ este rata evaporării feromonului.

Algoritmul furnizează în final soluţii fezabile pentru problemele complexe de optimizare si control distribuit într-un interval de timp bine stabilit.

3.3.2. State-of-art: Modele bazate pe colonii de furnici pentru procesarea imaginilor medicale

Metaeuristica *Ant Colony Optimization (ACO)* [**27**] este în prezent cea mai utilizată metodă metaeuristică de rezolvare a problemelor dificile ce are la bază comportamentul coloniilor de furnici.

Prelucrarea imaginilor face parte din clasa problemelor dificil de optimizat. In acest sens, când o imagine conţine multiple obiecte grupate, suprapunerea lor poate ascunde structura imaginii. Tehnicile de segmentare existente nu sunt capabile să prelucreze implicit porţiunile imaginii, astfel în articolul [**47**] se propune o abordare hibridă numită metoda bazată pe *optimizarea bazată pe colonii de furnici - ACO şi logica Fuzzy (Fuzzy Logic - FL).*

Tehnicile *(FL)* au fost folosite pentru aplicaţii de procesarea imaginilor precum detecţia conturului, extragerea caracteristicilor, şi grupare. Logica fuzzy imită logica umană de întrebuiţare a raţionamentelor care sunt mai degrabă aproximative decât exacte. Un concept de bază în *FL* este regula fuzzy "if-then" [**47**]. *FL* poate, de asemenea, modela funcţii neliniare de complexitate arbitrară cu gradul dorit de precizie.

Tehnica hibridă ce combină tehnicile ACO şi FL, conduce la obţinerea unei informaţii structurale îmbunătăţită a imaginii. Pentru început, folosind *FL* se stabileşte o regulă de bază. Ulterior se utilizează *ACO*, agenţii autonomi colectând valorile intensităţilor fiecărui pixel al unei imagini. Acest pixel este asociat unui anumit grup de agenţi pe baza regulii fuzzy. Există un algoritm care include modul în care se constituiesc grupurile de pixeli. Acest algoritm este descris în [**47**].

Există patru reguli care se aplică liniilor orizontale şi verticale de valori de gri ce se găsesc în jurul punctului analizat. Din punctul de vedere al construcţiei fuzzy, datele de intrare au valori de intensitate ale nuanţelor de gri cuprinse între 0 şi 255. În funcţie de regulile dorite nivelurile de gri se convertesc la valorile ce vor fi folosite în funcţiile membru. Metoda [**47**] elimină implicit grupările greşite şi astfel generează rezultate mai bune decât algoritmul *ACO* original, şi extrage implicit obiectele din imagini. Avantajele acestei abordări sunt: există un set redus de reguli fuzzy de interferenţă; evită grupările greşite ale intensităţilor care aparţin regiunilor ce se suprapun, şi nu este necesară aplicarea unui filtru înainte de procesare.

În [**18**] este propus un model numit *Channeler Ant Model (CAM)* ce se bazează pe capacitatea naturală a furnicilor de a se descurca în medii tridimensionale (*3D*) cu ajutorul autoorganizării şi a comportamentului emergent. Modelul este deja folosit la detectarea automată a nodulilor la plămâni. Avantajul major al modelului este acela că furnizează o soluţie elegantă pentru problema segmentării structurilor *3D* în medii cu paraziţi care au un nivel necunoscut de intensitate. Sarcina coloniei *CAM* este de a furniza hărţi de feromoni *3D* ale volumului explorat, care vor fi folosite ca punct de plecare pentru segmentarea structurilor. Performanţa algoritmului este superioară în cazul în care nivelul paraziţilor are o intensitate scăzută şi se dovedeşte a fi potrivit pentru segmentări de forme şi intensităţi diferite pe fundal, cu intensitate crescută a zgomotului.

În lucrarea [**38**] sunt propuse aplicaţii ale *ACO* în rezolvarea problemelor de procesare a imaginii cu referinţe la tehnicile de optimizare automată ale imaginii. Problema optimizării foloseşte *ACO* şi obiectivul este să maximizeze numărul de pixel din muchii, să mărească intensitatea globală muchiilor, şi să crească valoarea entropiei. Rezultatele obţinute indică faptul că algoritmul *ACO* propus are randament mai bun în ceea ce priveşte atât maximizarea numărului de pixeli de pe muchii cât şi evaluarea obiectivelor acceptate pentru evaluare decât algoritmii genetici *Genetic Algorithms (GAs)* şi algoritmii de optimizare a coloniei *Particle Swarm Optimization (PSO)*. *ACO* este mai atractiv pentru că sunt mai puţini parametri de ajustat decât la algoritmii *PSO* şi *GA*. Noul algoritm *ACO* produce rezultate de calitate mai bună dublate de eficienţă computaţională.

În [**29**] este prezentat un model extins de algoritm bazat pe colonii artificiale de furnici destinate să evolueze în habitate de imagini digitale. Colonia îşi poate adapta numărul populaţiei în funcţie de tipul imaginii în care evoluează şi reacţionează mai rapid decât la schimbarea imaginii. Variaţia numărului populaţiei este obţinută pe baza adaptării procesului de îmbătrânire (şi moarte) şi, de asemenea, de reproducere după cum urmează: o cantitate fixată de energie $e(0)$ este asociată fiecărei furnici. Pentru fiecare generaţie energia $e(a)$ este actualizată, iar vârsta furnicii, a, este măsurată în paşi de timp. Valoarea $e(a)$ este calculată prin scăderea unei cantităţi fixe de energie din energia pe care o are furnica la pasul anterior, şi adunarea unei cantităţi dinamice inspirată din traseul de feromoni. În articolul [**29**] sunt examinate diferenţele dintre colonii cu număr fix al populaţiei (Swarms with Fixed Population Size - SFPS) şi colonii cu număr variabil al populaţiei (Swarms with Varying Population Size - SVPS) în cazul în care evoluează în medii statice. La *SVPS* se conturează o imagine ce se aseamănă cu imaginea originală mai rapid, în mai puţine generaţii [**29**]. Pentru câteva imagini, harta feromonilor au caracteristici diferite: regiunile omogene conţin mai puţini paraziţi, dând impresia că furnicile converg mai eficient în zonele eterogene ale imaginii. Algoritmul *SVPS* este mai capabil să producă hărţi de feromoni mai precis şi cu mai puţini paraziţi, hărţi ce reflectă contururile imaginii. Modelul cu populaţie variabilă este rapid şi mai eficient în crearea urmelor de feromoni pe muchiile imaginilor. Costurile computaţionale ale procesului de reproducere sunt nesemnificative şi timpii rulare ai algoritmilor *SFPS/SVPS* sunt similari.

Detectarea muchiilor se referă la găsirea punctelor unde au loc schimbări bruşte ale intensităţilor şi relaţionarea lor în mod corespunzător. Lucrarea [**4**] prezintă o comparaţie a metodelor de detectare a muchiilor bazate pe variarea gradientului. Metoda cu prag simplu este folosită aici pentru a partiţiona histograma imaginii printr-un prag simplu şi global T, segmentarea este obţinută prin scanarea imaginii, pixel cu pixel, şi etichetarea fiecărui pixel ca făcând parte din muchie sau nu, în funcţie de nivelul său de gri - dacă este mai mare sau mai mic decât valoarea lui T.

Detectarea muchiilor într-o imagine reduce semnificativ cantitatea de date şi filtrează informaţia inutilă la prezentarea structurilor importante dintr-o imagine. Detectarea muchiilor în imaginile cu mulţi paraziţi din moment ce atât muchiile cât şi zgomotul sunt bogate în conţinut. Se obţin rezultate mai bune prin aplicarea unor filtre înaintea detectării muchiilor [**4**].

Stabilirea pragului este primul pas în multe probleme industriale. În [**52**] autorii propun un algoritm de optimizare combinând două abordări, una parametrică: *EM* - expectation-maximization şi una neparametrică: *ACS-Otsu - Ant Colony System*. Algoritmul *hibrid* [**52**] poate fi considerat o abordare în două faze cu două obiective, prin îmbinarea algoritmului *EM* cu algoritmul *ACS-Otsu*. Întâi *ACS-Otsu* caută praguri, nivel cu nivel, pentru imaginea dată, apoi, când începe faza a două furnicile construite sunt evaluate după doua criterii.

Prima dată furnicile sunt evaluate în baza varianţelor între clase; apoi parametrii iniţiali ai fiecărei furnici sunt evaluaţi în funcţie de curba de ajustare a erorii şi cei mai buni parametri sunt furnizaţi algoritmului *EM*. Algoritmul *EM* funcţionează până la îndeplinirea criteriului de convergenţă. Când *EM* se opreşte sunt determinate pragurile optime. A doua fază se va desfăşura până la executarea numărului maxim de iteraţii din *algoritmul hibrid*. *Algoritmul hibrid* este capabil să producă o segmentare de calitate într-un timp stabil şi rezonabil al *CPU*.

3.4. Tehnica ACO pentru extragerea conturului imaginilor medicale

Metaeuristica ACO folosită pentru extragerea conturului foloseşte furnici artificiale care se mişcă într-o imagine bidimensională pentru a construi matricea feromonilor. Fiecare element al matricii feromonilor reprezintă imformaţia referitoare la conturul din imagine.

Abordarea propusă începe cu procesul de iniţializare, rulează pentru N paşi pentru a crea matricea feromonilor şi se incheie cu procesul de decizie, în care se extrage conturul imaginii.

3.4.1. Procesul de iniţializare

În procesul de iniţializare cele K furnici sunt plasate aleator în imagine. Fiecare pixel al imaginii este un nod al grafului. Fiecare valoare a matricii de feromoni iniţiale, $\tau_{(0)}$, este setată la o valoare constantă τ_{init}.

3.4.2. Procesul de construcţie

La pasul de construcţie n, $n = \overline{1, N}$, o furnică oarecare este aleasă din cele K, această se deplasează L paşi consecutivi. Cei L paşi se numesc paşi de mişcare. Furnica se va muta de la nodul I la nodul J în conformitate cu probabilitatea de tranziţie din ecuaţia (3.78).

În procesul de construcţie exită două aspecte importante. Primul aspect este construirea euristicii, η_{ij}, din ecuaţia (3.78).

În acest capitol se propune calcularea valorii euristicii conform cu statistica locală a pixelului $I_{i,j}$.

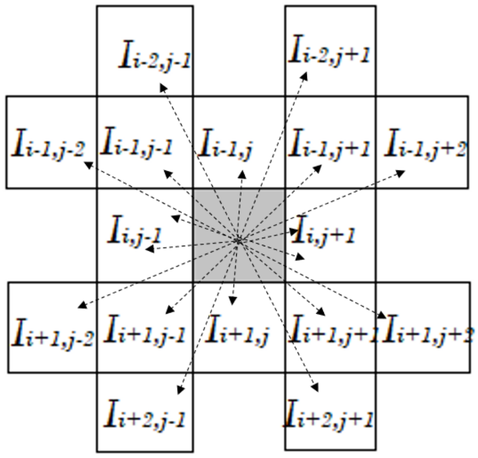

FIGURA 1. **Zona "clique"** conform [**88**] include configuraţia locală a pixelului $I_{i,j}$, pentru calculul valorii variaţiei $V_c(I_{i,j})$ definită prin (3.82). Pixelul $I_{i,j}$ este reprezentat prin pătratul gri.

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{Z} V_c(I_{i,j}), \tag{3.81}$$

unde $Z = \sum_{i=1,M_1} \sum_{1,M_2} V_c I_(i,j)$, este un factor de normalizare, $I_{i,j}$ este valoare intensităţii pixelului din poziţia (i,j) din imagine, $V_c(I_{i,j})$ este o funcţie care procesează o zonă din imagine numită "clique" definită în [**88**]. Aceasta este prezentată în Figura 1 şi este notată cu $cI_{i,j}$. Valoarea $V_c(I_{i,j})$ depinde de variaţia valorilor intensităţii din imagine din interiorul lui $cI_{i,j}$. Mai exact, valoarea $V_c(I_{i,j})$ din pixelul $I_{i,j}$ conform [**88**] este

$$\begin{aligned} V_c(I_{i,j}) = \ & f\left(|I_{i-2,j-1} - I_{i+2,j+1}| + |I_{i-2,j+1} - I_{i+2,j-1}| + \right. \\ & |I_{i-1,j-2} - I_{i+1,j+2}| + |I_{i-1,j-1} - I_{i+1,j+1}| + \\ & |I_{i-1,j} - I_{i+1,j+1}| + |I_{i-1,j+1} - I_{i+1,j-1}| + \\ & \left. |I_{i-1,j+2} - I_{i+1,j-2}| + |I_{i,j-1} - I_{i,j+1}|\right). \end{aligned} \tag{3.82}$$

Pentru $f(\cdot)$ din ecuaţia (3.82), am considerat operatorii prezentaţi în cele ce urmează (prin ecuaţiile 3.83, 3.84, 3.85 şi 3.86), şi ilustraţi în Figura 2.

$$f(x) = \lambda x^2, \text{ pentru } x \geq 0, \tag{3.83}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi x}{2\lambda}\right), & 0 \leq x \leq \lambda; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.84}$$

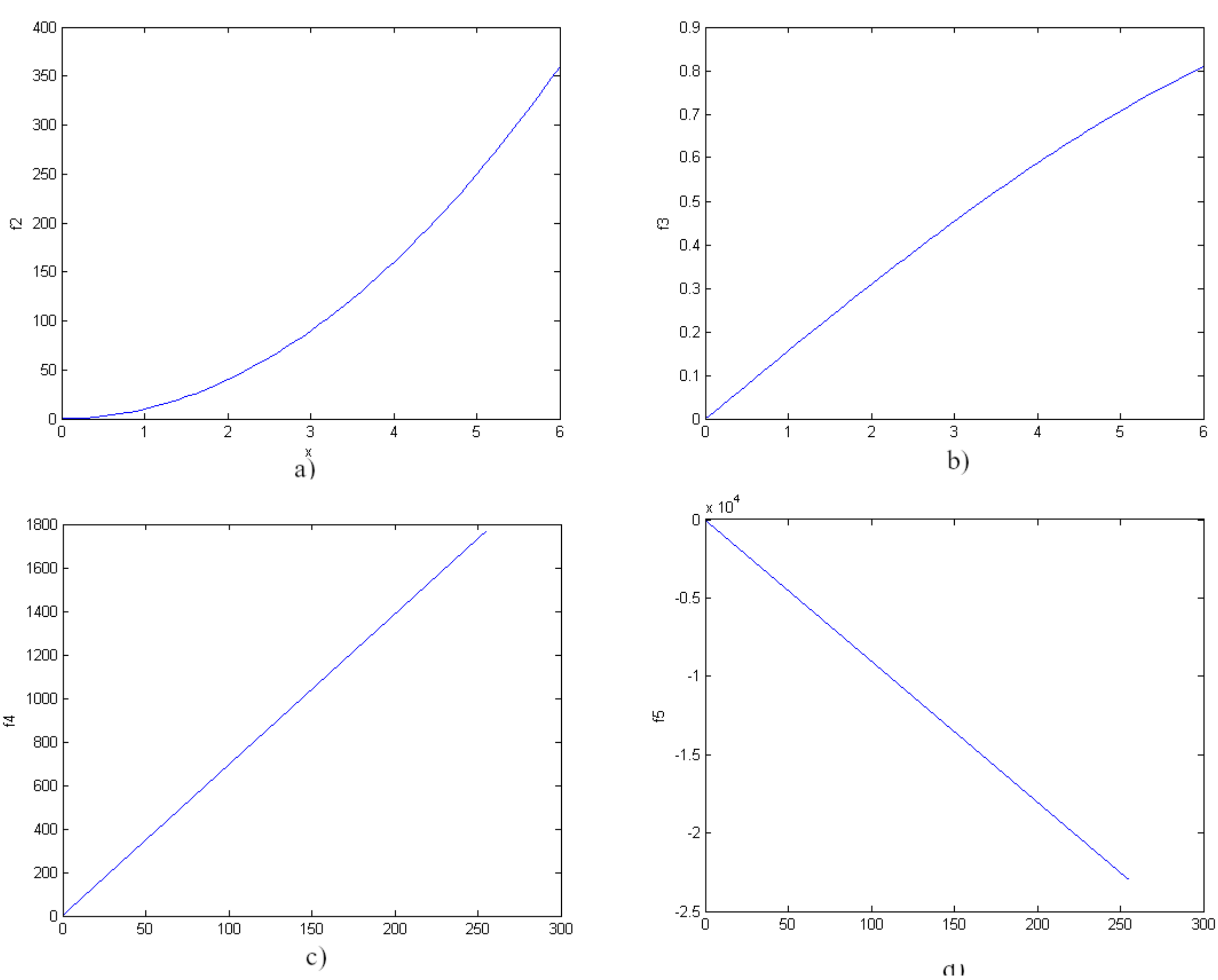

FIGURA 2. **Operatorii procesului de construcţie ACO**: a) operatorul (3.83) cu parametrul $\lambda = 10$; b)operatorul (3.84); c) operatorul inovator propus: (3.85): *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86): χ-*operator*.

$$f(x) = \begin{cases} (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot \frac{2}{3} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0; \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases} \tag{3.85}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \chi\left(x, \frac{2}{3}x \sin\frac{1}{x}\right)\right) x + \chi\left(x, \frac{2}{3}x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot \frac{2}{3}x\sin\frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases} \tag{3.86}$$

unde $\chi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,1)$,

$$\chi(x,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{(1+x^2)\cdot(1+y^2)}. \tag{3.87}$$

Parametrul λ din ecuaţiile (3.83) şi (3.84) ajustează forma operatorilor.

Noutate în utilizarea operatorilor.

- **Introducerea noului operator** *KH-operator* (3.85). Pe parcursul cercetării efectuate cu privire la perturbările admisibile ale operatorilor demicontractivi, folosind perturbarea Krasnoselskij operatorului demicontractiv (2.21), am obţinut operatorul dat în ecuaţia (3.85), denumit *KH-operator*.

  Am observat că operatorul (3.85) poate fi folosit ca funcţie test pentru construirea valorii euristicii din acest algoritm. Acest operator nu a mai fost folosit în această formă sau în algoritmii pentru extragerea conturului.
- **Introducerea noului operator** χ-*operator* (3.86). Am considerat operatorul perturbare admisibilă definit în [**73**], prin ecuaţia (1.16). Operatorul din ecuaţia (3.86) denumit χ-*operator* este un operator perturbare admisibilă obţinut prin aplicarea funcţiei χ, definită în ecuaţia (3.87), operatorului demicontractiv dat prin ecuaţia (2.21).
- **Utilizarea operatorilor** (3.83) **şi** (3.84)**.** Operatorii (3.83) şi (3.84), sunt funcţii test care au fost folosit şi în lucrarea lui Tian et all [**88**]. Am folosit aceşti operatori pentru a evalua performanţele noilor operatori, definiţi prin ecuaţiile (3.85) (*KH-operator*) şi (3.86) (χ-*operator*).

Un alt aspect crucial pe lângă stabilirea operatorilor din procesul de construcţie este fixarea domeniului în care se poate mişca furnica din nodul (l, m), adică $\Omega_{l,m}$ din ecuaţia (3.78). În lucrare am stabilit un domeniu de 8 noduri, prezentat în Figura 3.

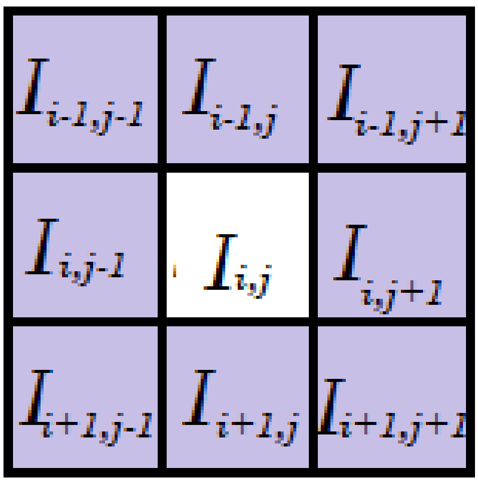

FIGURA 3. **Domeniul procesului de construcţie ACO**: vecinatate de 8 noduri pentru pixelul $I_{i,j}$ (nodurile din vecinătate sunt marcate cu gri.)

3.4.3. Procesul de actualizare

Algoritmul foloseşte două operaţii de actualizare a matricii feromonilor. Prima operaţie are caracter local, şi este folosită după ce fiecare furnică se mută la fiecare pas de construcţie. Fiecare element al matricii este actualizat conform ecuaţiei (3.88)

$$\tau_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \tau_{ij}^{n-1} \cdot (1-\rho) + \rho \cdot \Delta\tau_{ij}^{(k)}, & \text{dacă } I_{i,j} \text{ este vizitat de agentul curent;} \\ \tau_{ij}^{(n-1)}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{3.88}$$

A doua actualizare are caracter global şi se realizează după mutarea tuturor furnicilor la fiecare pas de construcţie conform ecuaţiei (3.89).

$$\tau^{(n)} = (1-\psi) \cdot \tau^{(n-1)} + \psi \cdot \tau^{(0)}; \tag{3.89}$$

unde ψ este rata de evaporare a feromonului.

3.4.4. Procesul de decizie

În această fază a algoritmului se ia o decizie (binară) pentru fiecare pixel în parte, adică se stabileşte daca face parte sau nu din contur. Decizia se ia prin aplicarea unui prag T matricii finale de feromoni $\tau^{(N)}$. Pragul este stabilit folosind un procedeu propus de Dorigo et all, prezentat şi în lucrarea [**60**].

3.5. Rezultate practice în rezolvarea problemei de detectare a conturului imaginilor medicale folosind colonii de furnici

În această secţiune se prezintă o parte a rezultatelor proprii obţinute în decursul anilor de cercetare.

- **Abordare inovativă teoretică.**

  Am utilizat operatorii demicontractivi în termenii perturbarii admisibile, într-un algoritm de optimizare cu colonii de furnici ce detectează conturul imaginilor medicale.
- **Abordare inovativă practică.**

  În cele ce urmează sunt detaliate rezultatele practice obţinute folosind diverse imagini medicale reprezentate in Figura 4 şi preluate: *Brain CT* - din surse proprii, *Vocal MRI* din lucrarea [**40**], *Hand X-ray* din [**1**], şi *Head CT* din [**72**].

  Abordarea propusă a *ACO* a fost implementată folosind Matlab şi a fost rulată pe un computer AMD Rysen 5 2500U, 2GHz.

  Rezultatele experimentale produse de algoritmul *ACO - edge detection* vor fi prezentate în cele ce urmează şi sunt comparate între ele. S-au folosit parametrii stabiliţi în lucrarea [**88**].

  Figurile 5-8 ilustrează imaginile cu conturul generat folosind fiecare dintre operatorii (3.83), (3.84), şi în special operatorii inovatori propuşi de autorul tezei: (3.85): *KH-operator* şi (3.86): χ*-operator*.

Rezultatele includ şi timpii de execuţie pentru fiecare imagine si pentru fiecare metodă de extragere a conturului. Tabelul 3.5 ilustrează timpul de rulare în secunde folosind operatorii specificaţi: (3.83), (3.84), (3.85) si (3.86).

	Operator (3.83)	Operator (3.84)	Operator inovator (3.85)	Operator inovator (3.86)
Brain_CT	47.2442	47.0982	48.2437	47.0464
Vocal_MRI	138.9476	139.8230	140.2909	126.6480
Hand_Xray	189.3574	204.5009	202.6446	185.6683
Head_CT	38.8062	29.5953	38.6136	41.5907
Time Average	103.58885	105.25435	107.4482	100.23835

TABELUL 1. Timpul de execuţie (în secunde) obţinut folosind algoritmul *ACO - edge detection* pentru imaginile medicale: *Brain CT*, *Vocal MRI*, *Hand X - ray* şi *Head CT* folosind operatorii (3.83), (3.84) şi inclusiv operatorii inovatori propuşi (3.85)(*KH-operator*) şi (3.86)(χ-*operator*).

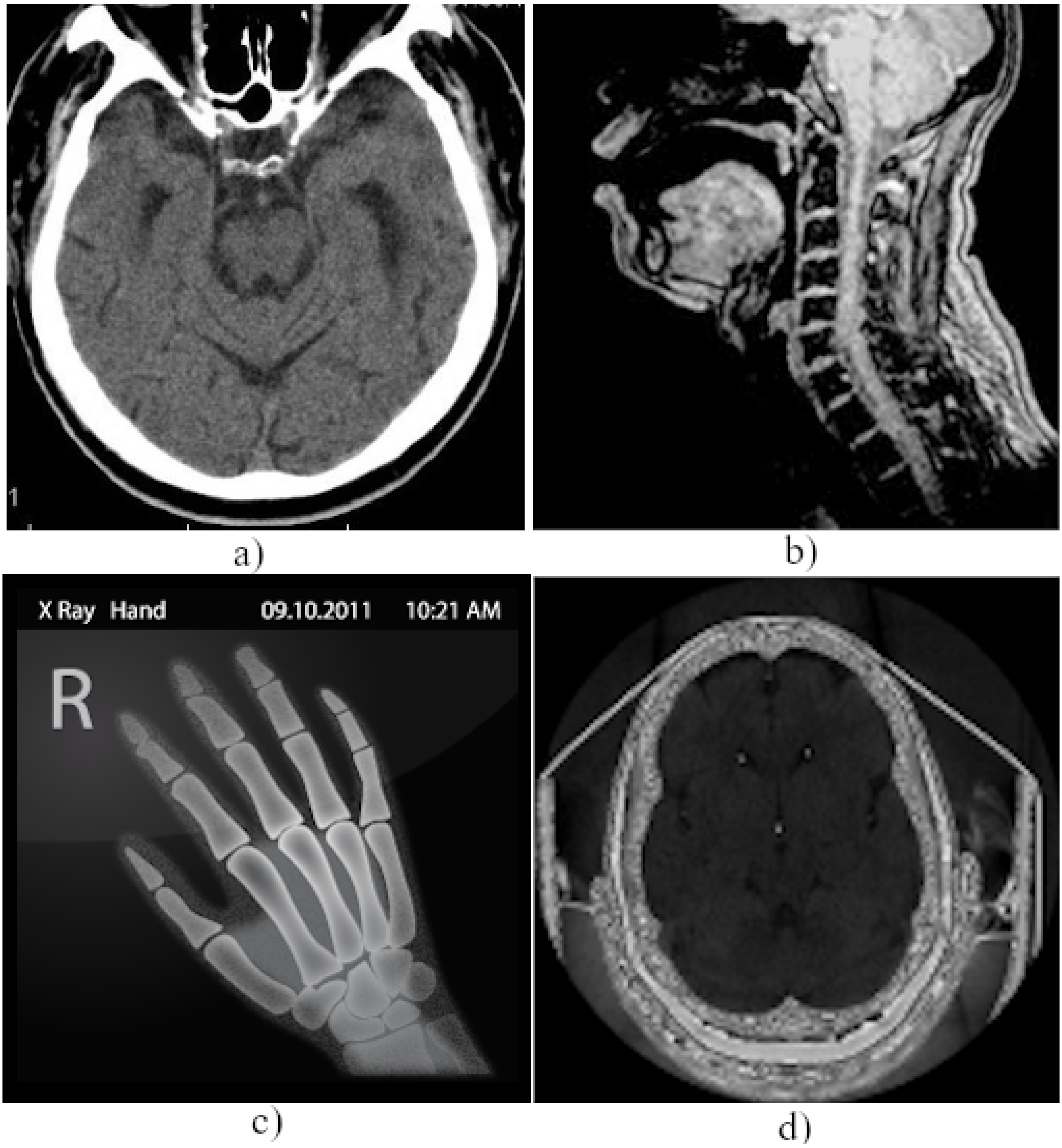

FIGURA 4. Set de imagini test: a) *Brain CT* (126×128); b) *Vocal MRI* [**40**] (225×225), c) *Hand X-ray* (225×225) [**1**], d) *Head CT* (128×128) [**72**].

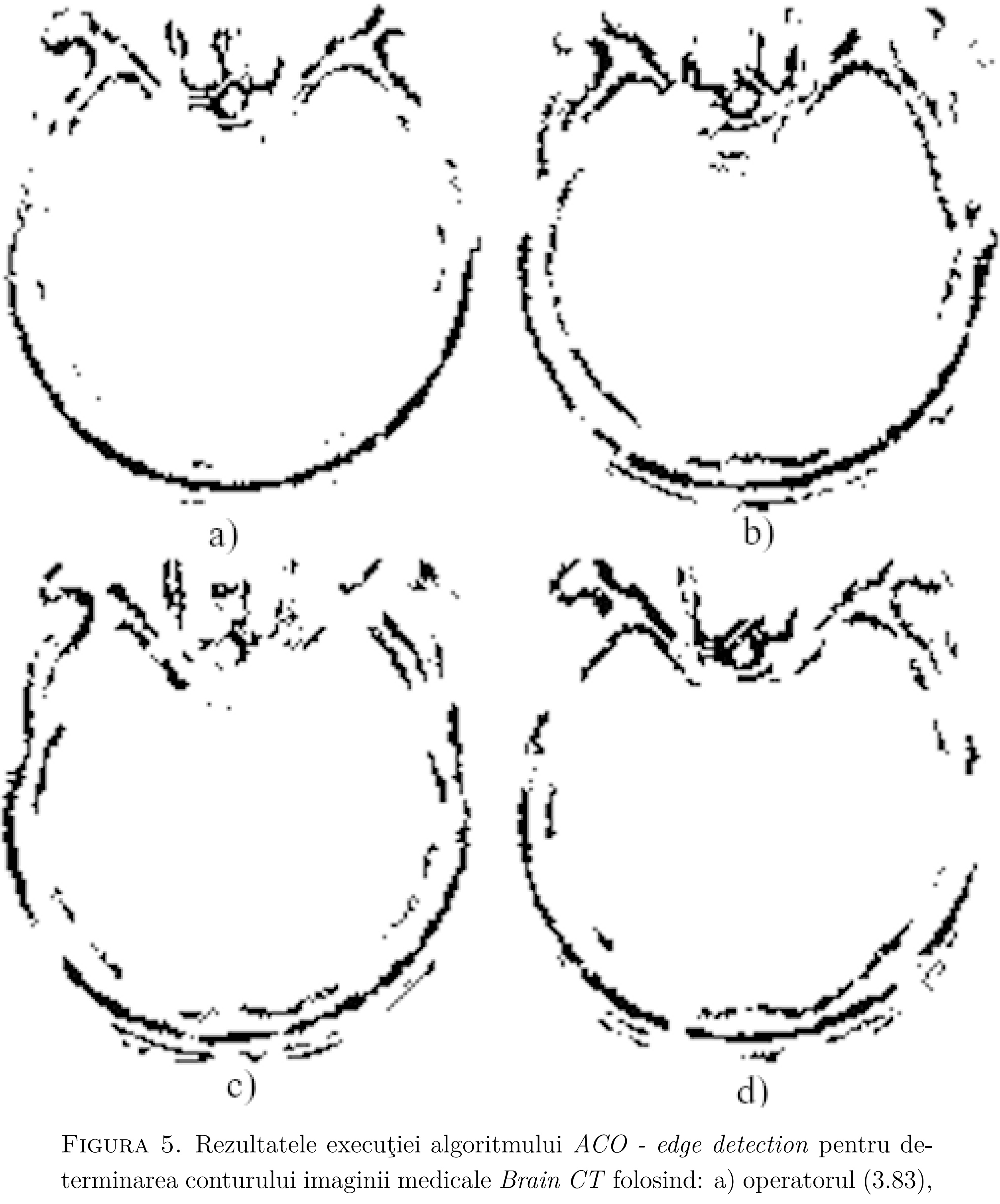

FIGURA 5. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Brain CT* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ*-operator*.

FIGURA 6. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Vocal MRI* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ-*operator*.

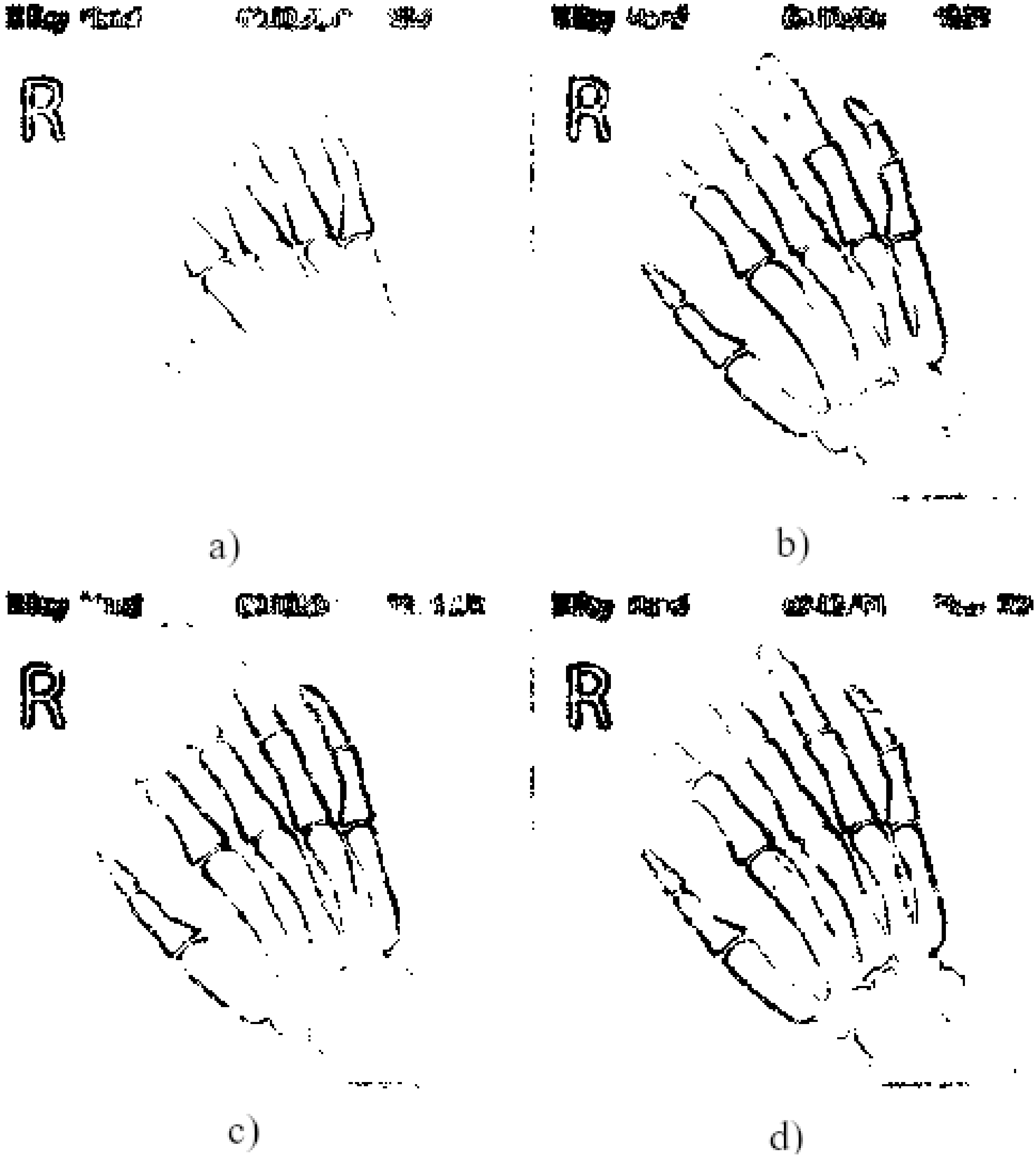

FIGURA 7. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Hand X-ray* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ*-operator*.

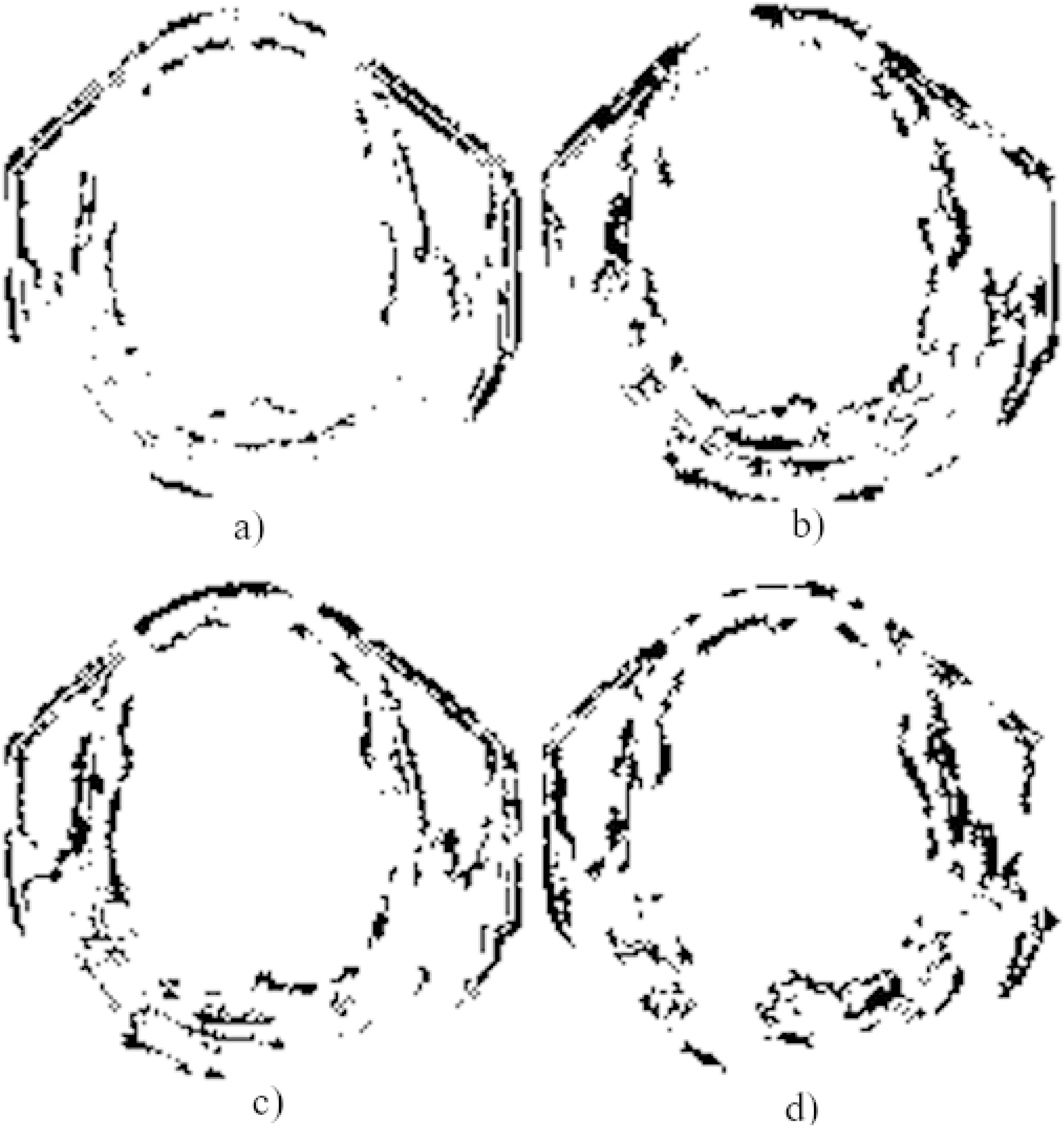

FIGURA 8. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Head CT* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ-*operator*.

Analiza rezultatelor.

- **Timp de rulare.** După cum se poate vedea în Tabelul 3.5 timpul de execuţie, pentru cele patru metode este în medie similar (*Time Average*), dar se remarcă timpul pentru operatorul inovator propus (3.86)(χ-*operator*) ca fiind cel mai bun.

  Dimensiunea imaginii este însă extrem de importantă în determinarea timpului de execuţie.

- **Rolul operatorilor demicontractivi.**

  A fost necesar să stabilim un prag de similaritate al rezultatelor obţinute, pentru a constata dacă operatorii demicontractivi pot fi folosiţi în algoritmii de extragere a conturului unei imagini.

  Asfel, am constat că în imaginea generată folosind *perturbarea admisibilă Krasnoselskij*, (3.85) (*KH-operator*), sunt: 740 pixeli care nu au fost detectaţi în conturul obţinut cu operatorul (3.83); 593 pixeli care nu apar în conturul generat cu operatorul (3.84); 677 pixeli care nu apar în conturul generat cu operatorul (3.86) (χ-*operator*).

  Pe de de altă parte, se poate observa că informaţia legată de contur obiņută cu operatorul (3.84) conţine mai mulţi pixeli decât cea obţinută cu (3.85) (*KH-operator*), astfel că am efectuat contorizările şi invers. Au existat 400, 696, respectiv 657 pixeli detectaţi de operatorii (3.83), (3.84), respectiv (3.86) (χ-*operator*) şi nedetectaţi de operatorul (3.85) (*KH-operator*).

  Contorizarea a fost efectuată şi pentru (3.86) (χ-*operator*) în raport cu operatorii (3.83) şi (3.84). Am gasit mai mulţi cu 637, respectiv 556 pixeli determinaţi cu perturbarea "χ", (3.86) şi nedetectaţi de operatorii menţionaţi. Am detectat 317 şi 679 pixeli cu operatorul (3.83), respectiv (3.84), şi nedetectaţi de perturbarea "χ".

  Figura 4, *a*) ilustrează valorile obţinute prin contorizare pentru imaginea *Brain CT*.

  Am efectuat contorizări similare şi pentru celelalte trei imagini (*Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT*). De fiecare dată au existat pixeli detectaţi cu unul dintre operatori şi nedetectaţi de alţii.

  Acest fapt a condus la ideea construirii unui nou contur care să conţină toată informaţia obţinută în ceea ce priveşte conturul, cu toţi cei patru operatori, pentru fiecare imagine, în parte.

  Figura 9 ilustrează imaginile rezultate folosind toţi operatorii specificaţi.

- **Concluziile** meritorii ale experimentelor includ obţinerea unui rezultat de succes al problemei contururilor obţinut prin utilizarea operatorilor propuşi de autor: (3.85)(*KH-operator*) şi mai ales a operatorului (3.86)) χ-*operator.* O altă concluzie importantă este rezultatul de înaltă calitate obţinut la faza de suprapunere a contururilor unde fiecare operator în parte îşi aduce contribuţia sa.

Suprapunerea contururilor folosind toţi operatorii implicaţi determină un contur mai compact şi corect decât cele obţinute cu fiecare tehnică individuală în parte (Figura 9). Figura 10 include suprapunerea imaginilor originale peste Figura 9.

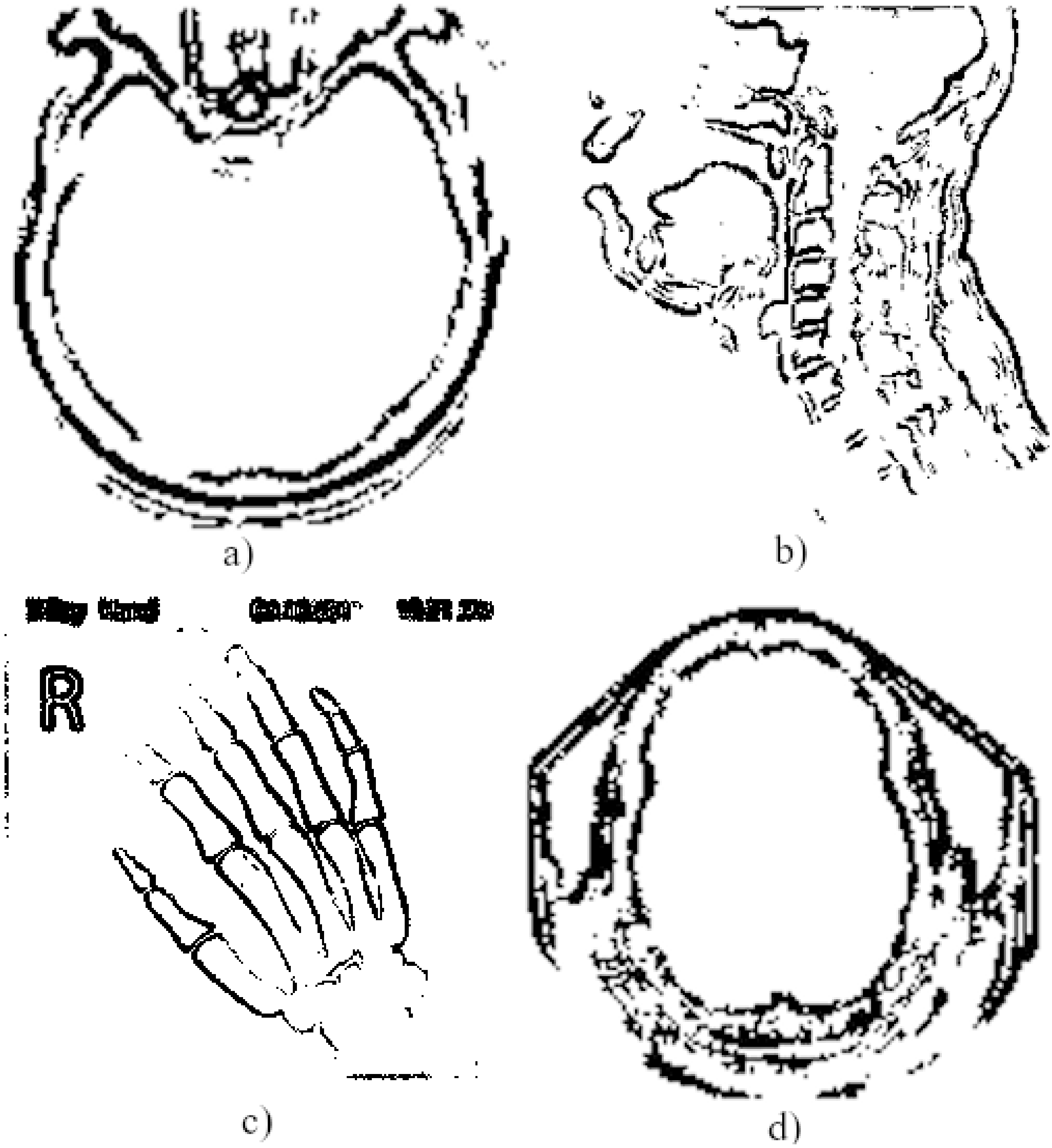

FIGURA 9. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru toţi operatorii implicaţi în teste ((3.83),(3.84), (3.85) şi (3.86)) pentru determinarea conturului imaginilor medicale: a) *Brain CT* b) *Vocal MRI* c) *Hand X-ray* d) *Head CT*.

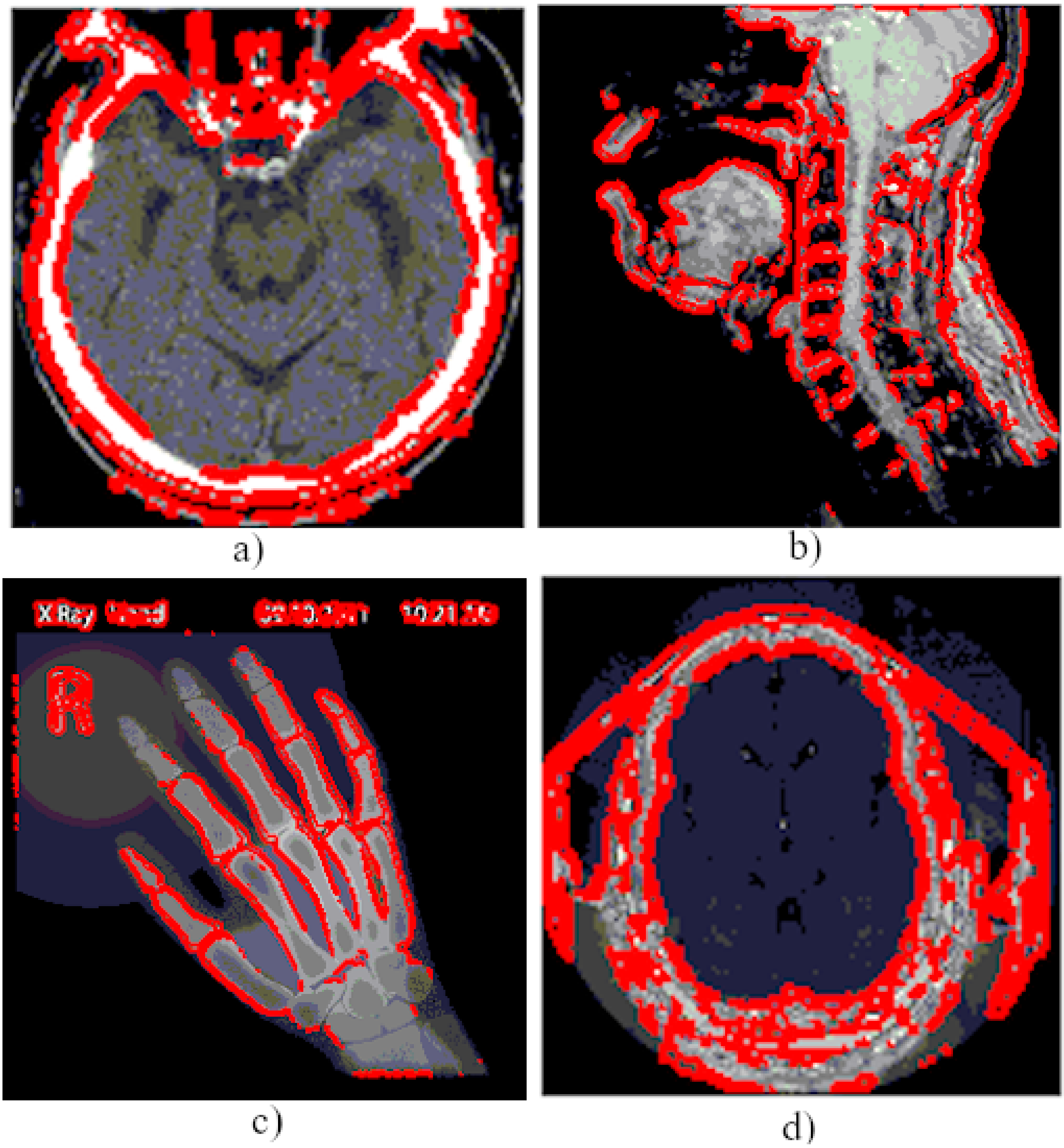

Figura 10. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru toţi operatorii implicaţi în teste ((3.83),(3.84), (3.85) şi (3.86)) pentru determinarea conturului imaginilor medicale (a) *Brain CT* b) *Vocal MRI* c) *Hand X-ray* d) *Head CT*) suprapuse peste imaginea originală.

3.6. Concluzii

În acest capitol se prezintă noile tehnologii de procesarea imaginilor, inclusiv a tehnicii inspirate de coloniile de furnici (Any Colony Optimization, ACO). *ACO*-edge detection a fost folosit, cu succes la extragerea contururilor imaginilor medicale. Algoritmul utilizează furnici artificiale care, pe parcursul algoritmului adună informaţii care vor duce la extragerea conturului. Furnicile creează şi actualizează matricea ce conţine informaţia referitoare la feromoni, şi folosesc o euristică dată apriori în algoritm.

Contribuţia personală este conceperea şi folosirea a două funcţii noi care intră în componenţa euristicii din acest algoritm.

Am definit funcţiile de test: (3.85): *KH-operator* şi (3.86): χ*-operator*. Funcţiile sunt perturbări admisibile ale unui operator demicontractiv, dat în exemplul (2.21). Perturbările admisibile sunt perturbarea Krasnoselskij, prezentată pentru prima dată de Rus în [**73**], şi perturbarea χ descrisă în ecuaţiile (3.86), şi (3.87).

Experimentele au fost realizate pe un set de imagini medicale specific (Figura 4).

Se prezintă rezultatele de succes ale aplicării noilor funcţii de test (*KH-operator* şi χ-*operator*) în comparaţie cu rezultatele obţinute folosind funcţii test folosite anterior în lucrarea lui Tian et all [**88**].

În urma studiului s-a constatat că operatorii (3.85) (*KH-operator* şi (3.86) χ*-operator*) pot fi folosiţi cu succes la extragerea conturului imaginilor medicale. Timpul de rulare pentru operatorul inovator propus (3.86) (χ*-operator*) a fost în medie cel mai scurt (Tabel 3.5).

Deoarece conturul imaginilor diferă în funcţie de operatori: unele părţi sunt extrase în timp ce altele sunt ignorate am observat că este eficientă suprapunerea contururilor obţinute cu toţi cei patru operatori pentru a obţine un contur apropiat de cel original (Figurile 9-10).

CAPITOLUL 4

Strategii inovative în procesarea imaginilor folosind colonii de furnici sensibile

4.1. Introducere

În acest capitol se prezintă rezultatele obţinute folosind un algoritm inovativ inspirat de coloniile de furnici. Inovaţia constă în introducerea unui parametru, un vector ce modifică comportamentul furnicilor agenţi. Vectorul se numeşte *Pheromone Sensitivity Level* (PSL) vector. Furnicile sunt dotate cu niveluri diferite de sensibilitate la feromonul artificial, determinând reacţii diferite la domeniul dinamic în care se se mişcă. În continuare este prezentat contextul teoretic de utilizare a vectorului PSL propus de Pintea şi Ticală în [**66**].

4.2. Propunere algoritm: ***Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model*** $(HMIP - SAM)$

Secţiunea curentă prezintă un nou model teoretic, hibrid bazat pe colonii de furnici(ACO) [**27**] denumit *Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model* $(HMIP-SAM)$; modelul poate fi folosit la procesarea imaginilor medicale.

Din metaeuristica *Ant Colony Optimization (ACO)* se foloseşte în special euristica *Ant Colony System (ACS)*. Aceasta implică o comunicare directă inspirată din sistemele multi-agent; se folosesc niveluri diferite de sensibilitate ale furnicilor artificiale pentru îmbunătăţirea soluţiei în problema procesării imaginilor.

În ACO, furnicile artificiale vor construi soluţii prin drumuri stocastice într-o construcţie complet conectată. Traseul de feromoni artificial reprezintă "urma" procesului. Traseul de feromoni este actualizat pe parcursul procesului.

Calitatea soluţiei parţiale este dată de cantitatea de feromoni care este modificată pe parcurs. Soluţia globală este găsită după ce toate furnicile sunt ghidate, pe baza informaţiilor anterioare date de feromoni, către regiuni promiţătoare din spaţiul de căutare.

Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model $(HMIP - SAM)$ foloseşte *Sensitive Ant Model (SAM)* [**20, 21**] prezentat de către Chira C., Pintea C.M. şi Dumitrescu D. şi folosit la rezolvarea de probleme complexe de optimizare, ce includ probleme de rutare clasice şi generalizate [**20**] - [**23**], [**63**] - [**65**]

Modelul *SAM* foloseşte furnici capabile să comunice indirect, stigmergic, pe baza traseului de feromoni. În *SAM* furnicile - agenţi sunt înzestraţi cu diferite grade de eterogenitate pentru a putea să-şi îmbunătăţească capacităţile de căutare. Agenţii sunt dotaţi cu diferite nivele de sensibilitate a feromonilor artificiali (*pheromone sensitivity level, PSL*) ce induc diferite tipuri de reacţii într-un mediu dinamic.

Echilibrul dintre explorare şi exploatare poate fi obţinut prin folosirea comunicării indirecte cât şi prin antrenarea agenţilor eterogeni.

Valoarea *PSL* este exprimată printr-un număr real din intervalul unitate [0, 1]; când valoarea este 0 agentul ignoră complet informaţia, iar pentru valoarea 1 are sensibilitate maximă la feromoni.

În cazul în care valoarea *PSL* este mică înseamnă că agenţii pot alege deplasarea pe drumuri cu nivele mari de feromoni, sunt independenţi şi sunt exploratori ai mediului. Pentru valori mari ale *PSL* agenţii sunt sensibili la traseul de feromoni şi exploatează intensiv regiunile de căutare promiţătoare.

Procesul de învăţare produce, în timp, modificări ale senzitivităţii la feromoni: *PSL* creşte sau descreşte pe baza topologiei spaţiului de căutare codată (încapsulată) în experienţa furnicilor / agenţilor.

Vom folosi în continuare următoarele notaţii şi specificaţii:

- $p_{iu}(t,k)$ este probabilitatea ca agentul k să aleagă ca nod următor nodul u pornind din nodul curent i ;
- Probabilitatea de tranziţie re-normalizată a agentului k (influenţată de *PSL*) este specificată de relaţia 4.90.

$$sp_{iu}(t,k) = p_{iu}(t,k) \cdot PSL(t,k). \tag{4.90}$$

- *PSL(t, k)* reprezintă valoarea *PSL* a agentului k la momentul t.
- Pentru fiecare nod i este adevărată relaţia 4.91:

$$\sum_u sp_{iu}(t,k) < 1. \tag{4.91}$$

- Probabilitatea de traziţie asociată stării virtuale *vs* este dată de relaţia 4.92

$$sp_{i,vs}(t,k) = 1 - \sum_u sp_{iu}(t,k). \tag{4.92}$$

- Pentru un agent k, la momentul t, au loc relaţiile 4.93 şi 4.94.

$$sp_{i,vs}(t,k) = 1 - PSL(t,k) \sum_u p_{iu}(t,k), \tag{4.93}$$

$$sp_{i,vs}(t,k) = 1 - PSL(t,k). \tag{4.94}$$

4.2.1. Factorul de eterogenitate şi segmentarea imaginilor

Probabilitatea re-normalizată $sp_{i,vs}(t,k)$ poate fi corelată cu eterogenitatea sistemului din momentul t. O interpretare pentru $sp_{i,vs}(t,k)$ este eterogenitatea granulară agentului k la iteraţia t. Aşadar, măsura eterogenităţii sistemului este conform ecuaţiei (4.95):

(4.95) $$E = \sum_k \sum_i (sp_{i,vs}(t,k))^2.$$

Eterogenitatea minimă este asociată cu senzitivitatea maximă la feromonii artificiali a agenţilor *SAM*, iar eterogenitatea maximă corespunde unei senzitivitati nule a agenţilor *SAM*. Variabila E măsoară eterogenitatea unui sistem *SAM*, spre deosebire de corespondenta ei din varianta *ACS*.

În practică se alege o nouă mişcare pe baza unei reguli proporţional pseudo-aleatorie de tip *ACS*, unde probabilităţile de tranziţie de tip *SAM* sunt luate în considerare, iar mecanismul se numeşte regula de decizie a stării virtuale.

Noua tehnică *Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model* ($HMIP - SAM$) este o tehnică specifică pentru imagistica medicală bazată pe *Sensitive Ant Model (SAM)* [**20, 21**]. Nivelele diferite de sensibilitate nou introduse au scopul de a influenţa faza de actualizare a feromonilor.

În *Imagistica medicală (Medical Image Processing)* este vital pentru viaţa pacienţilor să se folosească mecanisme foarte precise pentru segmentare a imaginii, detectarea conturului şi evitarea perturbaţiilor, a zgomotului ("noise").

Pentru îmbunătăţirea segmentării imaginilor medicale vom introduce *factorul de eterogenitate*. Furnicile, în strategia de căutare ACO, folosesc diferite niveluri de sensibilitate. Algoritmul $HMIP - SAM$ foloseşte diferite strategii pentru a ghida acţiunile furnicilor care sunt distribuite pe fundalul şi în figurile ţintă din imagine.

Pentru început ne vom referi la fundal şi imaginea ţintă. Perturbarea, zgomotul unui imagini necesită procesări speciale.

Procesul de segmentare, de creare a clusterelor se bazează în general pe [**53**] care utilizează de asemenea eterogenitatea.

- Centrele clusterelor iniţiale sunt valori de gri: numărul a n puncte de vârf, cu n fiind şi caracteristica gri; aceasta reduce timpul de rulare al algoritmului.
- Este stabilită la zero valoarea gradient a centrelor iniţiale. Celelalte valori gradient ale centrelor clusterelor sunt specificate în ecuaţia 4.96.

(4.96) $$gf = \frac{1}{m}(\max_{j=1,\ldots n}(\sum_{i=1}^{m} gd(i,j))$$

  unde $gd(i,j)$ este valoarea gradient a pixelului (i,j), iar dimensiunea imaginii este $m \times n$.
- Este stabilită valoarea proprie a vecinătăţii pentru fiecare centru iniţial $ev = 8$. În timp ce algoritmul rulează caracteristicile vecinătăţilor centrelor clusterelor va fi 6, iar în particular, când există zgomot, valoarea va fi 3 (aşa cum este precizat şi în [**53**]).

După determinarea centrelor clusterelor iniţiale, algoritmul caută cea mai bună împărţire în clustere / segmentare a imaginii. Funcţia euristică ce indică probabilitatea cu care pixelul următor poate fi asociat unei clase, este similaritatea.

Similaritatea η a căutării curente şi a centrului clusterului este specificată în ecuaţia 4.97.

$$\eta_{i,j} = \frac{r}{d_{(i,j)}}, \tag{4.97}$$

unde r este raza clusterului.

4.2.2. Similaritatea conexiunilor in detectarea conturului.

În procesarea imaginilor medicale, în faza detectării muchilor (zone cu puternice contraste de intensitate), mişcările furnicilor au la bază diferenţe ale valorii similarităţii ev - în vecinătăţile pixelilor.

Pentru a îmbunătăţi performanţa căutării modelului bazat pe colonie de furnici se foloseşte valoarea cea mai mare a diferenţelor de adiacenţă şi similaritatea maximă a conexiunilor [**26**]. Valoarea cea mai mare a diferenţelor de adiacenţă a vârfului este valoarea identificată de furnici din diferenţele vecinătăţilor importante.

Similaritatea conexiunilor este maximă când furnicile găsesc pixeli lângă vârful real. Funcţia euristică pentru vârf este modificată conform ecuaţiei (4.98), [**53**].

$$\eta_{i,j} = \frac{\sum_{l \in NE_j} |p_j - p_l|}{ev \cdot max\{1, |p_j - p_i|\}}, \tag{4.98}$$

unde p_i este intensitatea pixelulului i; p_j este intensitatea pixelului j de lângă pixelul i; $max\{1, |p_j - p_i|\}$ este factorul similaritate maximă a conexiunilor care ghidează furnicile în căutare; NE_j este o mulţime de ev (în general opt) pixeli din zona de căutare. În principiu, când $\eta_{i,j}$ din ecuaţia (4.98) este zero, furnicile se opresc.

Detectarea contururilor într-o imagine este o sarcină delicată. Pentru a găsi o hartă a vârfurilor adecvată, şi a nu se bloca la o soluţie parţială care se bazează pe comunicare indirectă, furnicile ca agenţi pot fi înzestrate cu comunicare *directă*.

Comunicarea *directă* foloseşte o furnică *regină* pentru redirecţionarea informaţiei. Fiecare furnică comunică *direct* cu *regina* şi *regina* la rândul ei cu fiecare dintre furnici. *Regina* deţine toate informaţiile adunate de la furnici şi are posibilitatea de a *informa* furnicile când este necesar. Comunicarea ar fi necesară atunci când, de exemplu, regina constată (în baza listei ei de puncte cu zgomot, întocmită de furnici cu nivel înalt de PSL) că poate avea loc detectarea în mod fals a unui vârf, sau de exemplu, pentru ghidarea furnicilor, în special a celor cu nivel scăzut de sensibilitate, când trebuie explorată o zonă nouă a spaţiului de căutare.

Regula globală de actualizare conform [**53**] utilizează media lungimii pasului m al furnicilor şi nivelul maxim de feromoni din imagine. Algoritmul complex este executat pentru o perioadă de timp limitată de numărul de iteraţii.

În momentul în care furnicile detectează zgomot, punctele cu zgomot sunt şterse [**44**]. În algoritmul bazat pe furnici $HMIP - SAM$ furnicile cu sensibilitate mai mare au sarcina de a găsi punctele de zgomot. Când informaţia este găsită este comunicată *direct reginei* care va informa în continuare furnicile, atunci când este necesar, în procesul de căutare. În acest mod acurateţea detecţiei marginilor este îmbunătăţită.

4.2.3. Descriere algoritm: Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model

Schema algoritmului propus Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model $HMIP-SAM$, pe baza lucrării [**53**], este prezentată in continuare.

- Se iniţializează parametri algoritmului şi se aşază furnicile arbitrar în spaţiul de căutare;
- Se iniţializează fiecare furnică cu un nivel arbitrar de sensibilitate;
- Se începe faza de iteraţie;
- Se identifică regiunea în care furnicile au culoarea gri a pixelului similară cu a furnicii k, din vecinătatea sa de 3×3.

(1)- Dacă o furnică k nu se se găseşte în regiunea ţintă, ea este transferată prima dată în această regiune. Deplasarea se bazează pe probabilitatea de deplasare într-un alt nod conform algoritmului *ACS*. Nivelul de sensibilitate al furnicii este modificat pe baza învăţării prin cooperare. Se ajustează traseul de feromoni.

(2)- Dacă o furnică k cu PSL mic se află pe muchie, se calculează probabilitatea de selectare a următorului element şi furnica se deplasează conform probabilităţii de tranziţie a stării. Comunicarea directă dintre *regină* şi furnicile cu nivel scăzut al PSL limitează delimitarea excesivă de feromoni şi determină diversificarea explorării. Feromonii sunt actualizaţi atât local cât şi global. Dacă o furnică are nivel ridicat de PSL ea nu va identifica muchia.

(3)- Dacă o furnică cu nivel ridicat de PSL identifică un punct de zgomot, se calculează probabilitatea de tranziţie a stării şi se actualizează traseul de feromoni. Furnicile cu nivel ridicat de PSL comunică direct cu regina despre punctele de zgomot; furnicile cu nivel scăzut de PSL nu identifică punctele de zgomot.

- Se opresc iteraţiile atunci când numărul total de iteraţii este atins.

Rezultatul va fi cea mai buna soluţie posibilă pentru o problemă de procesare a unei imagini medicale dată, după un număr stabilit de încercări.

În [**86**] am folosit doi operatori de perturbare admisibilă pentru a calcula valoarea euristicii de care este nevoie în algoritmul ACO.

În acest capitol vom întrebuinţa, de asemenea, cei doi operatori perturbare admisibilă ai unei aplicaţii demicontractive în componenţa funcţiei test, şi include vectorul PSL. Vor fi făcute comparaţii între rezultatele obţinute cu perturbările admisibile, pe de o parte vor fi rezultatele obţinute fără a folosi vectorul PSL, iar pe de alta rezultatele obţinute folosind vectorul PSL.

Presupunând că sunt K agenţi implicaţi în căutarea soluţiei problemei, într-un spaţiu $\mathcal{X}$, care constă în $M_1 \times M_2$ noduri, algoritmul poate fi sintetizat după cum urmează:

- Se aşază cele K furnici în spaţiul de căutare, se iniţializează matricea de fermoni, $\tau^{(0)}$ şi vectorul PSL.
- Pentru fiecare pas de construcţie cu indexul n, $n = 1 : N$

    Pentru fiecare agent $k = 1 : K$

$\star$ Se mută agentul k consecutiv, pentru L paşi mutare în conformitate cu matricea probabilităţii de tranziţie.

Se actualizează matricea de feromoni, $\tau^{(n)}$.

Se actualizează vectorul PSL, $PSL^{(n)}$.

- Se decide soluţia conform cu matricea finală de feromoni $\tau^{(N)}$.

Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model ($HMIP-SAM$) include şi actualizarea vectorului PSL pe lângă construirea matricii probabilităţii de tranziţie $p^{(n)}$, şi actualizarea matricii feromonilor $\tau^{(n)}$ ((3.79), Capitolul 3).

Similar cu ACO, se construieşte matricea probabilităţii de tranziţie şi matricea feromonilor se actualizează în două etape. Prima etapă include actualizarea locală conform ecuaţiei (3.88) din [**88**].

$$\tau_{IJ}^{(n)} = \begin{cases} \tau_{IJ}^{n-1} \cdot (1-\rho) + \rho \cdot \Delta\tau_{IJ}, & \text{dacă } (I,J) \text{ este pe} \\ & \text{traseul optim,} \\ \tau_{IJ}^{(n-1)}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.99}$$

În această etapa, in $HMIP-SAM$ se actualizează şi vectorul PSL conform ecuaţiei (4.100).

$$PSL_{IJ}^{(n)} = \begin{cases} (1-\rho) \cdot PSL_{IJ}^{(n-1)} + \rho \cdot \Delta\tau_{IJ}, & \text{dacă } (I,J) \text{ se găseşte} \\ & \text{pe traseul optim,} \\ PSL_{IJ}^{(n-1)}, & \text{altfel.} \end{cases} \tag{4.100}$$

unde ρ este rata evaporă rii feromonilor, $\Delta\tau_{IJ}$ este cantitatea de feromoni depusă pe muchia (IJ). La fel ca înainte, traseul optim este un criteriu definit de către utilizator.

A doua actualizare a matricii feromonilor este cea global influenţată de factorul de sensibilitate PSL conform ecuaţiei(4.101)

$$\tau^{(n)} = \max_{i=1:K} PSL(i) \cdot \tau^{(n-1)}. \tag{4.101}$$

4.3. Procesele de detectare a conturului imaginilor medicale folosind $HMIP-SAM$

Abordarea propusă, *Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model* ($HMIP-SAM$) începe cu procesul de iniţializare, rulează pentru N paşi pe parcursul cărora creează şi actualizează matricea de feromoni, şi, la final execută procesul de decizie pentru determinarea conturului.

(1.) **Procesul de iniţializare.**

În procesul de iniţializare furnicile sunt plasate aleator în imagine. Fiecare pixel este similar unui nod de graf. Fiecare element al matricii de feromoni iniţiale $\tau_{(0)}$ este fixată la o constantă τ_{init}. Fiecare element al vectorului PSL este iniţializat cu 1. Se defineşte o constantă, L, pentru a fixa un număr de paşi de mişcare în procesul de construcţie.

(2.) **Procesul de construcţie.**

La pasul de construcţie n, o furnică este aleasă aleator dintre cele K, şi aceasta se va mişca consecutiv pentru L paşi de mişcare. Furnica se va mişca de la nodul curent i la nodul j conform probabilităţii de tranziţie specificată de ecuaţia (3.78).

Aspectele ce trebuie clarificate sunt: stabilirea lui η_{ij} din ecuaţia (3.78) şi stabilirea domeniului în care se poate mişca furnica aflată în nodul (l, m), dică $\Omega_{l,m}$ din (3.78). Valoarea lui η_{ij} este determinată conform cu statistica locală a pixelului (i, j), dată în ecuaţia (3.81), iar domeniul de cătare este domeniul compus din 8 noduri, prezentat în Figura 3.

Pentru calcularea valorii η_{ij} am folosit operatorii din ecuaţiile (3.83) - (3.86) din Capitolul [3]: funcţiile test folosite din [**88**] şi operatorii inovatori (3.85) (*KH-operator*) şi (3.86) χ*-operator*.

(3.) **Procesul de actualizare.**

Algoritmul foloseşte două operaţii de actualizare a matricii feromonilor. Prima actualizare se execută după ce fiecare furnică se mută în fiecare pas de construcţie. Fiecare element al matricii de feromoni este actualizat conform procedeului specificat în [**88**]. A doua actualizare este cea globală ce are loc după ce toate furnicile au executat paşii de mişcare din fiecare pas de construcţie, conform ecuaţiei (4.101).

(4.) **Procesul de decizie.**

În acest moment al algoritmului, se stabileşte pentru fiecare pixel, în parte, dacă face parte din conturul imaginii sau nu. Decizia se ia prin aplicarea unui prag, T, matricii de feromoni finale, $\tau^{(N)}$. Valoarea pragului este calculată conform lucrării Dorigo et all [**60**].

4.4. Rezultate practice în rezolvarea problemei de detectare a conturului imaginilor medicale folosind colonii de furnici sensibile

Algoritmul *HIMP-SAM* a fost testat folosind un set de imagini medicale [[**1**], [**40**], [**72**]] prezentate în Figura 4.

În continuare prezentăm rezultatele experimentelor efectuate folosind valorile parametrilor din [**88**]. Sunt incluse rezultatele obţinute cu fiecare dintre operatorii specificaţi în ecuaţiile (3.83) - (3.86) din Capitolul [3]

Aceiaşi operatori perturbare admisibilă au fost utilizaţi în această formă, şi în algoritmul descris în lucrarea [**86**].

Folosind noua metodă de actualizare a matricii feromonilor s-au obţinut îmbunătăţiri ale conturului extras. În continuare prezentăm contururile obţinute. Astfel, pentru *Brain CT*, Figura 1, pentru *Vocal MRI* Figura 2, pentru *Hand X-ray* Figura 3 şi pentru *Head CT* Figura 4. Operatorii utilizaţi sunt specificaţi prin ecuaţiile: (3.83), (3.84),(3.85), şi (3.86).

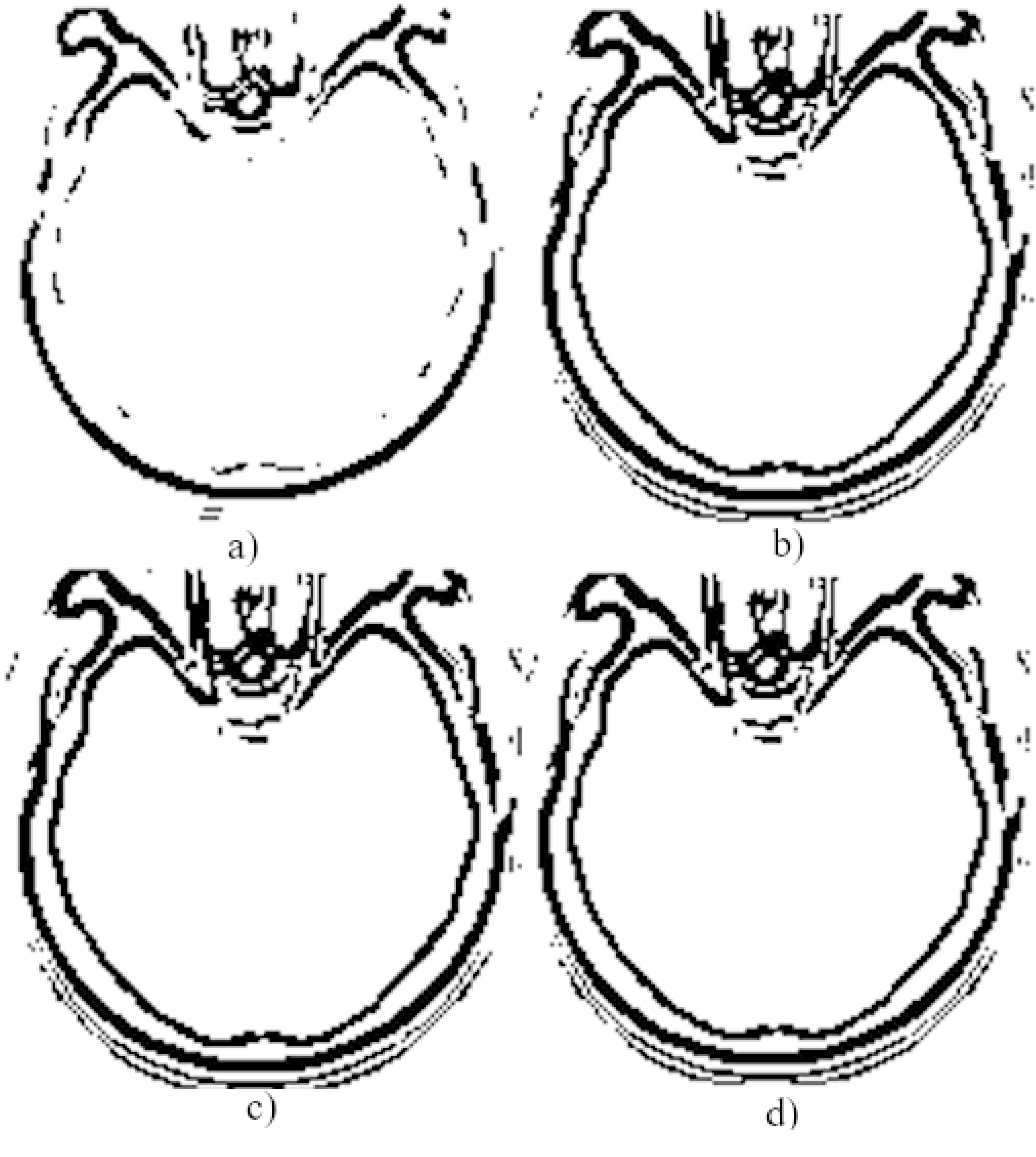

FIGURA 1. Rezultatele execuţiei algoritmului *HIMP-SAM* pentru determinarea contururilor imaginii medicale *Brain CT* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ-*operator*.

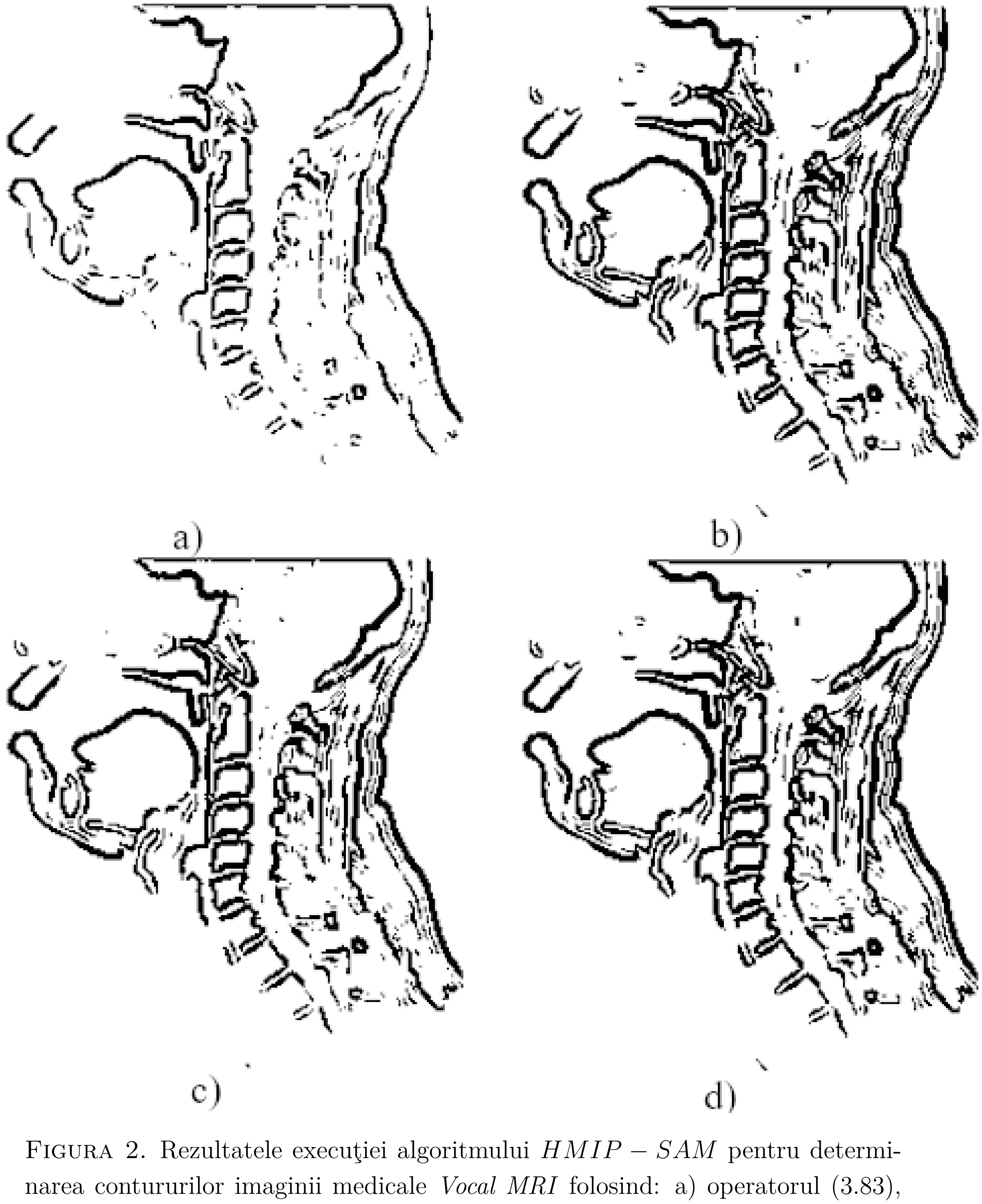

FIGURA 2. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea contururilor imaginii medicale *Vocal MRI* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ-*operator*.

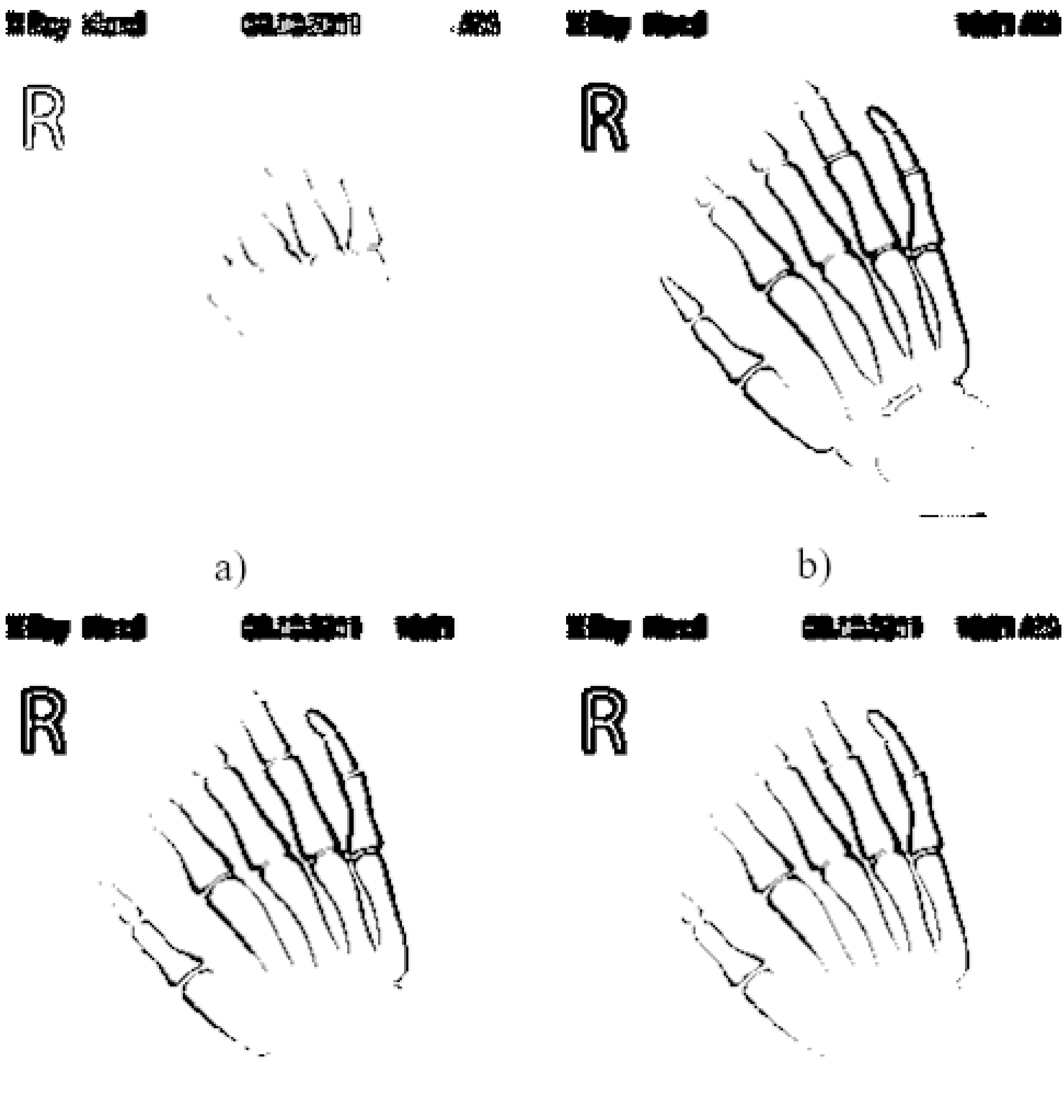

FIGURA 3. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea contururilor imaginii medicale *Hand X-ray* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ*-operator*.

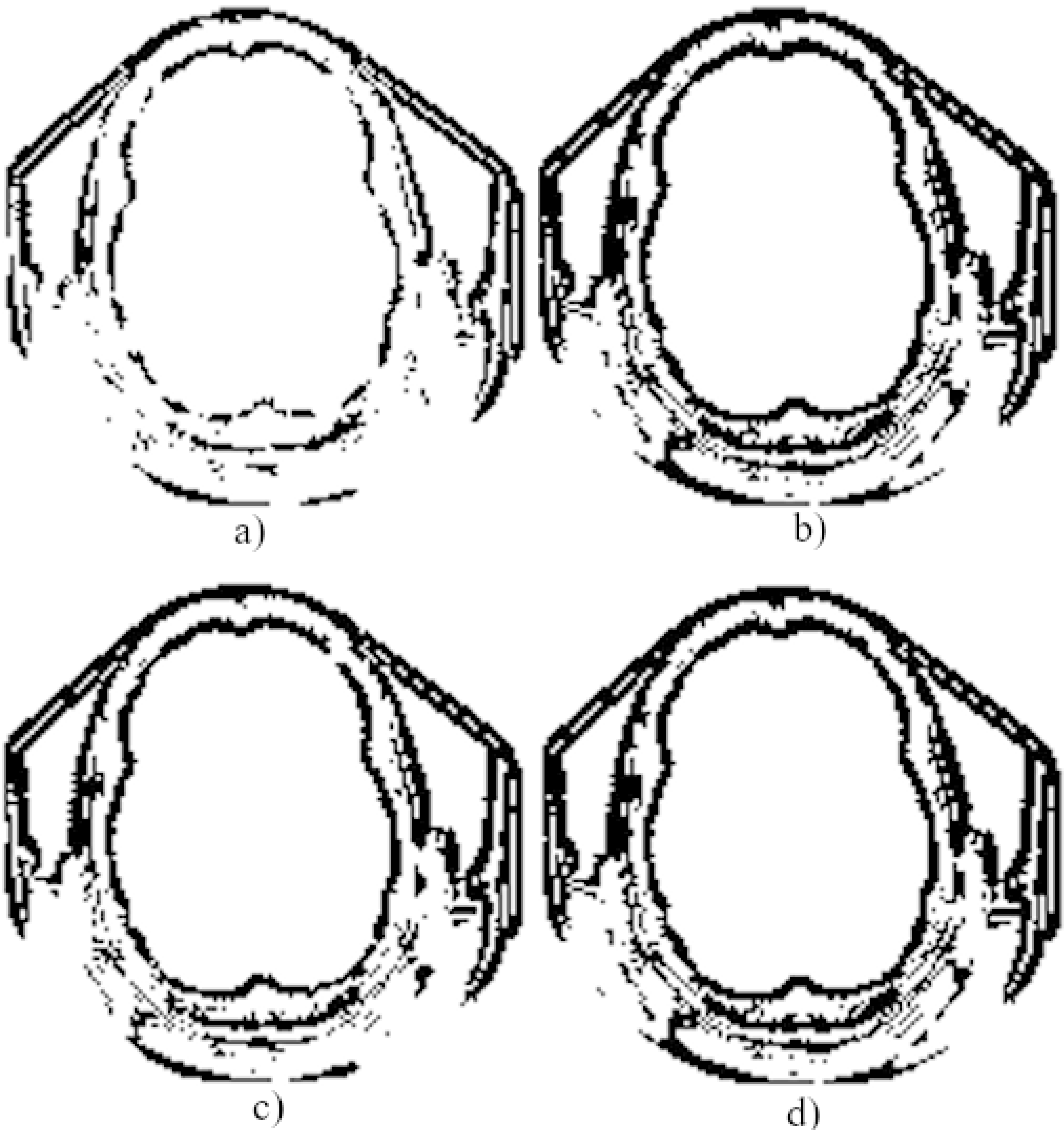

FIGURA 4. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP-SAM$ pentru determinarea contururilor imaginii medicale *Head CT* folosind: a) operatorul (3.83), b) operatorul (3.84), c) operatorul inovator propus: (3.85) *KH-operator*, d) operatorul inovator propus: (3.86) χ-*operator*.

	Operator (3.83)	Operator (3.84)	Operator inovator (3.85)	Operator inovator (3.86)
$Brain\_CT$				
$HIMP-SAM$	584	1568	1685	1662
$ACO-edge\_detection$	53	63	61	45
$Vocal\_MRI$				
$HIMP-SAM$	2605	6111	4789	5820
$ACO-edge\_detection$	85	108	233	143
$Hand\ X-ray$				
$HIMP-SAM$	786	1531	1224	1049
$ACO-edge\_detection$	468	610	555	1225
$Head\_CT$				
$HIMP-SAM$	943	1920	1538	2007
$ACO-edge\_detection$	51	126	131	155

Tabelul 1. Rezultatul contorizării pixelilor la determinarea contururilor imaginilor medicale (*Brain CT, Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT*) obţinut de *HIMP-SAM* (etichetat), dar nedetectaţi cu *ACO - edge detection* şi, respectiv, cei detectaţi cu *ACO - edge detection* (etichetat), dar nedetectaţi cu *HIMP-SAM.*

Contururi suprapuse	*Brain CT*	*Vocal MRI*	*Hand X-ray*	*Head CT*
$HIMP-SAM$	693	3146	1145	673
$ACO-edge\_detection$	150	359	398	310

Tabelul 2. Rezultatul contorizării pixelilor la determinarea contururilor **suprapuse** ale imaginilor medicale (*Brain CT, Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT*) cu (*HIMP-SAM*) şi fără factorul de sensibilitate PSL ($ACO-edge\_detection$) similar cu Tabelul 1.

În Tabelul 1 şi Tabelul 2 pe liniile etichetate *HIMP-SAM* este prezentat numărul de pixeli care au fost obţinuţi în urma aplicării algoritmului *HIMP-SAM* şi nu au fost detectaţi folosind algoritmul *ACO - edge detection*; pe liniile etichetate cu *ACO - edge detection* este prezentat numărul de pixeli care au fost detectaţi cu *ACO-edge detection* şi nu fost detectaţi cu *HIMP-SAM*. După cum se poate observa, aplicarea algoritmului propus în acest capitol, *HIMP-SAM*, a produs rezultate net îmbunătăţite faţă de algoritmul *ACO - edge detection.*

Tabelul 2 prezintă rezultatele obţinute la detectarea contururilor suprapuse ale imaginilor medicale *Brain CT, Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT* cu algoritmul *ACO - edge detection* şi algoritmul *HIMP-SAM.*

După cum se observă din Tabelele 1-2 şi Figurile 1- 5, aplicarea algoritmului propus *HIMP-SAM*, a produs rezultate net superioare algoritmului *ACO - edge detection*.

Analiza rezultatelor.

- **Timp de rulare.**

  Timpul de execuţie pentru fiecare metodă de extragere a conturului imaginii este comparabil cu timpul obţinut în [**86**] şi timpul din Capitolul 3 pentru *ACO - edge detection*.

- **Rolul operatorilor demicontractivi.**

  În continuare se prezintă compararea rezultatelor obţinute cu diverşi operatori în algoritmul *HIMP-SAM*.

  - **Rezultatele operatorului inovator propus *KH-operator*** (3.85) **în comparaţie cu ceilalţi operatori.**

    Pentru comparare, s-au contorizat pixelii obţinuţi cu ajutorul operatorului de perturbare admisibilă inovator propus (3.85). *KH-operator* a detectat cu 1434 pixeli de contur în plus faţă de operatorul (3.83); cu 40 pixeli în plus faţă de operatorul (3.84) şi cu 48 pixeli în plus faţă de operatorul (3.86)χ-*operator*.

    La contorizarea inversă au fost găsiţi 1, 24, respectiv 21 pixeli cu ajutorul operatorilor (3.83), (3.84), respectiv (3.86), pe care (3.85) *KH-operator* nu i-a găsit.

  - **Rezultatele operatorului inovator propusχ-*operator*** (3.86) **în comparaţie cu ceilalţi operatori.**

    Aceleaşi comparaţii au fost realizate şi pentru operatorul (3.86) în raport cu operatorii (3.83) şi (3.84); s-au găsit 1407 pixeli în plus pe conturul determinat de perturbarea "χ", (3.86), respectiv nici un pixel pe care nu i-a indicat operatorul (3.83) dar au fost găsiţi de operatorul (3.86).

    La căutarea inversă, operatorii (3.84), respectiv (3.85) au găsit 1 pixel, respectiv 11 pixeli pe care operatorul (3.86) nu i-a determinat ca fiind pe contur.

- În **concluzie**, şi de această dată, operatorii perturbare admisibilă au fost folosiţi cu succes în algoritmii de detectare a conturului. În plus algoritmul *HIMP-SAM* a adus o îmbunătăţire majoră a calităţii contururilor extrase.

  În continuare am suprapus contururile originale peste cele obţinute cu cei patru operatori, pentru fiecare imagine. Toate contururile s-au suprapus perfect pe linia structurilor osoase din imagine (Figura 5).

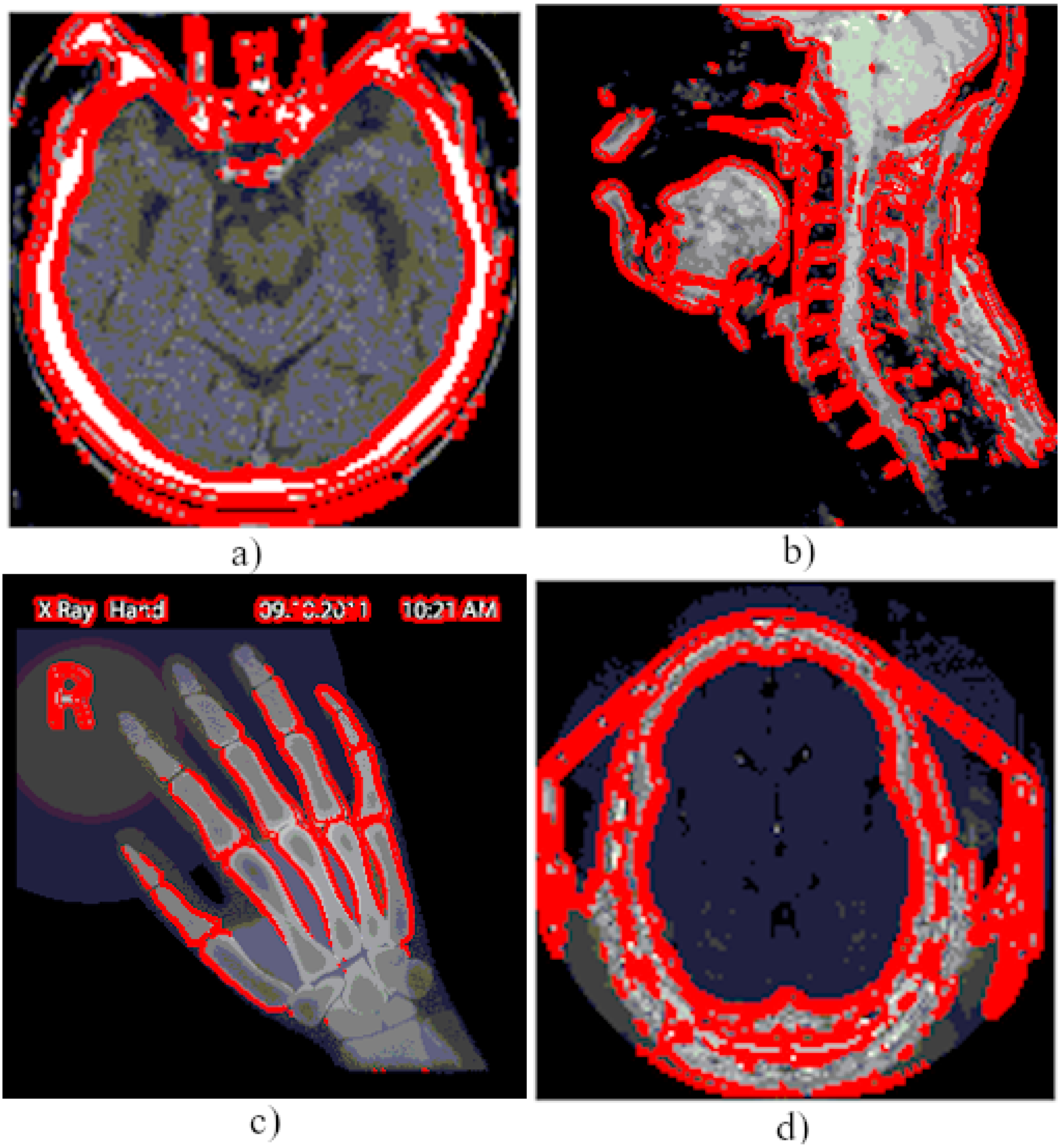

Figura 5. Rezultatele suprapunerii contururilor imaginii originale peste conturul obţinut folosind algoritmul $HMIP - SAM$: *a) Brain CT; b) Vocal MRI, c) Hand X-ray, d) Head CT.*

4.5. Compararea rezultatelor practice în rezolvarea problemei de detectare a conturului imaginilor medicale segmentate folosind colonii de furnici cu şi fără factor de sensibilitate

Segmentarea imaginilor este necesară pentru acurateţea imaginii: există zone puţin evidente ce trebuie evidenţiate în contur.

Segmentarea s-a făcut împărţind imaginea în 16 zone de aceeaşi mărime, a fost detectat conturul fiecărei zone, în parte, şi apoi s-au construit din contururile parţiale conturul întregii imagini. Pentru verificarea acurateţei imaginii am suprapus contururile obţinute după segmentare peste imaginile originale.

	Operator (3.83)	Operator (3.84)	Operator inovator (3.85)	Operator inovator (3.86)
$Brain\_CT$				
$HIMP-SAM$	567	1313	1175	1067
$ACO-edge\_detection$	25	146	184	98
$Vocal\_MRI$				
$HIMP-SAM$	1780	3944	3305	3025
$ACO-edge\_detection$	455	682	565	388
$Hand\ X-ray$				
$HIMP-SAM$	1539	2872	4056	2824
$ACO-edge\_detection$	187	287	440	264
$Head\_CT$				
$HIMP-SAM$	589	1107	1188	932
$ACO-edge\_detection$	92	259	286	175

TABELUL 3. Rezultatul contorizării pixelilor la determinarea contururilor imaginilor medicale segmentate (*Brain CT, Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT*) obţinut de *HIMP-SAM* (etichetat), dar nedetectaţi cu *ACO - edge detection* şi, respectiv, cei detectaţi cu *ACO - edge detection* (etichetat), dar nedetectaţi cu *HIMP-SAM.*

Contururi suprapuse	*Brain CT*	*Vocal MRI*	*Hand X-ray*	*Head CT*
$HIMP-SAM$	488	1510	2489	451
$ACO-edge\_detection$	283	977	583	488

TABELUL 4. Rezultatul contorizării pixelilor la determinarea contururilor **suprapuse** ale imaginilor medicale segmentate (*Brain CT, Vocal MRI, Hand X-ray* şi *Head CT*) cu (*HIMP-SAM*) şi fără factorul de sensibilitate *PSL* ($ACO-edge\_detection$) similar cu Tabelul 3.

FIGURA 6. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Brain CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

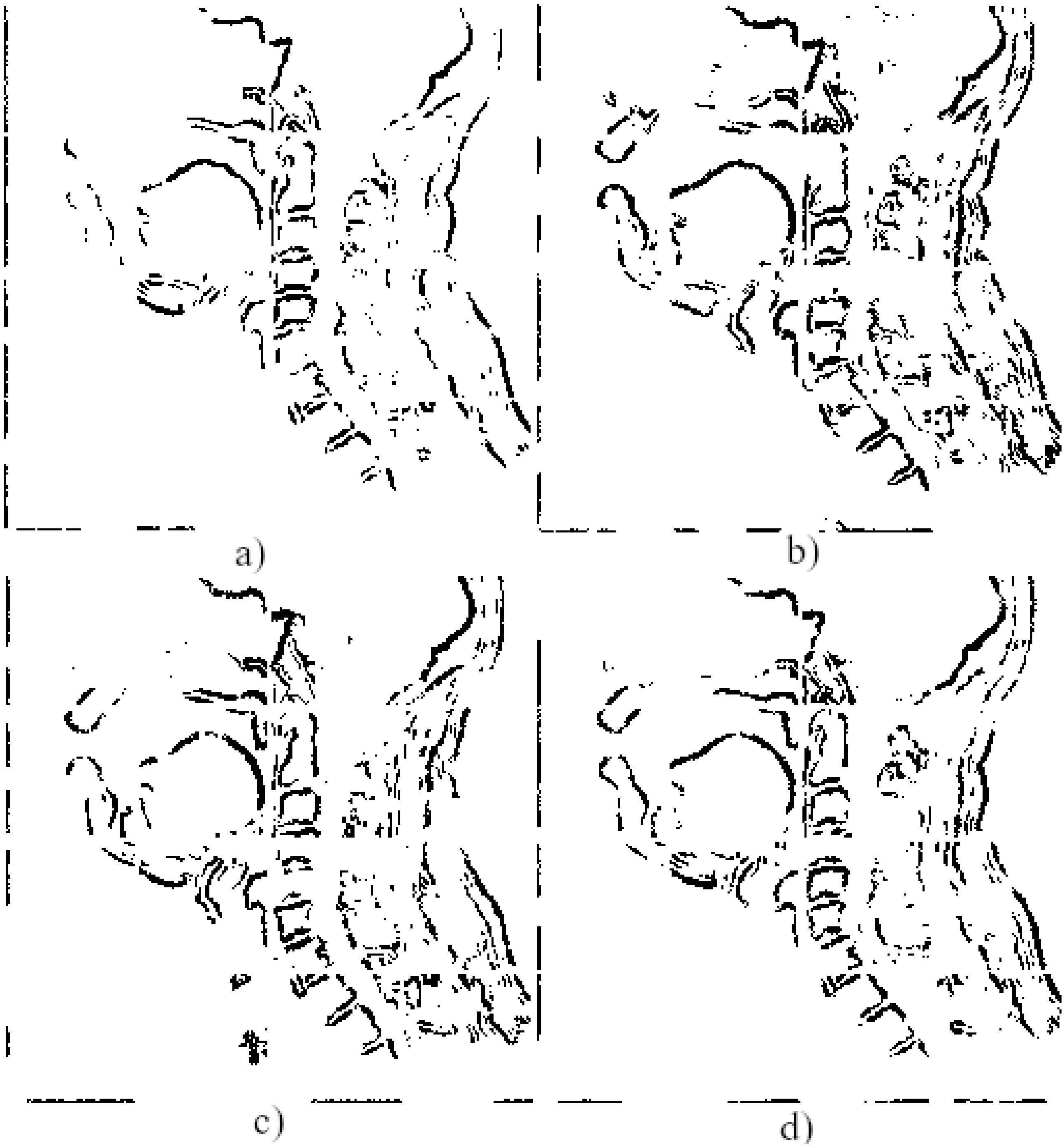

FIGURA 7. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Vocal MRI* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

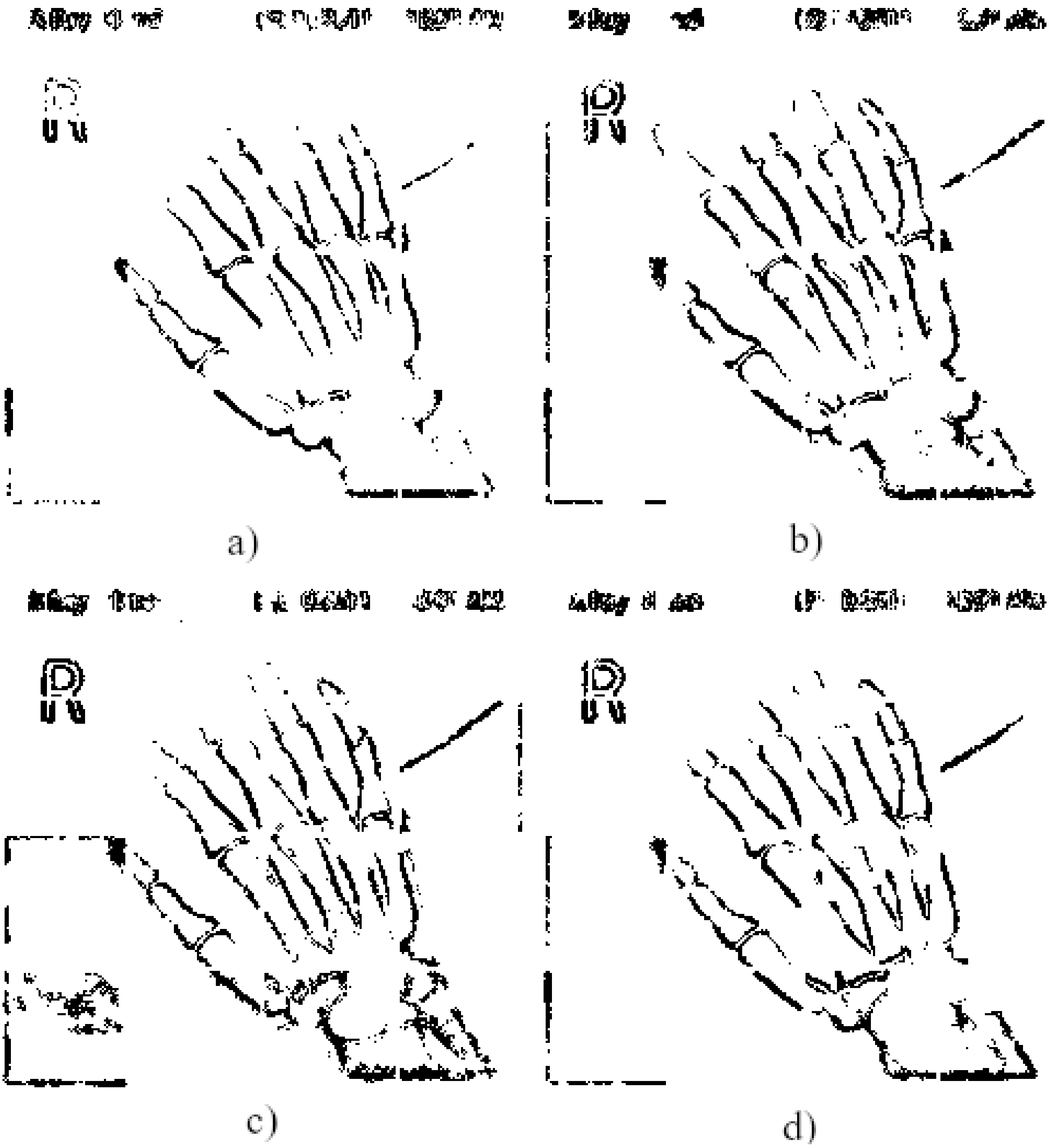

Figura 8. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Hand X-ray* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ*-operator*).

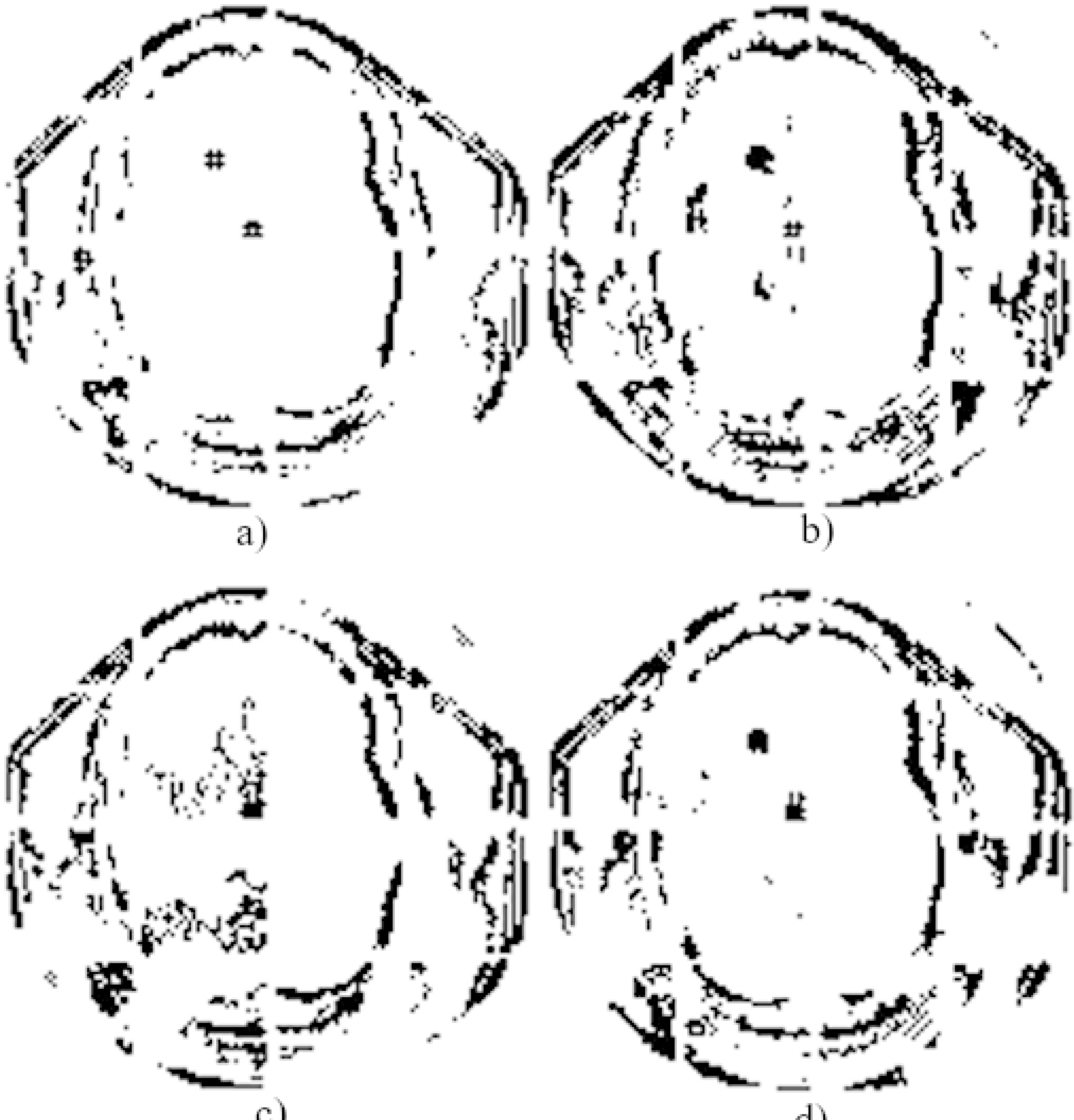

FIGURA 9. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Head CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

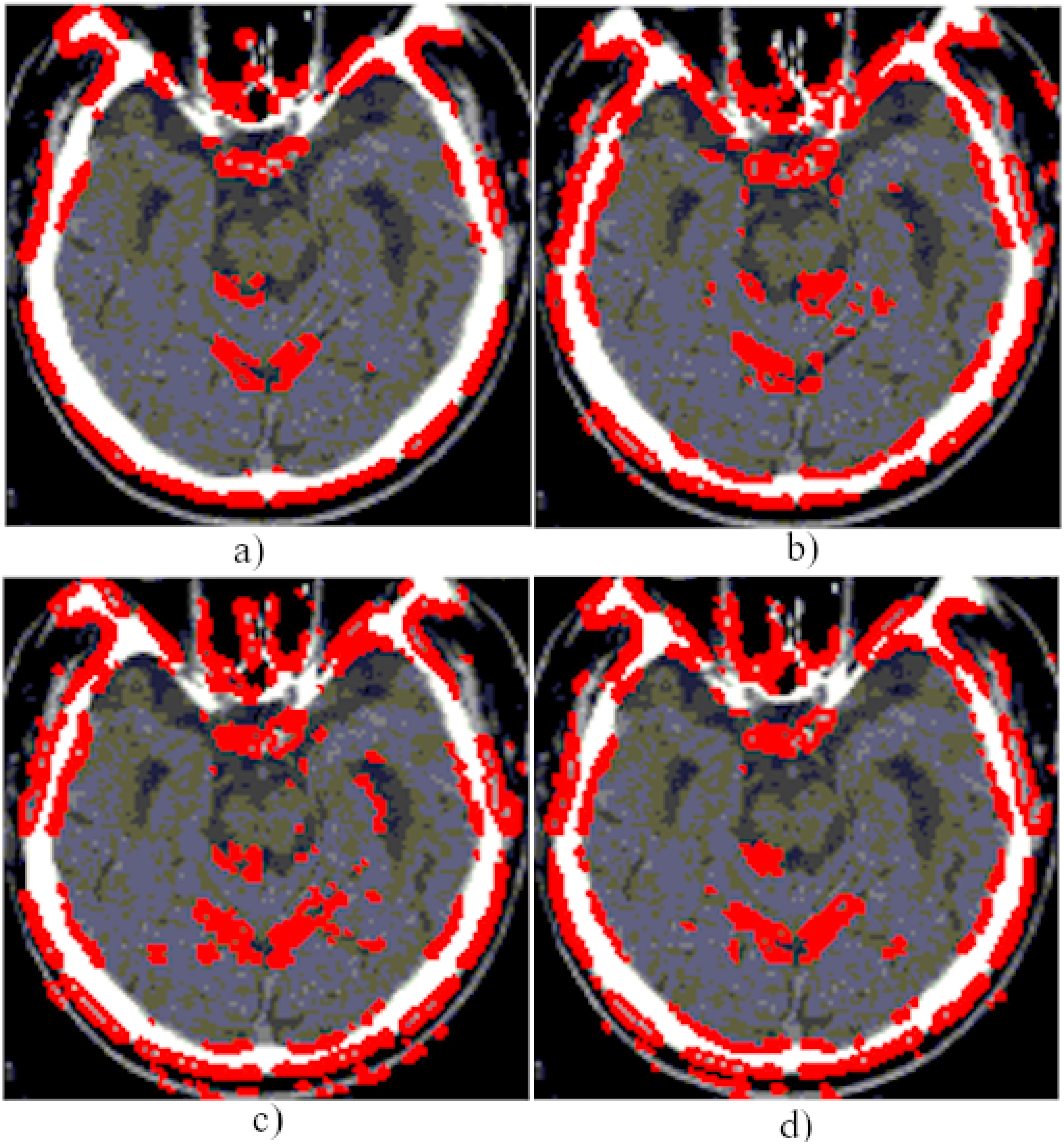

FIGURA 10. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Brain CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ*-operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

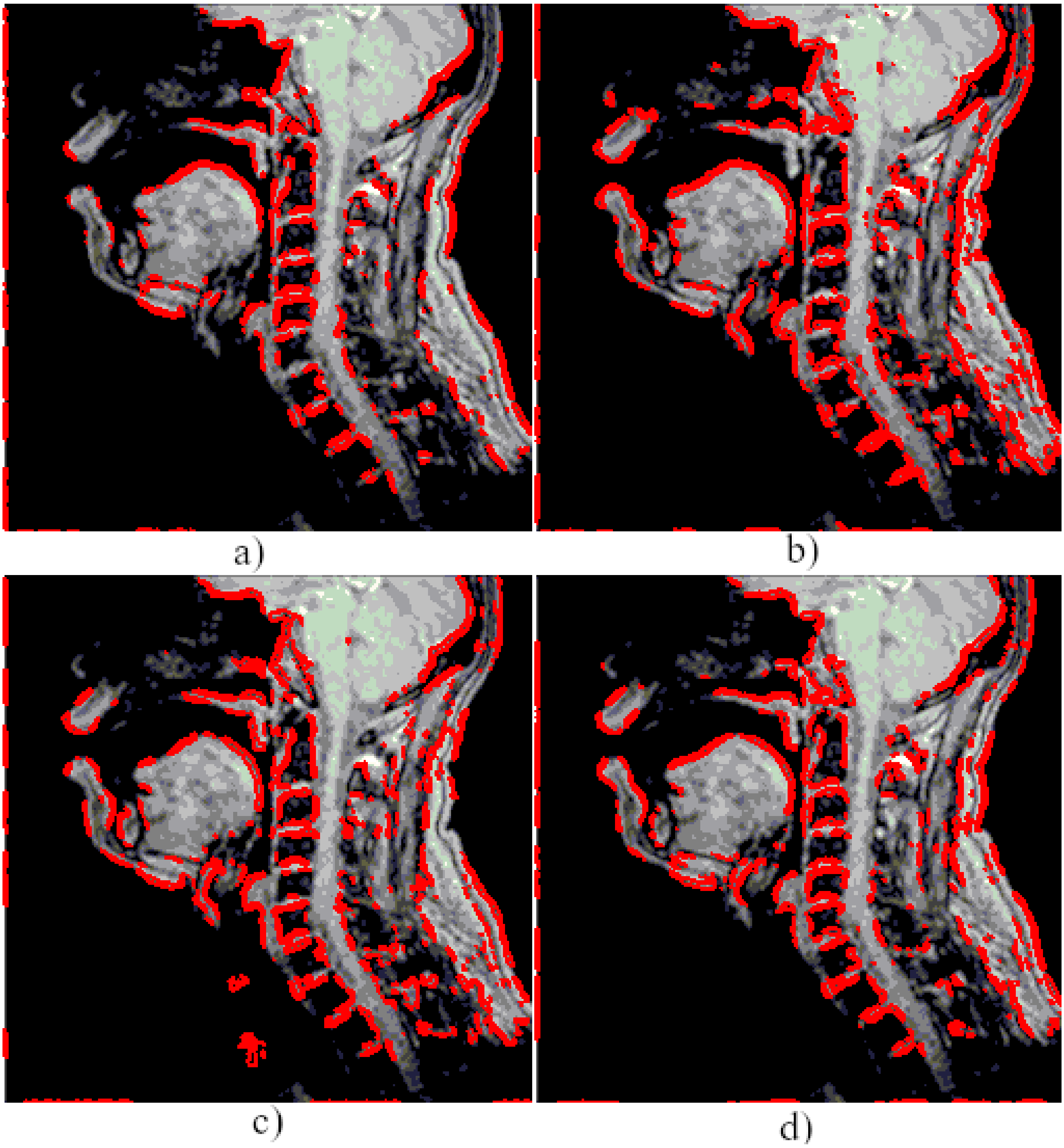

Figura 11. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Vocal MRI* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

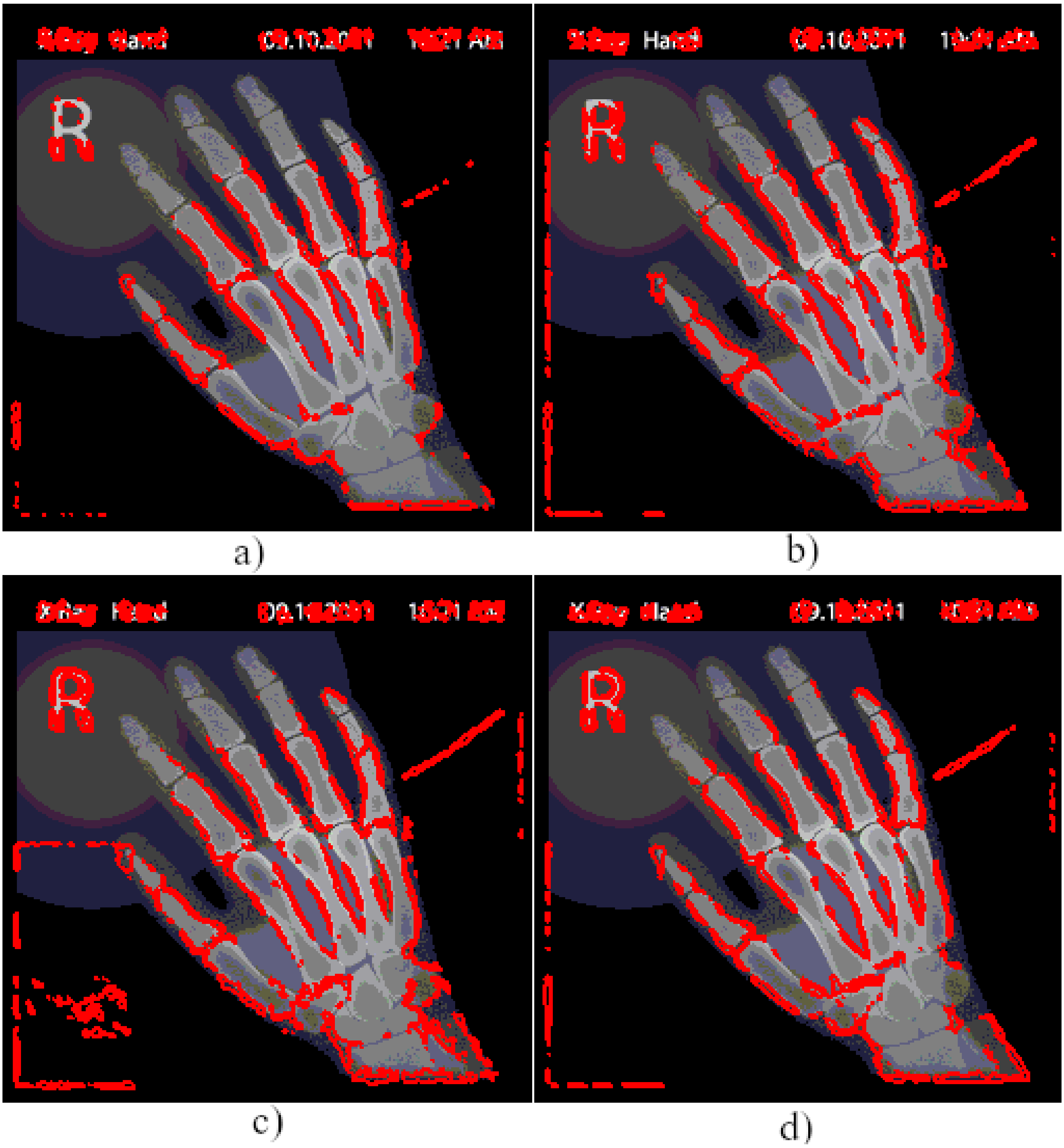

FIGURA 12. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Hand X-ray* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ*-operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

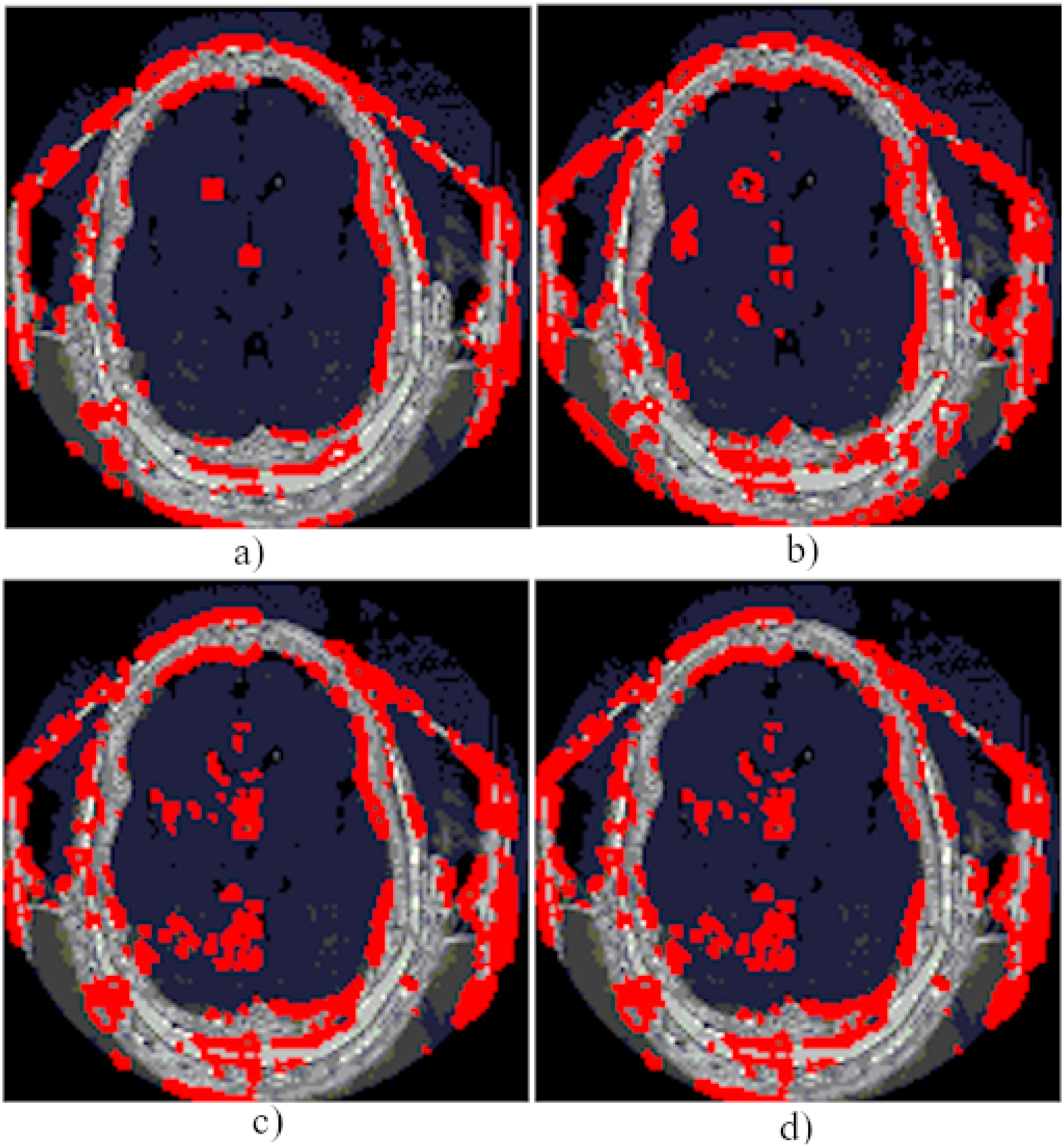

FIGURA 13. Rezultatele execuţiei algoritmului *ACO - edge detection* pentru determinarea conturului imaginii medicale *Head CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ*-operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

Pentru setul de imagini *Brain CT*, *Vocal MRI*, *Hand X-ray* şi *Head CT* avem următoarele contururi obţinute prin segmentare folosind operatorii (a)(3.83)-d)(3.86)):

- Folosind *ACO*-ACO - edge detection: Figurile 6-8 şi Figurile 10-13 suprapuse peste imaginea originală.
- Folosind $HMIP - SAM$: Figurile 14-16 şi Figurile 18-21 suprapuse peste imaginea originală.

Analiza rezultatelor pentru imagini medicale segmentate.

- **Timp de rulare.**

  Timpul de execuţie este similar cu cel al rulărilor obţinut în Capitolul 3.
- **Rolul operatorilor demicontractivi.**
  - **Rezultatele operatorului inovator propus *KH-operator*** (3.85) **în comparaţie cu ceilalţi operatori.**

    [*] *ACO - edge detection*: Numărul de pixeli detectaţi folosind (3.85) în plus faţă de (3.83) cu 1131, (3.84) cu 887 şi (3.86)χ*-operator*cu 722 pixeli. La contorizarea inversă au fost găsiţi: 174, 658, respectiv 503 pixeli cu (3.83), (3.84), respectiv (3.86), nedetectaţi de (3.85) *KH-operator*.

    [*] $HMIP - SAM$: Numărul de pixeli detectaţi folosind (3.85) *KH-operator*: cu 1414 pixeli de contur în plus faţă de (3.83); cu 189 pixeli în plus faţă de (3.84) şi cu 285 pixeli în plus faţă de (3.86)χ*-operator*. La contorizarea inversă au fost găsiţi 8, 136, respectiv 44 pixeli cu (3.83), (3.84), respectiv (3.86), nedetectaţi de (3.85) *KH-operator*.
  - **Rezultatele operatorului inovator propusχ*-operator*** (3.86) **în comparaţie cu ceilalţi operatori.**

    [*] *ACO - edge detection*: Pentru operatorul (3.86) în raport cu (3.83) şi (3.84) sunt 891 pixeli în plus pe conturul determinat de perturbarea "χ", (3.86), respectiv 678 pixeli neindicaţi de (3.83) dar găsiţi de (3.86). La căutarea inversă, sunt 153 pixeli cu (3.83) şi 668 pixeli cu (3.84) nedetectaţi de (3.86) pe contur.

    [*] $HMIP - SAM$: Pentru operatorul (3.86) în raport cu (3.83) şi (3.84) s-au găsit 1169 pixeli în plus pe conturul determinat de perturbarea "χ", (3.86), 29 pixeli neindicaţi de (3.83) dar găsiţi de (3.86). La căutarea inversă, s-au găsit 4 pixeli cu (3.83) şi 217 pixeli cu (3.84) nedetectaţi de (3.86) pe contur.
- Pe baza rezultatelor expuse se poate desprinde **concluzia** următoare: în rezolvarea problemei de detectare a conturului imaginilor medicale segmentate, similar cu rezolvarea problemei de detectare a conturului imaginilor medicale iniţiale, nesegmentate, $HMIP - SAM$ este superior algoritmului *ACO - edge detection*.

s

FIGURA 14. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Brain CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

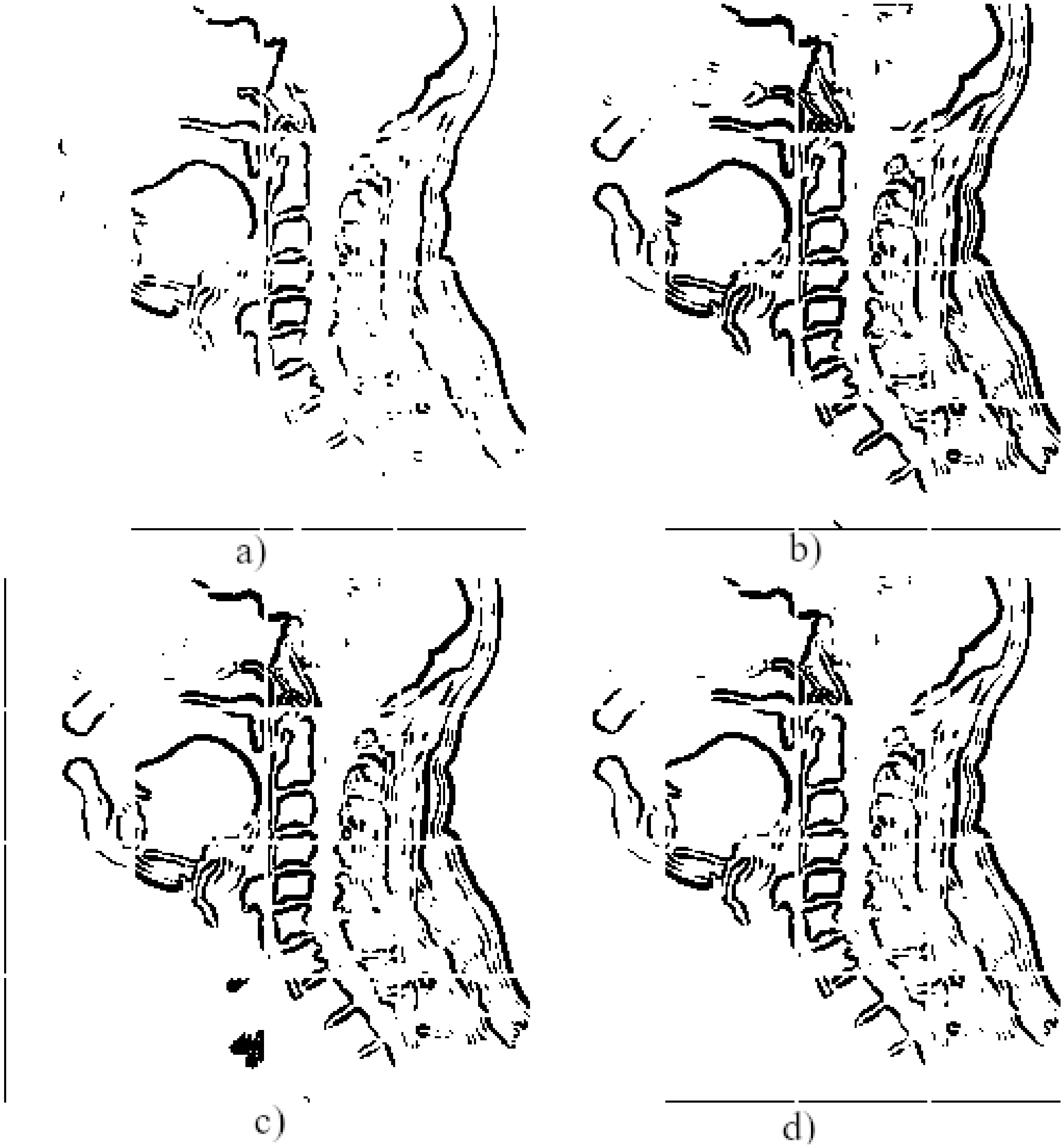

FIGURA 15. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Vocal MRI* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

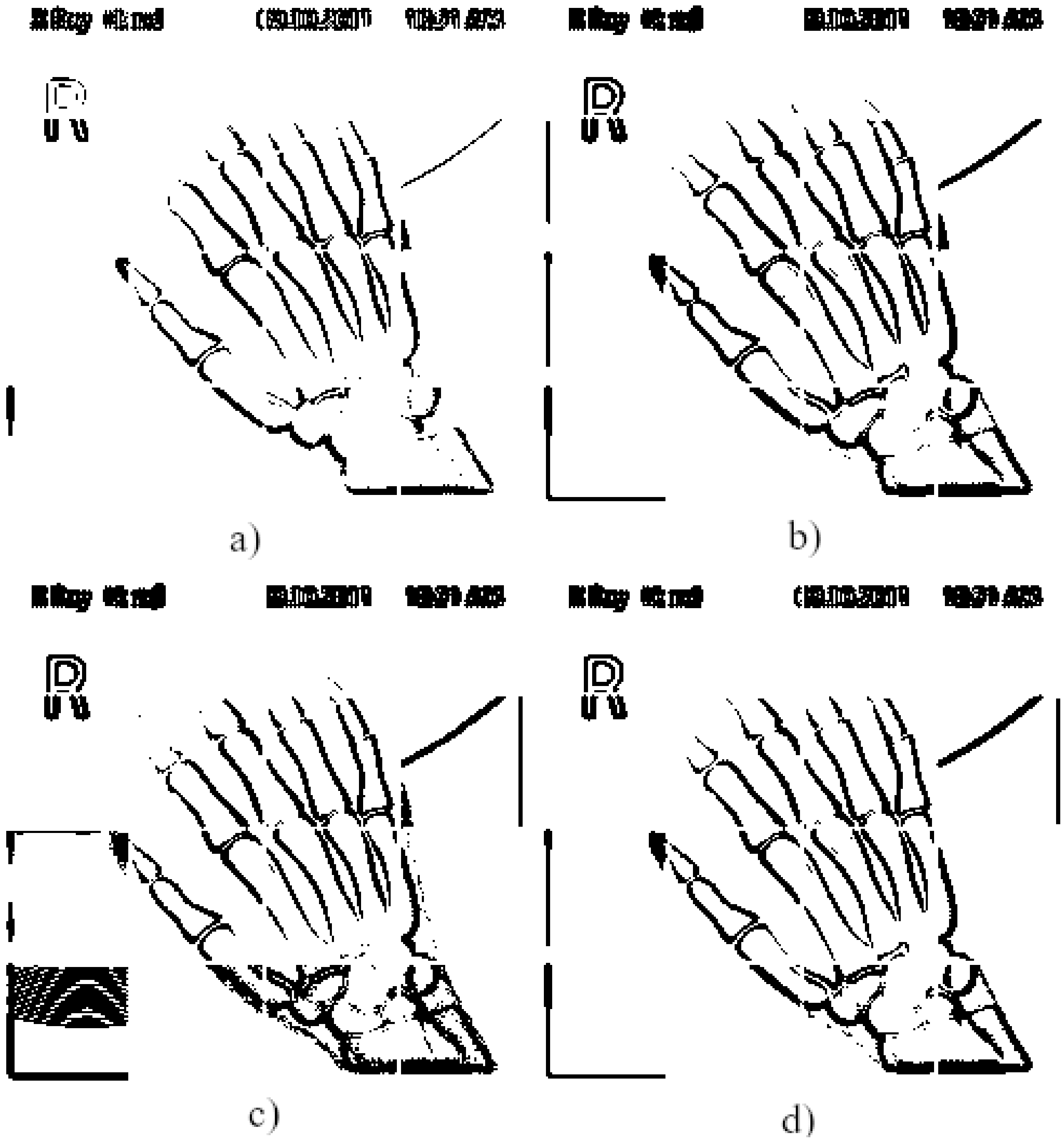

FIGURA 16. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Hand X-ray* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

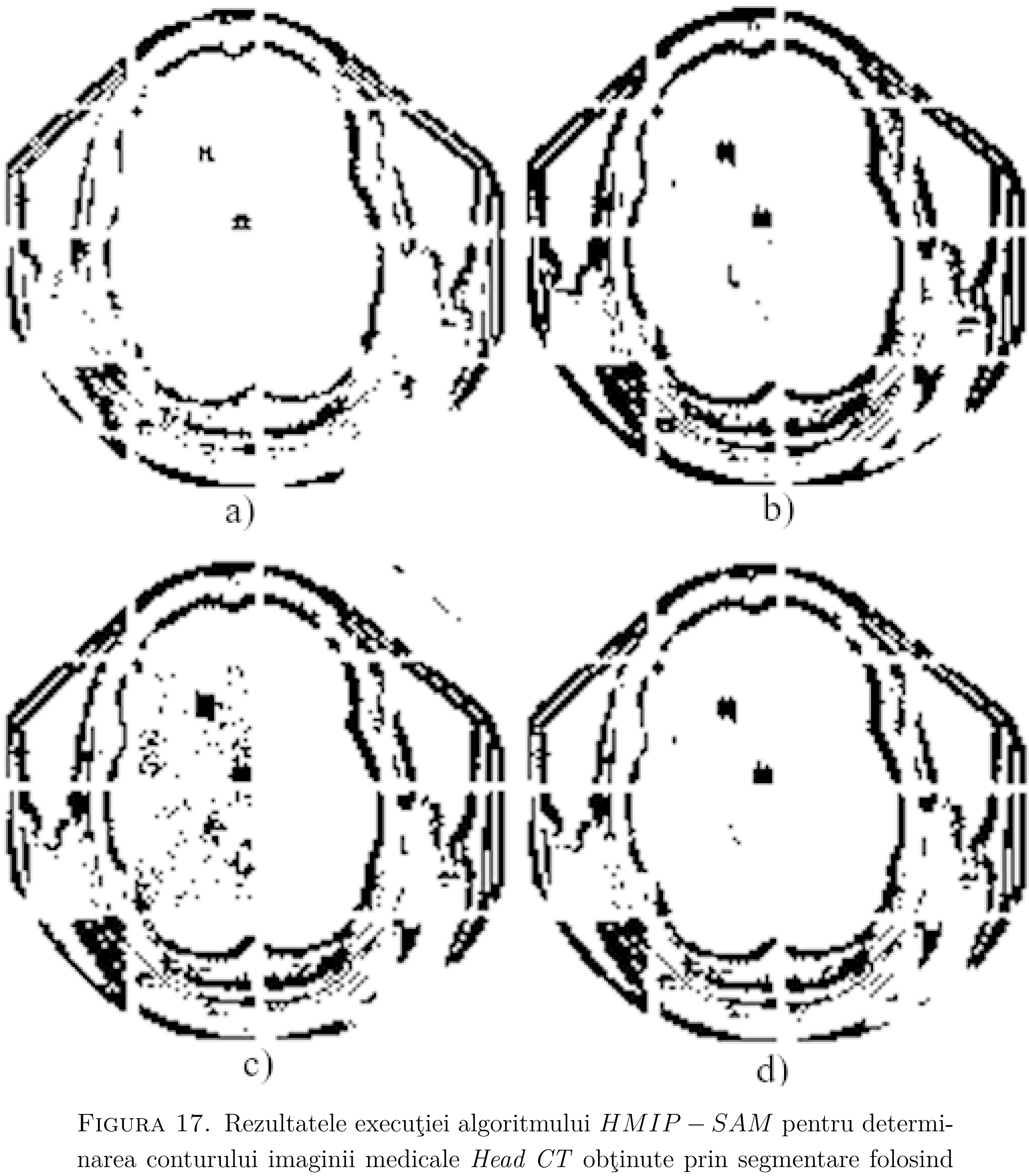

FIGURA 17. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Head CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*).

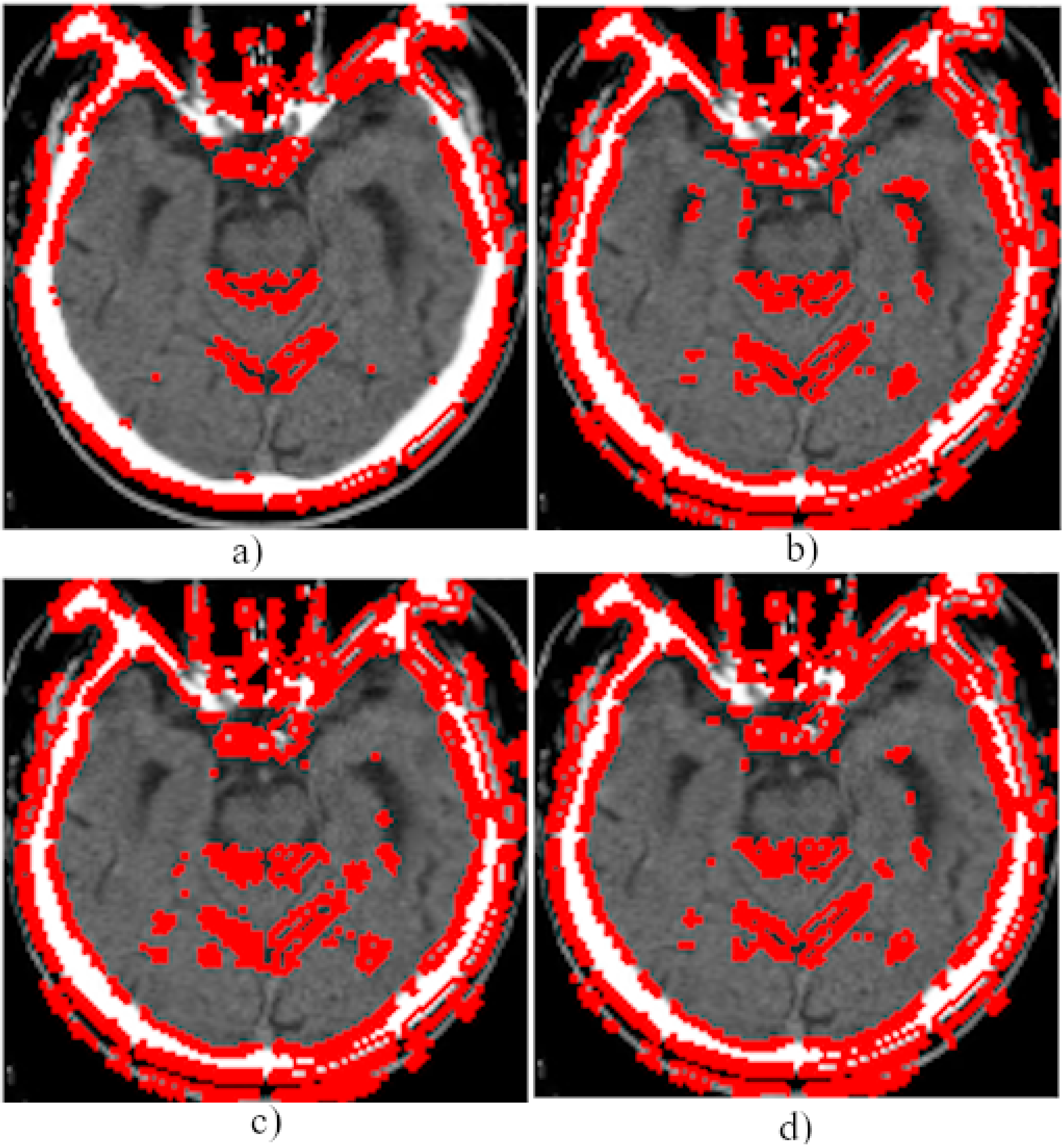

FIGURA 18. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Brain CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

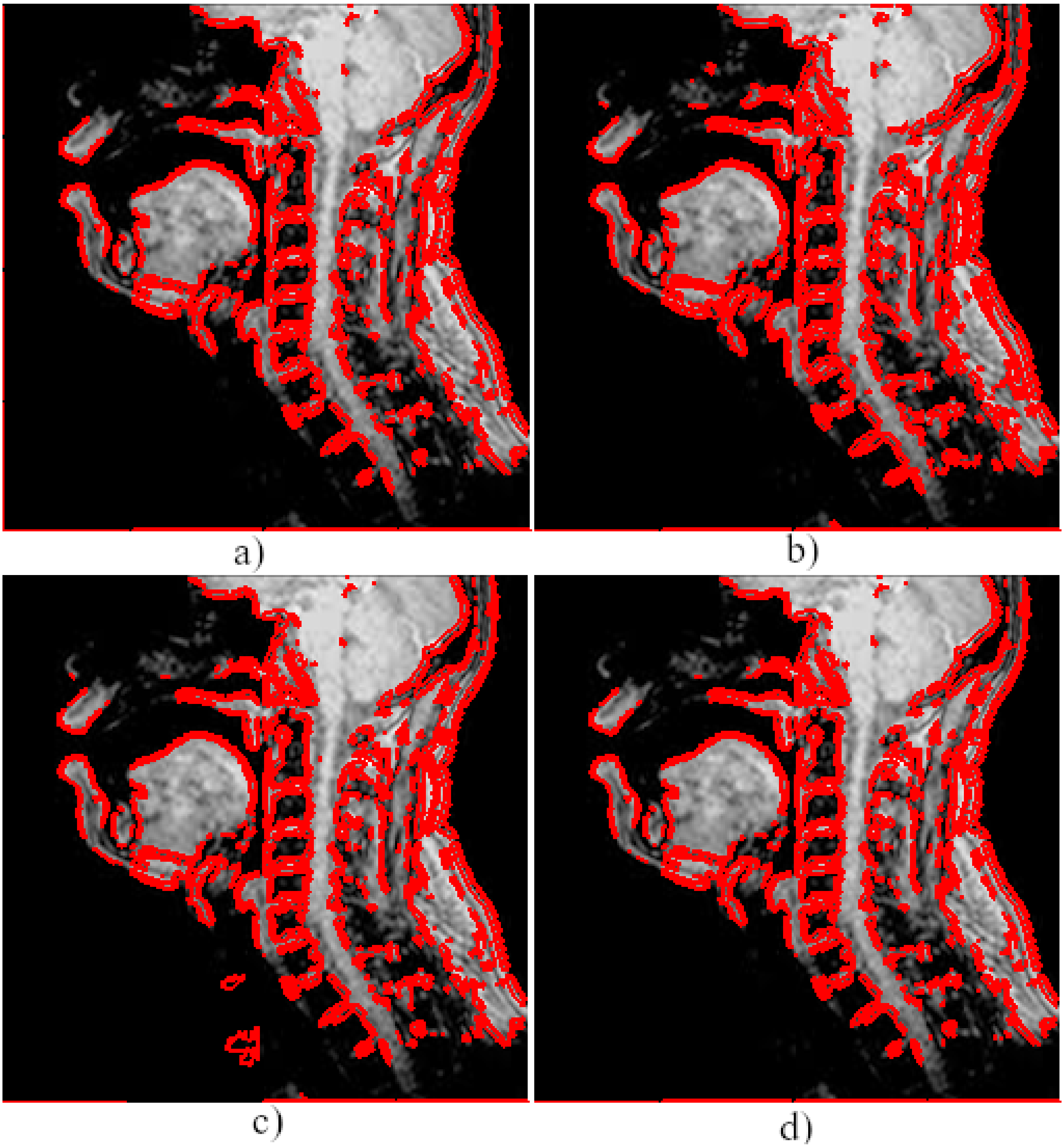

FIGURA 19. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP-SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Vocal MRI* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

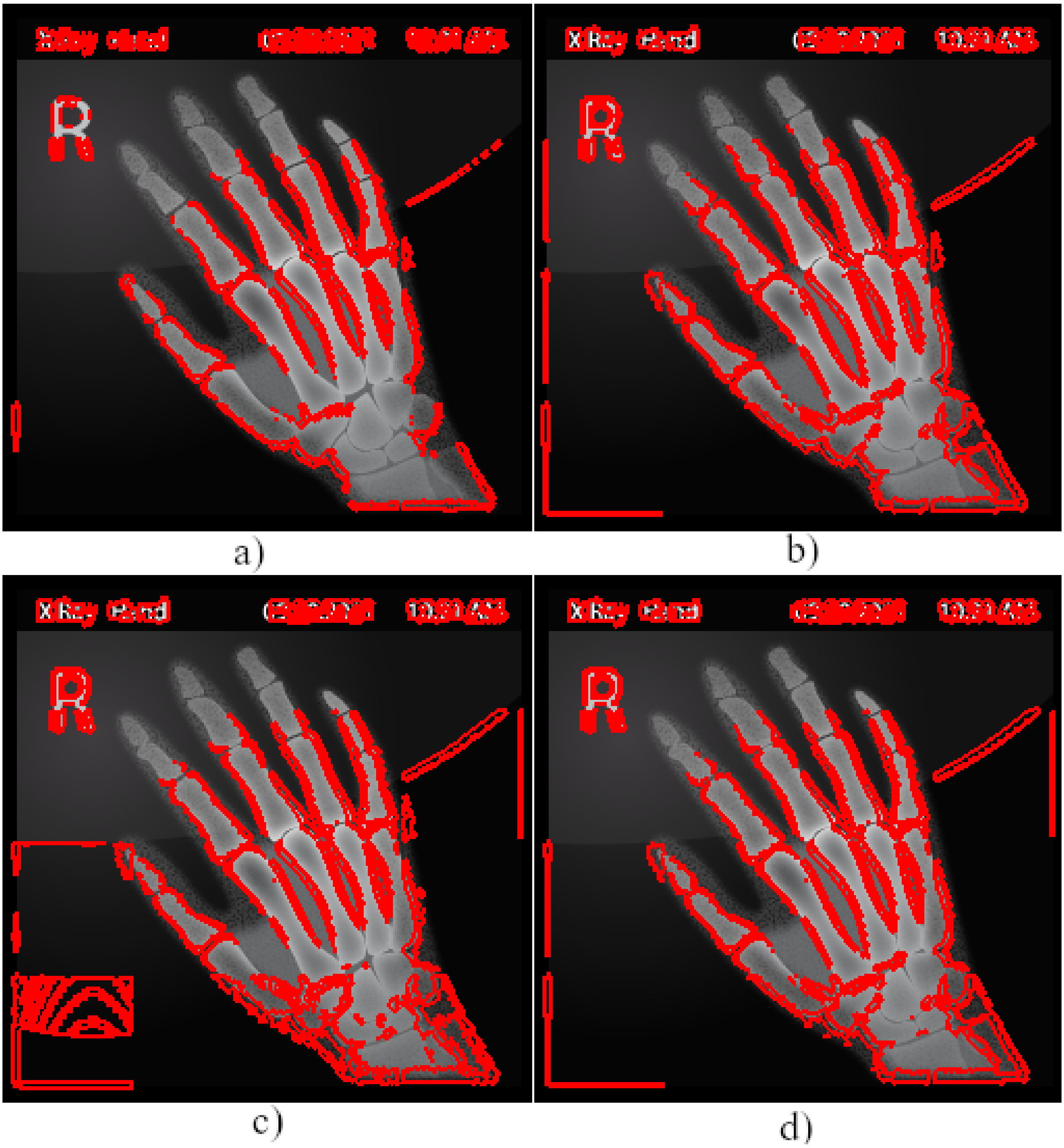

FIGURA 20. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Hand X-ray* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ*-operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

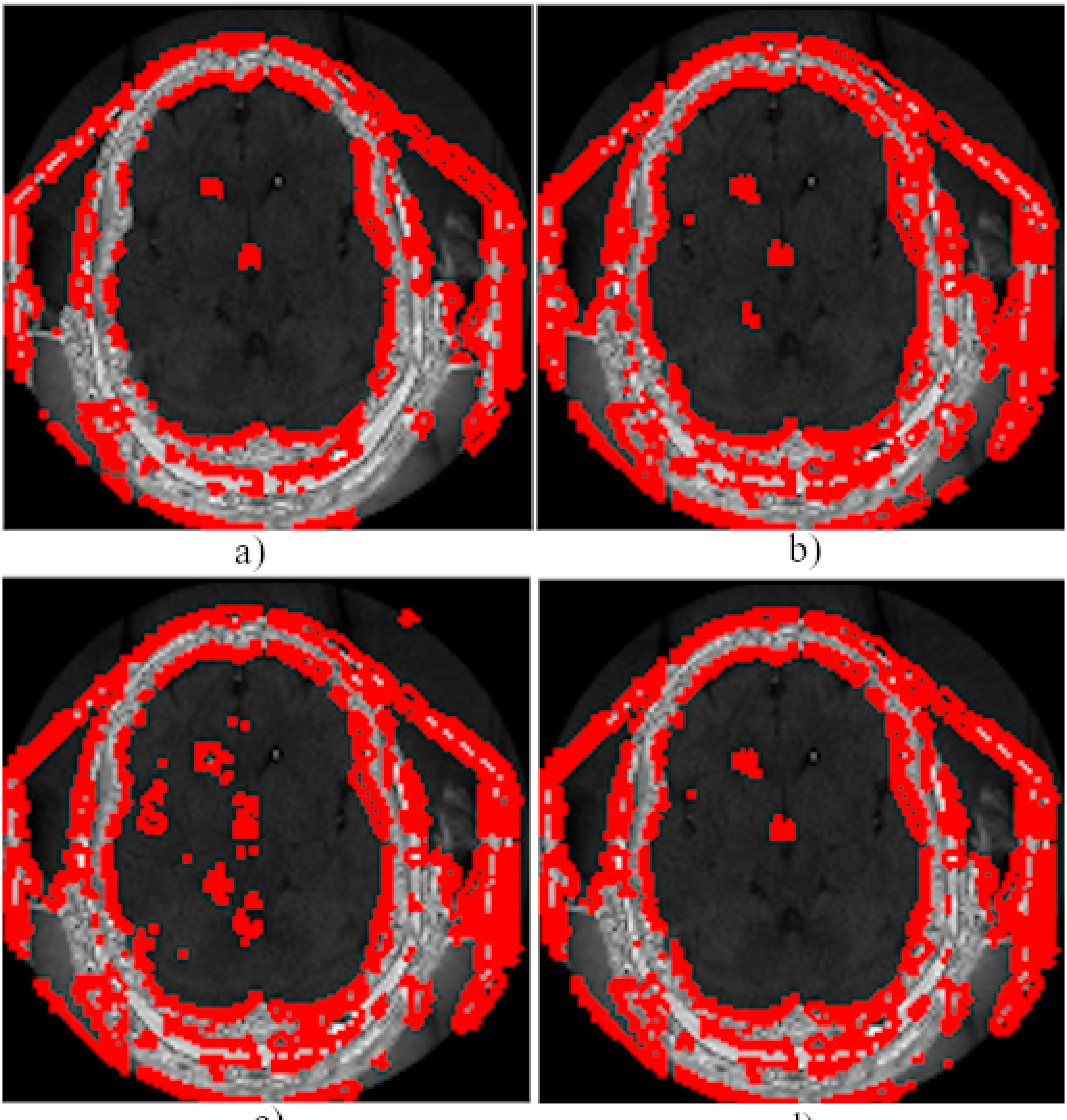

FIGURA 21. Rezultatele execuţiei algoritmului $HMIP - SAM$ pentru determinarea conturului imaginii medicale *Head CT* obţinute prin segmentare folosind operatorii de testare: a) (3.83), b) (3.84), c) (3.85) *KH-operator*, d) (3.86) χ-*operator*) şi suprapuse peste imaginea originală.

4.6. Concluzie

În capitolul de faţă se propune un nou algoritm pentru extragerea conturului imaginilor medicale - Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model ($HMIP-SAM$). Se prezintă rezultatele folosirii algoritmului pentru un set specific de imagini medicale (Figura 4). Se fac comparaţii între rezultatele obţinute cu ACO - edge detection şi $HMIP-SAM$. Se prezintă rezultatele obţinute în urma segmetării imaginilor medicale din Figura 4.

Contururile extrase sunt grupate. Figura 1 conţine contururile extrase folosind algoritmul $HMIP-SAM$ pentru imaginea 4 a) şi operatorii (3.83), (3.84), (3.85), respectiv (3.86). Analog, Figura 2 este compusă din contururile extrase folosind algoritmul $HMIP-SAM$. Contribuţiile personale din acest capitol sunt propunerea algoritmului *Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model* ($HMIP-SAM$) specific pentru imagistica medicală; detectarea conturului imaginilor medicale folosind $HMIP-SAM$; utilizarea furnicilor artificiale sensibile la concentraţia de feromoni; segmentarea imaginilor originale şi extragerea conturului pe zone.

Rezultatele obţinute prin segmentare pentru PSL sunt mai bune decât cele fără factor de sensibilitate similar cu cele nesegmentate, inclusiv pentru contururile obţinute suprapuse peste imaginile originale.

CAPITOLUL 5

Concluzii şi perspective de cercetare

În această teză mi-am propus să realizez un studiu al unor metode iterative de aproximare a punctelor fixe prezentate în termenii perturbărilor admisibile şi să le aplic în rezolvarea unor probleme preluate din domenii aplicative.

Prima parte a acestei teze conţine o trecere în revistă a principalelor elemente teoretice folosite în lucrare. Mai precis, se prezintă conceptele de operatori demicontractivi, asimptotic demicontractivi, pseudo-contractivi, şi noţiunile legate de perturbarea admisibilă a unui operator. De asemenea sunt amintite noţiuni fundamentale din programarea combinatorială, se amintesc principalele metaeuristici inspirate de natură şi, în special, caracteristicile algoritmilor inspiraţi din modelul coloniei de furnici.

Lucrarea continuă cu prezentarea teoremelor de punct fix care descriu comportamentul operatorilor demicontractivi şi asimptotic demicontractivi cărora li s-a aplicat perturbarea admisibilă, prezintă o problemă de inegalităţi variaţionale pentru operatori generalizat pseudo-contractivi şi o teoremă de slabă convergenţă în termenii perturbărilor admisibile.

Teoremele de punct fix legate de perturbarea admisibilă a unui operator au la bază iteraţia Krasnoselskij. Pe viitor, doresc să cercetez comportamentul diverselor clase de operatori cărora li se aplică perturbarea admisibilă dar folosind alte tipuri de iteraţii cum ar fi iteraţiile Mann sau Ishikawa.

Capitolul trei leagă aspectele teoretice ale perturbărilor admisibile ale unui operator demicontractiv de problema extragerii conturului imaginilor medicale folosind algoritmi inspiraţi din modelul coloniei de furnici. Pentru ca mai apoi, în ultima parte a tezei să propun un algoritm care îmbunătăţeşte considerabil calitatea conturului imaginilor medicale extras cu ajutorul coloniilor de furnici şi a perturbărilor admisibile ale unui operator demicontractiv.

În general algoritmii inspiraţi de furnici, inclusiv cel propus în această lucrare *Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model* (*HMIP-SAM*) construiesc soluţia optimă a problemei ţintă folosind furnici artificiale. Acestea caută drumul optim, iterativ şi controlat în spaţiul de căutare, depozitând feromoni, după cum este descris şi în Capitolul [1] .

Calitatea unei soluţii parţiale este dată de cantitatea de feromon depusă pe parcurs. Soluţia globală este găsită după ce toate furicile au fost ghidate în regiuni mai promiţătoare din spaţiul de căutare, pe baza informaţiei dată de feromonii depuşi anterior. PSL echilibrează activităţile de explorare şi exploatare. Valorile din vectorul PSL sunt exprimate printr-un număr real din intervalul unitate $[0, 1]$; când valoarea este nulă, agentul ignoră complet informaţia dată de feromoni; când valoarea este 1, agentul are sensibilitate maximă la feromoni. O valoare scăzută din vectorul PSL indică că agentul va putea alege mişcări pe un traseu cu nivel ridicat de feromoni, este mai independent şi este un explorator al spaţiului de căutare; când valoarea

PSL este ridicată, agenţii sunt sensibili la urmele de feromoni şi vor exploata intensiv regiunile promiţătoare.

Procesul de învăţare produce o modificare în timp a sensibilităţii la feromoni: PSL creşte sau descreşte pe baza topologiei spaţiului de căutare, topologie încapsulată în experiaţa furnicilor, după cum a fost expus şi în lucrarea [**66**].

Dintre propunerile originale ale tezei amintim teoremele de punct fix din capitolul 2, cum ar fi: Teorema 2.2.2.80, Teorema 2.2.2.84, Corolarul 2.2.2.82, şi 2.2.2.83 care descriu comportamentul perturbării admisibile a unui operator demicontractiv; Lema 2.2.3.90 şi Teorema 2.2.3.91 referitoare la tare convergenţa perturbării admisibile a operatorilor asimptotic demicontractivi; Teorema 2.2.4.103 şi Teorema 2.2.4.104 privitoare la problema de inegalităţi variaţionale; Teorema 2.2.5.112 de slabă convergenţă.

Contribuţiile privitoare la algoritmii inspiraţi de furnici sunt propunerea operatorului (3.85) denumit KH-operator ce poate fi folosit ca funcţie test pentru construirea valorii euristicii din algoritmul ACO-edge detection; propunerea operatorului (3.86) denumit χ-operator ce poate fi folosit ca funcţie test pentru construirea valorii euristicii din algoritmul ACO-edge detection; propunerea algoritmului Hybrid Medical Image Processing-Sensitive Ant Model ($HMIP-SAM$) specific pentru imagistica medicală; detectarea conturului imaginilor medicale folosind HMIP-SAM; implementarea sensibilităţii furnicilor în algoritmul ACO pentru extragerea conturului imaginilor medicale; propunerea de segmentare a imaginilor înainte de detectarea conturului pentru ca apoi contururile obţinute să ofere o acurateţe mai mare a conturului extras; implementarea segmentării imaginilor înainte de extragerea conturului.

Domeniul medical şi în special tehnicile de imagistică specifice sunt o sursă inepuizabilă de cercetare. Pe viitor mă voi concentra pe îmbunătăţirea tehnicilor incluse în teza de faţă folosind modelarea matematică şi implementarea tehnicii informatice.

Bibliografie

[1] *X-ray hand. vista medical pack. license: Free for non commercial use. id, 236487. available online: https://www.iconspedia.com/*, (accessed on 1 May 2020).

[2] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space.*, Nonlinear Anal., **67** (2007), 2350–2360.

[3] D. Ariza-Ruiz, G. Acedo, and V. Martin-Marquez, *Firmly nonexpansive mappings*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **15** (2014).

[4] A. Asha, S. P. Victor, and A. Lourdusamy, *Feature Extraction in Medical Image using Ant Colony Optimization: A Study.*, Int. J. Comp. Sci. Eng., **3.2** (2011), 714– 721.

[5] S Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et léur applications aux équations intégrales.*, Fund. Math., **3** (1922), 133 – 181.

[6] H. H. Bauschke and Jonathan M. Borwein, *On Projection Algorithms for Solving Convex Feasibility Problems*, SIAM Review, **38** (1996), no. 3, 367–426.

[7] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer, London, 2007.

[8] V. Berinde, *Convergence theorems for fixed point iterative methods defined as admissible perturbations of a nonlinear operator*, Carpathian J. of Math., **29** (2013), no. 1, 9 – 18.

[9] V. Berinde, A. R. Khan, and H Fukhar-ud din, *Fixed point iterative methods defined as admissible perturbations of generalized pseudocontractive operators*, J. Nonlinear Convex Anal., **16** (2015), no. 3, 563 – 572.

[10] V. Berinde, A. R. Khan, and M. Păcurar, *Convergence theorems for admissible perturbations of φ - pseudocontractive operators*, Miskolc Math. Notes, **15** (2014), 27 – 37.

[11] V. Berinde, Şt Măruşter, and I. A. Rus, *An abstract point of view of iterative approximation of fixed points of nonself operators*, J Nonlinear Convex Anal., **15** (2014), no. 5, 851 – 865.

[12] E. Bonabeau, M. Dorigo, and G. Theraulaz, *Swarm Intelligence : From Natural to Artificial Systems / E. Bonabeau, M. Dorigo, G. Theraulaz.*, (2001).

[13] F.E. Browder, *Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces.*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **43** (1965), 1272–1276.

[14] F.E. Browder and W.V. Petryshyn, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **59** (1967), 197 – 228.

[15] C. Byrne, *The EMML and SMART Algorithms.*, UMass Lib., 2006.

[16] C. Byrne, *Applied iterative methods.*, Wellesley: AK Peters, 2008.

[17] A. Cegielski, *Iterative Methods for Fixed Point Problems in Hilbert Spaces*, vol. 2057, SpringerLink, 01 2012.

[18] P. Cerello and all., *3D object segmentation using ant colonies.*, Pattern Recogn., **43.4** (2010), 1476–1490.

[19] C Chidume and Stefan Maruster, *Iterative methods for the computation of fixed points of demicontractive mappings*, J. Comput. Appl. Math., **234** (2010), 861–882.

[20] C. Chira, C.M. Pintea, and D Dumitrescu, *Sensitive ant systems in combinatorial optimization*, Stud Univ Babes-Bolyai Inform, **KEPT2007** (2007), 185–192.

[21] C. Chira, C.M. Pintea, and D. Dumitrescu, *Heterogeneous Sensitive Ant Model for Combinatorial Optimization*, ACM GECCO 2008 (2008), 163–164.

[22] C. Chira, C.M. Pintea, and D. Dumitrescu, *A Step-Back sensitive ant model for solving complex problems.*, Stud Univ Babes-Bolyai Inform, **KEPT2009** (2009), 103–106.

[23] C. Chira, C.M. Pintea, and D. Dumitrescu, *Learning sensitive stigmergic agents for solving complex problems.*, Comput Inform, **29, 3** (2010), 337–356.

[24] P. J. D., *Les Espaces abstraits. By M. Fréchet. Pp. xi 296. 50 fr. 1928. (Gauthier-Villars.)*, The Mathematical Gazette, **14** (1929), no. 199, 371–372.

[25] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Santa Monica, 1963.

[26] L. De Sian and Chien Chang C., *Edge detection improvement by ant colony optimization.*, Pattern Recogn Lett, **29** (2011), 416–425.

[27] M. Dorigo and T. Stützle, *Ant Colony Optimization.*, MIT Press, Cambridge, MA, 2004.

[28] M. Dorigo, M.and Birattari and T. Stützle, *Ant Colony Optimization*, Computational Intelligence Magazine, IEEE, **1** (2006), 28–39.

[29] C. M. Fernandes, V. Ramos, and A. C. Rosa, *Self-Regulated Artificial Ant Colonies on Digital Image Habitats,*, ILCJ, **1, 2** (2005), 1–8.

[30] R. L. Franks and R. P Marzec, *A theorem on mean-value iterations*, Proc. Amer. Math. Soc., **30** (1971), 324 – 326.

[31] Ciobanu Gh., Nica V., Mustata Fl., and MĂR˘ acine V., *Cercetări Operaţionale. Grafuri şi Analiza drumului critic*, (1996).

[32] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer - Verlag, New York, 1984.

[33] R. Glowinski, J.L. Lions, and R. Tremolieres, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland Publication, North –. Holland, Amsterdam, 1981.

[34] K. Goebel and W.A. Kirk, *A fixed point theorem of hybrid methods for two asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc, **35** (1972), 171–174.

[35] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung.*, Math. Nach., **30** (1965), 251– 258.

[36] R. Gordon, R. Bender, and G.T. Herman, *Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography.*, J. Theoret. Biol., **29** (1970), 471 – 481.

[37] C. W. Groetsch, *A note on segmenting Mann iterates*, J. Math. Anal. Appl., **40** (1972), 369 – 372.

[38] K. Gupta, *Image Enhancement using Ant Colony Optimization.*, IOSR J VSLI Sign. Proc., **1, 3** (2012), 38–45.

[39] T. L. Hicks and J.D. Kubicek, *On the Mann iteration in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., **59** (1977), 498 – 504.

[40] S. Hiroya and T. Kitamura, *Generation of a vocal-tract MRI movie based on sparse sampling*, Proc. International Seminar on Speech Production, 2011, pp. 1 – 8.

[41] A. Horvat-Marc, *Retraction methods in fixed point theory*, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca (2000).

[42] A. Horvat-Marc and **C. TICALA**, *Localization of solutions for a problem arising in the theory of adiabatic tubular chemical reactors*, Carpathian J. Math, **20** (2004), no. 2, 187–192.

[43] S. Iemoto and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of nonexpasive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*, Nonlinear Anal. (2009), no. 71, 2082–2089.

[44] Z. Jinghu, *Study on the image edge detection based on ant colony algorithm.*, Shangxi University, 2008.

[45] R Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calc. Math. Soc., **60** (1968), no. 1, 71 – 77.

[46] D. Karaboga and B. Basturk, *Artificial Bee Colony (ABC) Optimization Algorithm for Solving Constrained Optimization Problems*, Foundations of Fuzzy Logic and Soft Computing (Berlin, Heidelberg) (P. Melin, O. Castillo, L. T. Aguilar, Kacprzyk J., and W. Pedrycz, eds.), Springer Berlin Heidelberg, 2007, pp. 789–798.

[47] S. R. Katteda, C. N. Raju, and M. L. Bai, *Feature Extraction for Image Classification and Analysis with Ant Colony Optimization Using Fuzzy Logic Approach.*, SIPIJ., **2** (2011), 137 – 143.

[48] J. Kennedy and R. Eberhart, *Particle swarm optimization*, Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks, vol. 4, November 1995, pp. 1942–1948 vol.4.

[49] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Reprint of the 1980 original. Classics in Applied Mathematics, 31.*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.

[50] W.A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances.*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 1004–1006.

[51] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces.*, Arch. Math., **91** (2008), 166–177.

[52] Y. Liang and Y. Yin., *A new multilevel thresholding approach based on the ant colony system and the EM algorithm.*, Int. J. Innov. Comput. I., **9,1** (2013), 319–337.

[53] X. Liu, X. Wang, N. Shi, and C. Li, *Image Segmentation Algorithm Based on Improved Ant Colony Algorithm.*, Int J Signal Proc, Image Proc Pattern Recogn., **7, 3** (2014), 433–442.

[54] W. R. Mann, *Mean value methods in iterations*, Proc. Amer. Math. Soc, **4** (1953), 506 – 510.

[55] C. Mongkolkeha, J. C. Yeol, and P. Kumam, *Convergence theorems for k-demicontractive mappings in Hilbert spaces*, Math. Inequal. Appl., **16** (2013), no. 4, 1065–1082.

[56] Şt. Măruşter, *The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **63** (1977), no. 1, 69–73. MR 636944

[57] M. A. Noor, *Generalized auxiliary principle for variational inequalities*, PanAmer. Math. J., **4** (1994), no. 1, 27 – 44.

[58] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 595–597.

[59] M.O. Osilike, *Iterative approximation of fixed points of asymptotically demicontractive mappings*, Indian J. Pure Appl. Math., **29** (1998), no. 12, 1291 – 1300.

[60] N. Otsu, *A threshold selection method from gray-level histograms*, IEEE Trans. Syst. Man Cybern., **9** (1979), no. 1, 62 – 66.

[61] C. Outlaw and C. W. Groetsch, *Averaging iteration in a Banach space*, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), no. 2, 430–432.

[62] A. Petruşel and I.A. Rus, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), no. 2, 411–418.

[63] C-M. Pintea, *Advances in Bio-inspired Computing for Combinatorial Optimization Problem.*, Springer Publisher, 2014.

[64] C-M. Pintea and C. P Pop, *Sensor networks security based on sensitive robots agents. A conceptual model.*, Adv Intell Syst Comp, **189** (2013), 47–56.

[65] C-M. Pintea and C. P. Pop, *Sensitive Ants for Denial Jamming Attack on Wireless Sensor Network.*, Adv Intell Syst Comp, **239** (2014), 409–418.

[66] C.M. Pintea and **C. TICALA**, *Combinations of Intelligent Methods and Applications. Smart Innovation, Systems and Technologies*, ch. Medical Image Processing: A Brief Survey and a New Theoretical Hybrid ACO Model , vol 46., pp. 117–134, Springer, Cham, 2016.

[67] S Plubtieng and S. Chornphrom, *Weak Convergence Theorem for Finding Common Fixed Points of a Family of Firmly Nonexpansive Mappings and a Nonspreading Mapping in Hilbert Spaces*, Appl. Math. Sci., **5** (2011), no. 57 – 60, 2975–2988.

[68] C. Popa, *Projection Algorithms-Classical Results and Developments: Applications to Image Reconstruction.*, Lambert Academic Pub., 2012.

[69] L. Qihou, *Convergence Theorems of the Sequence of Iterates for Asymptotically Demicontractive and Hemicontractive Mappings*, Nonlinear Anal., **26** (1996), no. 11, 1835–1842.

[70] J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Akad. Wiss., **69** (1917), 262–277.

[71] A. Rafiq, *On Mann iteration in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal., **66** (2007), no. 10, 2230 – 2236.

[72] Greg Roelofs, *PNG VRML Textures in 2D. 16-bit grayscale, single-shade binary transparency in corners, 128x128.*, 2009.

[73] I. A. Rus, *An abstract point of view on iterative approximation of fixed points*, Fixed Point Theory, **13** (2012), 179–192.

[74] I.A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press (2001), 198.

[75] A. Schrijver, *A course in combinatorial optimization*, CWI, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, The Netherlands and Department of Mathematics, University of Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, The Netherlands., March 23 2017.

[76] J. Schu, *Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl., **158** (1991), no. 2, 407 – 413.

[77] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, 3rd ed, 2nd printing ed., Boston, MA : Course Technology Cengage Learning, 2015.

[78] Y. Song, *On a Mann type implicit iteration process for continuous pseudo-contractive mappings*, Nonlinear Anal, **67** (2007), no. 11, 3058 – 3063.

[79] R. S. Stepleman, *A Characterization of Local Convergence for Fixed Point Iterations in R1*, SIAM J. Numer. Anal., **12** (1975), no. 6, 887–894.

[80] I. Taşcu and S.M. Pop, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Risoprint, 2007.

[81] **C. TICALA**, *Approximating solutions of generalized pseudocontractive variational inequalities by admissible perturbation type iterative methods*, Creat. Math. Inform., **22** (2013), no. 2, 237 – 241.

[82] **C. TICALA**, *A weak convergence theorem for a Krasnoselskij type fixed point iterative method in Hilbert spaces using an admissible perturbation*, Sci. Stud. Res. Ser. Math. Inform., **25** (2015), no. 1, 243 – 252.

[83] **C. TICALA**, *Approximating fixed points of demicontractive mappings by iterative methods defined as admissible perturbations*, Creat. Math. Inform., **25** (2016), no. 1, 121 – 126.

[84] **C. TICALA**, *Approximating fixed points of asymptotically demicontractive mappings by iterative schemes defined as admissible perturbations*, Carpathian J. Math., **33** (2017), no. 3, 381 – 388.

[85] **C. TICALA** and L. Balog, *Empirical study of the rate of convergence of some Newton type methods*, Creat. Math. Inform., **7** (2008), no. 3, 521 – 524.

[86] **C. TICALA** and I. Zelina, *New ant colony optimization algorithm in medical images edge detection*, Creat. Math. Inform., **29** (2020), no. 1, 329 – 336.

[87] **C. TICALA**, I. Zelina, and C.-M. Pintea, *Admissible Perturbation of Demicontractive Operators within Ant Algorithms for Medical Images Edge Detection. , 8, 1040.*, Mathematics, **8; 1040** (2020), no. 6.

[88] J. Tian, Yu W., and S. Xie, *An ant colony optimization algorithm for image edge detection*, 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation (IEEE World Congress on Computational Intelligence), June 2008, pp. 751–756.

[89] F.G. Tricomi, *Un teorema sulla convergenza delle successioni formate dalle successive iterate di una funzione di una variabile reale*, Liberia scientifica ed industriale di Pellerano, 1961.

[90] V.V. Vasin, *Ill - posed problems and iterative approximation of fixed points of pseudo-contractive mappings*, Ill-posed problems in natural sciences (Moscow, 1991), VSP, Utrecht (1992), 214 – 223.

[91] R. U. Verma, *Nonlinear variational and constrained hemivariational inequalities involving relaxed operators*, Z. Angew. Math. Mech., **77** (1997), no. 5, 387 – 391.

[92] R. U. Verma, *Strongly nonlinear variational Inequalities and generalized pseudocontractions*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **48** (1999), no. 2, 201 – 208.

[93] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal., **16** (1991), no. 12, 1127 – 1138.