Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Centrul Universitar Nord din Baia Mare
Facultatea de Ştiinţe

TEZĂ DE DOCTORAT

(REZUMAT)

ASUPRA ORDINULUI DE APROXIMARE ȘI A TEOREMEI DE TIP VORONOVSKAJA PENTRU ANUMIȚI OPERATORI LINIARI ȘI POZITIVI

Conducător Ştiinţific: Cercet. Șt. I Dr. Ion Păvăloiu

Doctorand: Dan Miclăuș

Baia Mare
2012

Cuprins

Cuvinte cheie şi expresii: operator Bernstein, operator Kantorovich, operator Bernstein-Schurer, operator Stancu, operator Bernstein-Stancu, operator Schurer-Stancu, operator Mirakjan-Favard-Szász, operator Szász-Mirakjan-Kantorovich, operator Szász-Mirakjan-Schurer, operator φ-Szász-Mirakjan, aproximare prin operatori liniari şi pozitivi, aproximare uniformă, funcţii test, teorema Popoviciu-Bohman-Korovkin, modul de continuitate, grad de aproximare, diferenţă divizată, functie convexă, proprietatea de monotonie, comportare asimptotică, teoremă de tip Voronovskaja aplicată operatorilor liniari şi pozitivi, formulă de aproximare, termen rest în formulă de aproximare, estimarea marginilor superioare, formule de cuadratură şi cubatură bazate pe operatori liniari şi pozitivi.

Introducere

Titlul tezei de doctorat face parte din sfera teoriei aproximării, care acoperă o mare parte din teritoriul matematicii. În contextul de faţă, scopul principal este de a aproxima funcţii continue cu valori reale prin clase de funcţii mai simple, de exemplu clasa polinoamelor algebrice. Astfel de probleme au atras atenţia a mii de matematicieni în ultimele două secole.
Un rezultat fundamental în dezvoltarea teoriei aproximării funcţiilor este cunoscut sub numele de *Prima teoremă de aproximare a lui Weierstrass*, dată de K. Weierstrass [**170**] în 1885, şi anume: *Pentru orice funcţie $f \in C[a,b]$ şi $\varepsilon > 0$, există un polinom algebric $P(x)$ cu coeficienţi reali, astfel încât $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, pentru orice $x \in [a,b]$.* Prima demonstraţie a teoremei de aproximare a lui Weierstrass a fost lungă şi complicată, provocând mulţi matematicieni celebrii să găsească demonstraţii mult mai simple şi mai instructive.
În 1905 E. Borel [**9**] propunea determinarea unui proces de interpolare, ce permite găsirea polinoamelor $P(x)$, care converg uniform la funcţia $f \in C[a,b]$.
În 1912 S.N. Bernstein [**6**] a fost în măsură să dea o soluţie remarcabilă problemei propusă de E. Borel. Cu această ocazie a fost construit binecunoscutul polinom Bernstein

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\tfrac{k}{n}\right), \text{ pentru } f \in C[0,1],\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Operatorii Bernstein demonstrează simplu şi constructiv teorema de aproximare a lui Weierstrass pentru cazul $C[0,1]$. Cu ajutorul funcţiei $t:[0,1]\to[a,b]$, $t(x)=(1-x)a+xb$, rezultatul se poate extinde la $C[a,b]$. Aceşti operatori sunt, foarte probabil, cei mai studiaţi operatori liniari şi pozitivi şi au fost generalizaţi şi modificaţi într-un mare număr de variante. Avantajul operatorilor Bernstein constă în simplitatea lor, şi în proprietăţiilor lor foarte fine de aproximare.

Următorul rezultat furnizează cel mai simplu şi în acelaşi timp cel mai puternic criteriu pentru stabilirea convergenţei unui operator liniar şi pozitiv către operatorul identitate: *Pentru orice* $n\in\mathbb{N}$*, fie* $L_n : C[a,b]\to C[a,b]$ *un şir de operatori liniari şi pozitivi. Dacă următoarele trei condiţii au loc*

i) $L_n(e_0;x)=1+u_n(x)$,

ii) $L_n(e_1;x)=x+v_n(x)$,

iii) $L_n(e_2;x)=x^2+w_n(x)$,

astfel încât $\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}v_n(x)=\lim_{n\to\infty}w_n(x)=0$ *uniformă pe* $[a,b]$*, atunci pentru orice* $f\in C[a,b]$ *şi* $x\in[a,b]$, $\lim_{n\to\infty}L_n(f;x)=f(x)$ *uniformă pe* $[a,b]$. A fost descoperit şi demonstrat independent de trei matematicieni în trei ani consecutivi: T. Popoviciu [**123**] în 1951, H. Bohman [**8**] în 1952 şi P.P. Korovkin [**75**] în 1953. Acest rezultat clasic de aproximare uniformă prin operatori liniari şi pozitivi este cunoscut sub numele de teorema Bohman-Korovkin, pentru că contribuţia lui T. Popoviciu a rămas necunoscută pentru o lungă perioadă de timp. Importanţa acestui rezultat calitativ a impresionat mulţi matematicieni şi în timpul ultimiilor şaizeci de ani o cercetare considerabila a extins această teoremă în diferite direcţii.

Având un şir de operatori care aproximează o funcţie dată apare problema evaluării erorii comise. Aceasta este dată de către ordinul de aproximare, care depinde de proprietatea de netezime a funcţiei. În estimările gradului de aproximare un instrument convenabil pentru măsurarea netezimii funcţiilor este reprezentat prin modulul de continuitate

$$\omega(f,\delta) := \sup\{|f(x)-f(y)| \ : \ x,y\in I, \ |x-y|\le\delta\}, \quad \delta\ge 0.$$

Menţionăm faptul că estimări a ordinului de aproximare implicând modulul de continuitate sunt posibile într-un context larg, cand domeniul funcţiilor este un spaţiu metric, de exemplu, ne referim la lucrăriile lui H.H. Gonska [**47**], [**50**]. Oricum, în contextul clasic a funcţiilor definite pe un interval, rezultatele sunt mai puternice. Cea mai simplă metodă de estimare a ordinului de aproximare, cu ajutorul modulului de continuitate a fost stabilit prima dată în 1968 de către O. Shisha and B. Mond [**136**]. Acest rezultat cantitativ este dat prin următoarea relaţie

$$|L_n(f;x)-f(x)| \le |f(x)||L_n(1;x)-1|+(L_n(1;x)+1)\cdot\omega\left(f,\sqrt{L_n((t-x)^2;x)}\right).$$

Fie funcţia f dată. Pentru a aproxima funcţia f prin operatori liniari şi pozitivi trebuie să avem în vedere două probleme. Una dintre ele se referă la respectarea condiţiilor pentru care procesul de aproximare a funcţiei prin operatori liniari şi pozitivi este realizabil. Aceasta este o problemă calitativă. Cealaltă se referă la obţinerea celei mai bune evaluări a erorii comise în procesul de aproximare a funcţiei, care înseamnă că avem de-a face cu o problemă cantitativă.
Pentru a înţelege cât mai bine însemnătatea acestei teze de doctorat am împărţit-o în cinci capitole.

În **primul capitol** prezentăm rezultatele auxiliare şi preliminarii care vor fi folosite pe parcursul acestei teze. Concret, dăm câteva definiţii de bază şi anumite proprietăţi elementare privind operatorii liniari şi pozitivi, care joacă un rol important în teoria aproximării şi acest lucru este demonstrat de către vasta literatură existentă în acest sens. Mulţi mari matematicieni au investigat astfel de operatori, cu scopul de a-i folosi în teoria aproximării uniforme a funcţiilor. În prima secţiune, amintim cei mai studiaţi operatori liniari şi pozitivi şi pe baza ideii folosite de către C. Mortici [**103**] am introdus în [**26**], [**117**] două clase de operatori liniari depinzând de o anumită funcţie analitică φ. Monoamele e_k, $k = 0, 1, 2$ joacă un rol important în aproximarea uniformă prin operatori liniari şi pozitivi şi deseori ele sunt numite funcţii test Korovkin. Pentru un operator liniar şi pozitiv L, următoarele cantităţi reprezintă instrumente indispensabile. Calcularea funcţiilor test, anume $L(e_k; x)$, unde $e_k(x) = x^k$, pentru $k \in \mathbb{N}_0$, momentele de ordinul k, adică $L\left((e_1 - x)^k; x\right)$, pentru $k \in \mathbb{N}_0$, $(e_1 - x)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i} x^i e_1^{k-i}$ şi de asemenea momentele absolute de ordin impar k, anume $L\left(|e_1 - x|^k; x\right)$, pentru $k \in \mathbb{N}$. Un mod de a furniza informaţii despre toate momentele operatorilor liniari este dat în [**55**], prin: *Pentru un operator liniar L şi $k \in \mathbb{N}_0$, rezultă*

$$L\left((e_1 - x)^k; x\right) = L(e_k; x) - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{k-i} L\left((e_1 - x)^i; x\right).$$

Cunoscând calcularea primelor trei funcţii test printr-un operator liniar şi pozitiv convergenţa către operatorul identitate poate fi demonstrată folosind binecunoscutul criteriu stabilit de către T. Popoviciu [**123**], H. Bohman [**8**] şi P.P. Korovkin [**75**]. Următoarea problemă este: cum putem evalua eroarea comisă în procesul de aproximare a funcţiei? Un instrument convenabil este modulul de continuitate, care a fost introdus prima dată de către H. Lebesgue în 1910 şi a apărut de asemenea în 1911 în teza de doctorat a lui D. Jackson [**69**], deşi în esenţă conceptul a fost cunoscut mult mai devreme. Un alt instrument important pentru evaluarea erorii comise este modulul de netezime de ordinul al doilea. Primele estimări implicând modulul de netezime de ordinul al doilea au fost stabilite de către H. Esser [**42**] în 1976, şi îmbunătăţite mai târziu în 1984 de către H.H. Gonska [**49**]. Estimări folosind ambele module de netezime de ordinul întâi şi al doilea sunt mult mai rafinate decât estimările folosind doar modulul de continuitate. Astfel de combinaţii descompun eroarea de aproximare în trei componente, corespunzătoare celor trei caracteristici specifice funcţiilor care influenţează eroarea: amplitudinea, devierea de funcţiile liniare şi devierea de polinoamele de gradul al doilea. Aproximativ vorbind, aceste module măsoara devierea de funcţiile test a sistemului algebric Chebyshev. Amintim un rezultat cantitativ general care implică modulele de netezime de ordinul întâi şi al doilea, astfel de estimări fiind stabilite prima data de către H.H. Gonska [**49**], apoi prelucrate de către R. Păltănea în măsura obţinerii constantelor. Rezultatul lui Păltănea (a se vedea [**127**]) spune după cum urmează: *Fie* $I = [a, b]$*,* $I' \subset I$ *şi* $L : C(I) \to C(I')$ *un operator liniar şi pozitiv, atunci pentru orice* $x \in I'$ *şi fiecare* $0 < \delta \leq \frac{1}{2} \cdot$ *lungimea*(I)*, are loc următoarea*

$$\begin{aligned}|L(f;x) - f(x)| \leq & |L(e_0;x) - 1| \cdot |f(x)| + \tfrac{1}{\delta}|L(e_1 - x;x)| \cdot \omega_1(f,\delta) \\ & + \left(L(e_0;x) + \tfrac{1}{2\delta^2} L\left((e_1 - x)^2;x\right)\right) \cdot \omega_2(f,\delta).\end{aligned}$$

Condiţia $\delta \leq \frac{1}{2} \cdot \text{lungimea}(I)$ din relaţia de mai sus poate fi eliminată pentru operatorii care conserva funcţiile liniare. În ultimul paragraf al acestui capitol putem găsi câteva elemente privind diferenţele divizate uni şi bidimensionale, respectiv funcţiile convexe de ordin superior. Funcţiile convexe de ordin superior au reprezentat o temă de studiu pentru T. Popoviciu. Ca mărturie stau remarcabilele lucrări *Notes sur les functions convexes d'order supérieur* publicate începând cu anul 1936 în diferite reviste prestigioase. În 1944 contribuţiile sale din această sferă au fost colectate în monografia [**122**]. Prima persoană care s-a ocupat cu această problemă a fost E. Hopf. El a considerat în teza lui de doctorat [**66**] din 1926 funcţiile cu diferenţe divizate nenegative fără a le da un nume. Noţiunea de convexitate de ordin superior a fost introdusă de către T. Popoviciu în celebra lui teza de doctorat [**119**] din 1934.

În **capitolul al doilea** scopul principal este de a face o expunere detaliată asupra operatorilor liniari şi pozitivi prezentaţi în primul capitol, implicând rezultate calitative şi cantitative. Pentru a atinge acest scop, am demonstrat în fiecare caz rezultate importante privind convergenţa uniformă şi estimări cu modulul de netezime de ordinul întâi şi al doilea, care sunt aplicaţii directe ale proprietăţiilor şi formulelor amintite în primul capitol. Apoi, am stabilit formule generale pentru calcularea funcţiilor test pentru fiecare operator, similare cu cea demonstrată prima dată de către S. Karlin şi Z. Ziegler [**73**], pentru operatorii Bernstein, dată prin: *Dacă* $j, n \in \mathbb{N}$ *şi* $x \in [0,1]$ *atunci*

$$B_n(e_j;x) = \tfrac{1}{n^j}\sum_{i=1}^{j} S(j,i)(n)_i x^i,$$

unde e_j *sunt funcţii test,* $S(j,i)$ *numerele lui Stirling de speţa a doua şi* $(n)_i$ *factorialul descrescător notat prin simbolul lui Pochhammer.*
Calcularea momentelor până la ordinul al patrulea pentru operatorii prezentaţi reprezintă o altă idee, care poate fi urmărită pe parcursul întregului capitol. Aceste rezultate pot fi găsite în diferite lucrări scrise de autor, de exemplu [**90**], [**92**], [**89**], [**94**], [**88**], [**86**] sau scrise în colaborare cu D. Bărbosu, O.T. Pop şi P.I. Braica [**26**], [**99**], [**27**], [**96**], [**95**], [**98**], [**97**], [**115**], [**117**]. După cum puteţi remarca în acest capitol, rezultatele autorului sunt multe, aşa că aş dori să mă opresc asupra următoarelor două lucrări importante [**94**], [**86**], unde am obţinut câteva proprietăţi interesante şi drăguţe privind operatorii Stancu. Calcularea funcţiilor test prin operatorii Stancu a fost făcută cu mult timp în urmă şi poate fi găsită în [**144**]. Bazându-se pe faptul că multe proprietăţi ale operatorilor Bernstein pot fi transferate la ope- ratorii Stancu, diferiţi matematicieni au studiat aproape toate problemele pornind de la acest punct de vedere. În [**94**], am revizuit calcularea funcţiilor test folosind o altă tehnică, adică, utilizând doar formula de convoluţie a lui Vandermonde şi următoarea relaţie

$$t^{[i+j,h]} = t^{[i,h]}(t-ih)^{[j,h]}, \text{ pentru orice } i,j \in \mathbb{N} \text{ şi } h \neq 0.$$

Presupunând că parametrul α are o valoare fixă nenegativă în fiecare termen al şirului $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\geq 1}$, în [**144**] D.D. Stancu a stabilit o relaţie importantă între doi termeni consecutivi al acestui şir, care este necesară pentru demonstrarea proprietăţii de monotonie, în cazul funcţiilor convexe sau concave de ordinul întâi. De asemenea în [**94**], am revizuit şi am stabilit că proprietatea de monotonie este doar o formă intermediară a următoarei relaţii: *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*, diferenţa între doi termeni consecutivi al şirului operatorilor Stancu este dată prin*

$$P_{n+1}^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)$$
$$= -\tfrac{x(1-x)}{n(n+1)(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) \left[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n+1}, \tfrac{k+1}{n}; f\right],$$

unde $p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) = \binom{n-1}{k} \frac{(x+\alpha)^{[k,-\alpha]}(1-x+\alpha)^{[n-1-k,-\alpha]}}{(1+2\alpha)^{[n-1,-\alpha]}}$.
Conform cunoştinţelor noastre şi câtorva lucrări importante, de exemplu [**166**], [**5**], [**143**], [**32**], demonstraţia privind proprietatea de monotonie pentru şirul polinoamelor lui Stancu nu a fost stabilită în totalitate. După prezentarea din cadrul ICAM 8 - 2011 mi-a fost adus la cunoştinţă de către D. Bărbosu că teorema lui Popoviciu nu poate fi aplicată operatorilor Stancu. Explicaţia este corelată cu faptul că o relaţie privind diferenţa dintre operatorul Stancu şi funcţia corespunzătoare nu a fost demonstrată. Fiind motivat de această remarcă am demonstrat în [**86**] următoarea: *Dacă funcţia* f *este*

i) convexă de ordinul întâi pe $[0,1]$*, atunci pentru orice* $x \in [0,1]$ *şirul* $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător şi* $P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) > f(x)$.

ii) concavă de ordinul întâi pe $[0,1]$*, atunci pentru orice* $x \in [0,1]$ *şirul* $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *este crescător şi* $P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) < f(x)$.

În [**94**], [**86**] studiul asupra calculării funcţiilor test printr-o formulă generală şi asupra proprietăţii de monotonie, pentru cazul particular (cazul special) a operatorilor Stancu este făcut într-o manieră analoagă ca şi în cazul operatorilor Stancu. Pentru a înţelege cât mai bine însemnătatea proprietăţii calitative a operatorilor, am considerat funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată prin

$f(x) = x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$, pe care o vom aproxima prin câţiva operatori de tip Bernstein.

Capitolul al treilea este dedicat prezentării diferitelor versiuni calitative şi cantitative a teoremei de tip Voronovskaja aplicată unei mari clase de operatori liniari şi pozitivi. Rezultatul demonstrat de către E.V. Voronovskaja [**169**] pentru operatorii Bernstein este binecunoscut şi poate fi găsit în monografia lui R.A. DeVore şi G.G. Lorentz [**34**]: *Dacă* f *este mărginită pe* $[0,1]$, *diferenţiabilă într-o vecinătate a lui* x *şi are derivata de ordinul doi* $f^{(2)}(x)$ *pentru anumiţi* $x \in [0,1]$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x).$$

Dacă $f \in C^2[0,1]$, *convergenţa este uniformă.*
Acest rezultat a atras atenţia multor autori în ultimi 80 de ani. Inspirat fiind de rezultatul lui E.V. Voronovskaja, coordonatorul ştiinţific S.N. Bernstein generalizează rezultatul de mai sus, arătând în [**7**] comportarea asimptotică a operatorilor Bernstein pentru $f \in C^q[0,1]$, q par după cum urmează: *Dacă* $q \in \mathbb{N}$ *este par,* $f \in C^q[0,1]$, *atunci uniform în* $x \in [0,1]$,

$$n^{\frac{q}{2}}\left(B_n(f;x) - f(x) - \sum_{r=1}^{q} B_n\left((e_1 - x)^r\right)\frac{f^{(r)}(x)}{r!}\right) \to 0, \ \text{când } n \to \infty.$$

În 1985, V.S. Videnskij [**168**] a stabilit o estimare cantitativă în teorema de tip Voronovskaja dată de către următoarea:

$$\left| n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) - \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x)\right| \le x(1-x)\cdot\omega\left(f^{(2)}, \sqrt{\frac{2}{n}}\right).$$

Un alt rezultat recent privind versiunea cantitativă a teoremei de tip Voronovskaja, implicând cel mai mic majorant concav al modulului de continuitate a fost stabilit de către H.H. Gonska, P. Piţul şi I. Raşa [**56**]. Acelaşi rezultat poate fi găsit în teza de doctorat a P. Piţul [**106**], dat prin următoarea:
Fie $L : C[0,1] \to C[0,1]$ *un operator liniar şi pozitiv astfel încât* $Le_i = e_i$,

pentru $i = 0, 1$*. Dacă* $f \in C^2[0,1]$ *şi* $x \in [0,1]$*, atunci*

$$\left| L(f;x) - f(x) - L\left((e_1 - x)^2; x\right) \frac{f^{(2)}(x)}{2} \right|$$
$$\leq \frac{1}{2} L\left((e_1 - x)^2; x\right) \cdot \tilde{\omega}\left(f^{(2)}, \frac{1}{3}\sqrt{\frac{L((e_1-x)^4;x)}{L((e_1-x)^2;x)}}\right).$$

În acest capitol am folosit o tehnică dezvoltată în câteva lucrări recente de către O.T. Pop (a se vedea [**107**], [**110**], [**108**], [**111**]), cu scopul de a obţine comportarea asimptotică a operatorilor prezentaţi în primul capitol, convergenţa uniformă şi ordinul de aproximare a funcţiilor aproximate. Aceste rezultate pot fi găsite în diferite lucrări scrise de autor, de exemplu [**90**], [**92**], [**94**], [**88**] sau scrise în colaborare cu O.T. Pop, D. Bărbosu şi P.I. Braica [**99**], [**118**], [**96**], [**98**], [**97**], [**115**], [**117**]. Pentru a avea o corespondenţă între capitolul al doilea, respectiv al treilea şi de a prezenta cele mai bune rezultate ale autorului, ne referim din nou la lucrarea [**94**]. Generalizarea comportării asimptotice a operatorilor Stancu şi câteva forme cantitative ale formulei de tip Voronovskaja sunt făcute în [**94**] şi sunt date prin: *Fie* $f \in C[0,1]$ *dată. Dacă* $n \in \mathbb{N}$*,* $x \in [0,1]$ *şi* f *este de* s *ori derivabilă într-o vecinătate a lui* x*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)} f^{(2)}(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - f(x) - \frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)} f^{(2)}(x)\right)$$
$$= \frac{x(1-x)(1-2x)(1+\alpha n)(1+2\alpha n)}{6(1+\alpha)(1+2\alpha)} f^{(3)}(x) + \frac{(x(1-x))^2(1+\alpha n)^2}{8(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)} f^{(4)}(x).$$

Presupunând că f *este de* s *ori derivabilă pe* $[0,1]$*, atunci convergenţa din relaţiile de mai sus este uniformă pe* $[0,1]$*. În plus, obţinem*

$$\left|P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - f(x)\right| \leq \left(1 + \frac{1+\alpha n}{4(1+\alpha)}\right) \cdot \omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ şi}$$

$$n\left|P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)-f(x)-\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)}f^{(2)}(x)\right|$$
$$\le \tfrac{1+\alpha n}{8(1+\alpha)}\left(1+\tfrac{3(1+\alpha n)}{4(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\right)\cdot\omega\left(f^{(2)},\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Estimări folosind cel mai mic majorant concav al modulului de continuitate pot fi date, ţinând cont de rezultatul demonstrat în [**56**] şi de calcularea momentelor până la ordinul al patrulea stabilită în [**94**], prin: *Pentru operatorii Stancu, obţinem*

$$\left|n\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)-f(x)\right)-\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)}f^{(2)}(x)\right|$$
$$\le \tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)}\cdot\tilde{\omega}\left(f^{(2)},\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1+\alpha n}{n(1+3\alpha)}}\right).$$

Capitolul al patrulea reprezintă o continuare a studiului asupra anumitor operatori liniari şi pozitivi făcut în capitolul al doilea. Idea de bază este aproximarea uni şi bidimensională a funcţiilor prin câţiva operatori liniari şi pozitivi prezentaţi, precum şi stabilirea estimărilor marginilor superioare pentru termenii rest corespunzători.

Pentru orice $f\in C[0,1]$, $x\in[0,1]$ şi $n\in\mathbb{N}$, $f(x)=B_n(f;x)+R_n(f;x)$ se numeşte formula de aproximare a lui Bernstein, unde R_n este termenul rest asociat operatorilor Bernstein B_n. Prima reprezentare pentru termenul rest R_n a fost demonstrată de către O. Aramă [**5**] şi este dată prin:

Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dată. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, reprezentarea termenului rest a formulei de aproximare a lui Bernstein este

$$R_n(f;x)=-\tfrac{x(1-x)}{n}[\xi_0,\xi_1,\xi_2;f],\ \ \textit{unde}\ \xi_0,\xi_1,\xi_2\in[0,1].$$

O altă reprezentare pentru termenul rest asociat formulei de aproximare a lui Bernstein a fost demonstrat de către D.D. Stancu [**142**], prin

$$R_n(f;x)=-\tfrac{x(1-x)}{n}\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-1,k}(x)\left[x,\tfrac{k}{n},\tfrac{k+1}{n};f\right],$$

pentru $x \in [0,1] \setminus \left\{ \frac{k}{n} \mid k = 0, \dots, n \right\}$.
W.J. Gordon [**62**] a introdus noţiuniile de bază ale teoriei algebrice pentru aproximarea funcţiilor multidimensionale, o teorie care a fost studiată şi dezvoltată de către F.J. Delvos şi W. Schempp [**33**]. Metoda extinderilor parametrice este o procedură pentru construirea operatorilor liniari pe spaţiul funcţiilor multidimensionale, pornind de la operatori liniari definiţi pe spaţii de funcţii unidimensionale, (a se vedea [**33**]). Având în minte ideile de mai sus, în [**91**], [**93**], [**94**], [**85**], [**86**], [**87**] am demonstrat rezultate importante şi interesante privind formulele de aproximare uni, respectiv bidimensionale prin anumiţi operatori liniari şi pozitivi. Pentru ilustrare, amintesc formula de aproximare a lui Stancu, dată prin

$$f(x) = P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) + R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x), \text{ pentru } f \in C[0,1],\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

Studiul asupra termenului rest asociat operatorilor Stancu a fost făcut în [**144**], cu ajutorul diferenţelor divizate de primul, respectiv al doilea ordin a funcţiei f. Trei ani mai târziu, în [**149**] D.D. Stancu a stabilit o expresie a acestui termen rest folosind doar diferenţele divizate de ordinul al doilea

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{n-1-k}\alpha)}{n(1+\overline{n-1}\alpha)} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) \left[x, \tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}; f\right].$$

Pentru stabilirea unei reprezentări a unui anumit termen rest, asociat unui operator liniar, putem folosi binecunoscutul criteriu demonstrat de către T. Popoviciu [**124**]. Cu scopul de a obţine o formă corespunzătoare a termenului rest, ca şi o aplicaţie, în [**86**] am aplicat teorema lui Popoviciu operatorilor Stancu

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)}[\xi_0, \xi_1, \xi_2; f], \text{ unde } \xi_0, \xi_1, \xi_2 \in [0,1].$$

Idea revizuirii apare când ne uităm la rezultatul demonstrat cu teorema lui Popoviciu şi relaţia de mai sus. Evaluarea termenului rest a fost revizuită în [**94**] de către autor. *Reprezentarea termenului rest asociat operatorilor*

Stancu este

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)\left[x, \tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}; f\right],$$

unde $p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) = \binom{n-1}{k}\frac{(x+\alpha)^{[k,-\alpha]}(1-x+\alpha)^{[n-1-k,-\alpha]}}{(1+2\alpha)^{[n-1,-\alpha]}}$.
Estimarea marginii superioare pentru termenul rest este dat de asemenea în [**94**], prin: *Presupunând că* $f \in C^2[0,1]$ *şi diferenţele divizate de ordinul al doilea a lui* f *sunt mărginite pe* $[0,1]$*, atunci obţinem*

$$\left|R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)\right| \leq \tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)} M_2[f] \leq \tfrac{1+\alpha n}{8n(1+\alpha)} M_2[f],$$

unde $M_2[f] := \max\limits_{0\leq x\leq 1} |f^{(2)}(x)|$. În [**87**] am revizuit şi forma termenului rest asociat formulei de aproximare bidimensională a operatorilor Stancu, folosind diferenţele divizate bidimensionale. Revizuirea este motivată de două idei. Una dintre ele este conţinută în [**94**], unde forma revizuită a termenului rest asociată formulei de aproximare unidimensională a operatorilor Stancu este demonstrată. Cealaltă se bazează pe faptul că operatorii Stancu nu sunt proiectori şi forma de descompunere a operatorului identitate pentru determinarea formei termenului rest bidimensional nu poate fi aplicată. Cu privire la cea de-a doua idee, cititorul este invitat să vadă lucrarea [**23**], unde este dată o expunere detaliată şi completă pentru cazul operatorilor Bernstein.

În **ultimul capitol** ne concentrăm atenţia asupra aproximării funcţionalelor liniare. Egalitatea $I(f) = Q(f) + R(f)$, unde $Q(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k\lambda_k(f)$ se numeşte formulă de integrare numerică pentru funcţia f sau formulă de cuadratură. Parametrii A_k, $k = \overline{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$ se numesc ponderi sau coeficienţi ai formulei, şi $R(f)$ este termenul rest corespunzător.
Necesitatea practică a formulelor de cuadratură se datorează în special modului de definiţie a integralei prin procesul de trecere la limită. Există situaţii în care funcţia de integrat nu admite primitive, prin urmare binecunoscuta

formulă Leibniz-Newton nu poate fi aplicată. Există situaţii în care funcţiile de integrat admit primitive, dar costul obţinerii acestora este prea mare pentru a putea fi calculate. Studiul asupra formulelor de cuadratură poate fi făcut doar pentru funcţii unidimensionale şi extinderea la funcţii bidimensionale implică alte formule, care se numesc formule de cubatură. Ne referim la studiul asupra formulelor de cuadratură, respectiv cubatură aplicate binecunoscutului operator liniar şi pozitiv Bernstein.

Considerând şi integrând pe $[0,1]$ formula de aproximare a lui Bernstein, din capitolul de mai sus, obţinem formula de cuadratură a lui Bernstein [**158**], [**15**], [**25**], dată prin

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) + R_n[f],\ \text{pentru } n \in \mathbb{N},$$

unde $|R_n[f]| \le \frac{1}{12n}M_2[f]$.

Scopul următor este de a construi formula de cuadratură compozită a lui Bernstein [**20**]. Pentru a obţine acest lucru, intervalul $[0,1]$ va fi împărţit în n subintervale egale $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, pentru orice $j = \overline{1,n}$. Pe fiecare astfel de interval va fi aplicată formula de cuadratură a lui Bernstein. Apoi, adunând formulele de cuadratură menţionate, se va obţine formula de cuadratură compozită a lui Bernstein pe $[0,1]$. *Pentru orice $f \in C^2[0,1]$, are loc următoarea formulă de cuadratură compozită a lui Bernstein*

$$\int_0^1 f(x)dx = \tfrac{1}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{jn-n+k}{n^2}\right) + R_n[f],\ \textit{pentru } n \in \mathbb{N},$$

unde $|R_n[f]| \le \frac{1}{12n}M_2[f]$.

Considerând şi integrând pe $[0,1]\times[0,1]$ formula de aproximare bidimensională a lui Bernstein, obţinem formula de cubatură a lui Bernstein [**158**], care a fost revizuită de către D. Bărbosu şi O.T. Pop [**23**]. În [**19**], am construit formula de cubatură compozită a lui Bernstein. Pentru a obţine aceasta, intervalul bidimensional $[0,1]\times[0,1]$ va fi împărţit în mn subintervale egale $\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, pentru orice $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Pe fiecare astfel de interval va fi aplicată formula de cubatură a lui Bernstein. Apoi, adunând formulele de cubatură menţionate se obţine formula de cubatură compozită pe $[0,1] \times [0,1]$. Rezultatele menţionate mai sus pot fi găsite în [**25**], [**20**], [**19**], lucrări scrise în colaborare cu D. Bărbosu şi O.T. Pop.

Mulţumiri. Pe lângă efortul propriu, succesul oricărui proiect depinde în mare parte de încurajarea şi îndrumarea multor altora. Profit de această oportunitate pentru a-mi arăta recunoştinţa faţă de conducătorul ştiinţific Cercet. Şt. I Dr. Ion Păvăloiu pentru valoroasele sugestii, suportul şi îndrumarea de care am beneficiat pe parcursul elaborării acestei teze.
Vreau să mulţumesc tuturor referenţilor: Cercet. Şt. I Dr. Costică Mustăţa, Prof. Univ. Dr. Ioan Raşa şi Conf. Univ. Dr. Dan Bărbosu pentru atenta citire a acestui manuscris şi pentru observaţiile preţioase.
Vreau să mulţumesc de asemenea tuturor membrilor Departamentului de Matematică şi Informatică, care au contribuit la formarea mea ca student, precum ca şi doctorand al Centrului Universitar Nord din Baia Mare.
Aş vrea să-mi arăt aprecierea pentru Conf. Univ. Dr. Dan Bărbosu şi Prof. Dr. Ovidiu T. Pop, fără a căror colaborare şi asistenţă acest program doctoral nu ar fi fost încununat de succes. În plus, acest program m-a făcut să realizez valoarea colaborării într-o echipă. Întregul program ne-a apropiat şi ne-a făcut să apreciem adevărata valoare de prietenie şi respect reciproc.
Sunt profund recunoscător domnului Lect. Univ. Dr. Andrei Horvat-Marc pentru asistenţa tehnică din timpul preparării prezentei teze.
O menţiune onorabilă doresc să o adresez părinţilor pentru înţelegerea şi suportul lor în finalizarea acestui program doctoral.
Nu în ultimul rând, aş dori să-i mulţumesc soţiei mele, Ana pentru încurajarea şi sprijinul acordat în vederea obţinerii acestui grad.

CAPITOLUL 1

Preliminarii şi rezultate auxiliare

În acest capitol prezentăm rezultatele preliminarii şi auxiliare care vor fi folosite pe parcursul acestei teze. Concret, dăm câteva definiţii de bază şi anumite proprietăţi elementare privind operatorii liniari şi pozitivi, care joacă un rol important în teoria aproximării şi acest fapt este demonstrat prin vasta literatură din acest topic. Pentru mai mult informaţii cititorul este invitat să vadă [**4**], [**30**], [**3**], [**157**], [**14**] şi [**17**].

1. Operatori liniari şi pozitivi

1.1. Definiţii şi proprietăţi

1.2. Exemple

2. Aproximare uniformă prin operatori liniari şi pozitivi

3. Modulul de continuitate

4. Diferite tipuri de module de netezime

5. Evaluarea ordinului de aproximare

6. Diferenţele divizate şi funcţiile convexe de ordin superior

CAPITOLUL 2

Rezultate selectate pentru anumiţi operatori liniari şi pozitivi

Scopul principal al acestui capitol este de a face o expunere detaliată asupra operatorilor liniari şi pozitivi prezentaţi în primul capitol, implicând rezultate calitative şi cantitative. Pentru a atinge acest ţel, am demonstrat în fiecare caz rezultate importante privind convergenţa uniformă şi estimări cu modulul de netezime de ordinul întâi şi al doilea, care sunt aplicaţii directe ale proprietăţilor şi formulelor amintite în primul capitol. Apoi, am stabilit formule generale pentru calcularea funcţiilor test pentru fiecare operator, similare cu cea demonstrată prima dată de către S. Karlin şi Z. Ziegler [**73**], pentru operatorii Bernstein. Calcularea momentelor până la ordinul al patrulea pentru operatorii prezentaţi reprezintă o altă idee, ce poate fi urmărită în întregul capitol. Aceste rezultate pot fi găsite în diferite lucrări scrise de către autor, de exemplu [**90**], [**92**], [**89**], [**94**], [**88**], [**86**] sau scrise în colaborare cu D. Bărbosu, O.T. Pop and P.I. Braica [**26**], [**99**], [**27**], [**96**], [**95**], [**98**], [**97**], [**115**], [**117**].

1. Operatori de tip Bernstein

1.1. Operatori Bernstein

Aceşti operatori sunt, foarte probabil, cei mai studiaţi operatori liniari şi pozitivi şi au fost generalizaţi şi modificaţi într-un mare număr de variante. Avantajul operatorilor Bernstein constă în simplitatea lor, şi în proprietăţile lor fine de aproximare. Din anumite puncte de vedere operatorii Bernstein au o pozitie extremă în câteva clase de operatori. Pentru a obţine câteva rezultate privind calcularea funcţiilor test prin operatorii Bernstein, prima dată amintim rezultatul de bază stabilit în [**116**], de către O.T. Pop şi M. Farcaş.

Propoziţia 2.1.1. *Dacă $j, n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0,1]$ atunci*

$$B_n(e_j; x) = \frac{1}{n^j} \sum_{i=1}^{j} S(j,i)(n)_i x^i, \tag{2.1}$$

unde e_j sunt funcţile test, $S(j,i)$ numerele lui Stirling de speţa a douaşi $(n)_i$ factorialul descrescător notat cu simbolul lui Pochhammer.

Observaţia 2.1.2. În timpul preparării lucrării noastre [**96**], făcând cercetări amănunţite am descoperit că relaţia (2.1) a fost demonstrată mult mai devreme de către S. Karlin şi Z. Ziegler [**73**]. Ca şi un caz special, putem afla aceeaşi relaţie în [**1**], unde a fost considerată dezvoltarea asimptotică a polinoamelor multidimesnionale Bernstein pe un simplex.

Calcularea momentelor de ordin superior este plictisitoare, mai degrabă este o muncă mecanică. Pe baza câtorva rezultate cunoscute, o data ce cunoaştem momente de ordin inferior, obţinem unul de ordin superior. Astfel încât, rezultă:

Lema 2.1.3. (**D. Miclăuş** şi P.I. Braica, [**96**]) *Operatorii Bernstein satisfac*

$$B_n\left((e_1 - x)^2; x\right) = \frac{x(1-x)}{n},$$
$$B_n\left((e_1 - x)^3; x\right) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2},$$
$$B_n\left((e_1 - x)^4; x\right) = \frac{3(x(1-x))^2}{n^2} + \frac{x(1-x) - 6(x(1-x))^2}{n^3}.$$

Aplicaţia 2.1.4. În cele ce urmează considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, pe care o vom aproxima prin operatorul Bernstein pentru diferite alegeri ale numărului de noduri.

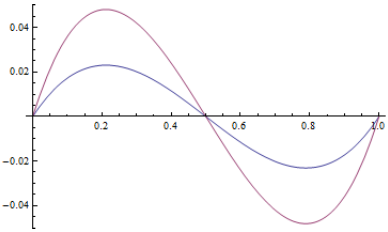


Figure 1. Aproximarea lui f prin operatorul Bernstein, pentru $m = 5$

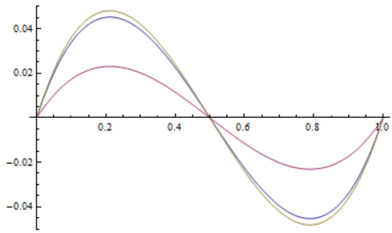


Figure 2. Aproximarea lui f prin operatorul Bernstein, pentru $m = 5$ şi $m = 50$

1.2. Operatori Kantorovich

1.3. Operatori Bernstein-Schurer

1.4. Operatori Stancu

Aceşti operatori au fost introduşi şi investigaţi de către D.D. Stancu în lucrarea [**144**], pentru orice parametru α nenegativ, care poate depinde doar de numărul natural n. A fost studiat în continuare şi în lucrările [**147**], [**148**], [**159**], precum şi în diferite lucrări publicate de către alţi autori [**104**], [**40**], [**83**], [**84**], [**32**] şi [**163**]. Operatorul original de tip Bernstein este conectat cu distribuţia probabilistică a lui Markov-Polya şi cu formula de convoluţie a lui Vandermonde. Din punct de vedere a interpretării probabilistice, operatorii Stancu pot fi generaţi pornind de la distribuţia probabilistică a lui Bernoulli, aşa că este posibil să se obţină aceşti operatori, cum a arătat D.D. Stancu în [**147**], prin folosirea unei distribuţii probabilistice mai generale, care este conectată cu schema urnei a lui Markov-Polya. Alte detalii privind interpretarea probabilistică pot fi găsite în [**32**]. În [**94**] am demonstrat o formulă generală privind calcularea funcţiilor test prin operatorii Stancu, dată prin:

Teorema 2.1.5. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Pentru orice $j, n \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0,1]$, are loc*

$$P_n^{\langle\alpha\rangle}(e_j;x) = \tfrac{1}{n^j}\sum_{i=0}^{j-1} S(j,j-i)(n)_{j-i}\tfrac{x^{[j-i,-\alpha]}}{1^{[j-i,-\alpha]}}. \tag{2.2}$$

Observaţia 2.1.6. Relaţia (2.2) a fost demonstrată şi în [**89**], folosind altă tehnică, adică, utilizând proprietăţile operatorilor Bernstein.

Calcularea momentelor de ordin superior este dată de următoarea:

Lema 2.1.7. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Operatorii Stancu satisfac*
$P_n^{\langle\alpha\rangle}\left((e_1-x)^2;x\right) = \frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)}$,
$P_n^{\langle\alpha\rangle}\left((e_1-x)^3;x\right) = \frac{x(1-x)(1-2x)(1+\alpha n)(1+2\alpha n)}{n^2(1+\alpha)(1+2\alpha)}$,
$P_n^{\langle\alpha\rangle}\left((e_1-x)^4;x\right) = \frac{(x(1-x))^2\left((3n-18\alpha n)(1+\alpha n)^2-6(1+\alpha n)\right)}{n^3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}$
$+\ \frac{x(1-x)\left(6\alpha n(1+\alpha n)^2+(1-\alpha)(1+\alpha n)\right)}{n^3(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)}$.

Presupunând că parametrul α are o valoare fixă nenegativă în fiecare termen al şirului $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\geq 1}$, în [**144**] D.D. Stancu a stabilit o relaţie importantă între doi termeni consecutivi ai acestui şir, care este necesară pentru demonstrarea proprietăţii de monotonie, în cazul funcţiilor convexe sau concave de ordinul întâi.

Teorema 2.1.8. [**144**] *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, între polinoamele $P_{n+1}^{\langle\alpha\rangle}(f;x)$ şi $P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)$ există următoarea relaţie*

$$\begin{aligned} & P_{n+1}^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) \\ & = -\tfrac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{n-1-k}\alpha)}{(1+n\alpha)(1+\overline{n-1}\alpha)}p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left[\tfrac{k}{n},\tfrac{k+1}{n+1},\tfrac{k+1}{n};f\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Proprietatea de monotonie a fost revizuită în [**94**]. Am demonstrat că relaţia (2.3) este doar o formă intermediară a proprietăţii de monotonie şi am stabilit forma finală, dată prin:

Teorema 2.1.9. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, diferenţa dintre doi termeni consecutivi ai operatorilor Stancu este dată prin*

(2.4)
$$P_{n+1}^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f\right],$$

unde $p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) = \binom{n-1}{k} \frac{(x+\alpha)^{[k,-\alpha]}(1-x+\alpha)^{[n-1-k,-\alpha]}}{(1+2\alpha)^{[n-1,-\alpha]}}$.

Pentru cazul particular, când $\alpha = 0$, relaţia (2.4) se reduce la formula corespunzătoare a lui Bernstein (a se vedea [**5**], [**143**]) dată prin

$$B_{n+1}(f;x) - B_n(f;x) = -\frac{x(1-x)}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}(x) \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n+1}, \frac{k+1}{n}; f\right].$$

Conform cunoştinţelor noastre şi câtorva lucrări importante, de exemplu [**166**], [**5**], [**143**], [**32**], demonstraţia privind proprietatea de monotonie pentru şirul polinoamelor lui Stancu nu a fost stabilită în totalitate. După prezentarea din cadrul ICAM 8 - 2011 mi-a fost adus la cunoştinţă de către D. Bărbosu că teorema lui Popoviciu nu poate fi aplicată operatorilor Stancu. Explicaţia este corelată cu faptul că o relaţie privind diferenţa dintre operatorul Stancu şi funcţia corespunzătoare nu a fost demonstrată. Fiind motivat de această remarcă am demonstrat în [**86**] următoarea:

Teorema 2.1.10. (**D. Miclăuş**, [**86**]) *Dacă funcţia f este*

i) convexă de ordinul întâi pe $[0,1]$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ şirul $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător şi $P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) > f(x)$.

ii) concavă de ordinul întâi pe $[0,1]$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ şirul $\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi $P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) < f(x)$.

Aplicaţia 2.1.11. În cele ce urmează am considerat funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, pe care o vom aproxima prin operatorul Stancu pentru diferite alegeri ale numărului de noduri şi diferite valori ale parametrului α.

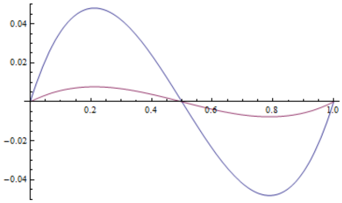


Figure 3. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 5$ şi $\alpha = 0.5$

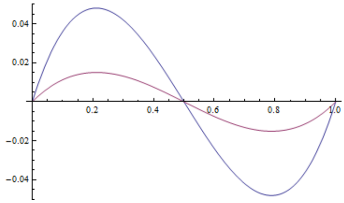


Figure 4. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 50$ şi $\alpha = 0.5$

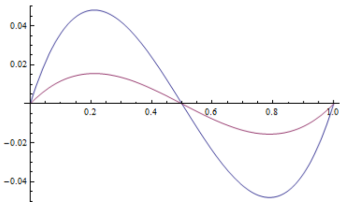


Figure 5. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 100$ şi $\alpha = 0.5$

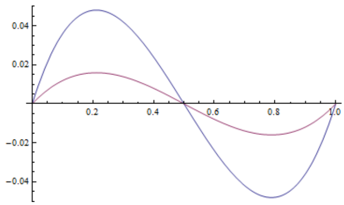


Figure 6. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 500$ şi $\alpha = 0.5$

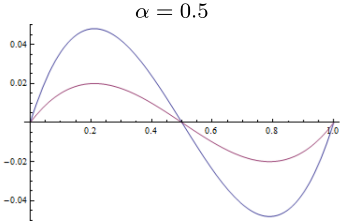


Figure 7. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 5$ şi $\alpha = 0.05$

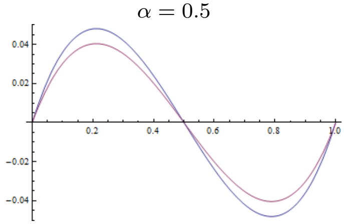


Figure 8. Approximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 100$ şi $\alpha = 0.05$

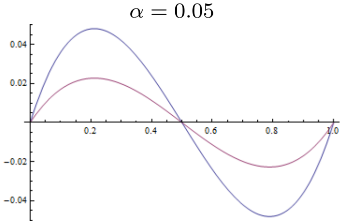


Figure 9. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 5$ şi $\alpha = 0.005$

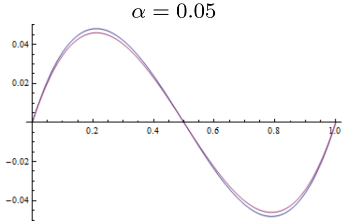


Figure 10. Aproximarea lui f prin operatorul Stancu, pentru $m = 100$ şi $\alpha = 0.005$

1.5. Operatori Bernstein-Stancu

1.6. Operatori Schurer-Stancu

1.7. O clasă generală de operatori de tip Bernstein

În 1972 D.D. Stancu [**150**] a introdus o clasă generală de operatori de tip Bernstein, unde n este un număr natural, p este un număr întreg nenegativ, în timp ce β şi γ sunt parametrii reali satisfăcând relaţia $0 \leq \beta \leq \gamma$. Parametrul α poate depinde doar de numărul natural n, adică, $\alpha = \alpha(n) \to 0$ când $n \to \infty$. Aceşti operatori au fost investigaţi de un număr mare de autori şi cea mai completă lucrare a fost făcută de către H.H. Gonska and J. Meier [**54**]. În cele ce urmează, dorim să prezentăm doar câteva cazuri particulare ale acestei clase generale, care sunt conţinute de asemenea în [**54**].

Cazul 1.

Alegerea parametrilor: $p = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,0}^{\langle 0,0,0\rangle}(f;x) := B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Cazul 2.

Alegerea parametrilor: $p \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,p}^{\langle 0,0,0\rangle}(f;x) := \tilde{B}_{n,p}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Cazul 3.

Alegerea parametrilor: $p = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,0}^{\langle \alpha,0,0\rangle}(f;x) := P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{[k,-\alpha]}(1-x)^{[n-k,-\alpha]}}{1^{[n,-\alpha]}} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Cazul 4.

Alegerea parametrilor: $p = 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,0}^{\langle 0,\beta,\gamma\rangle}(f;x) := P_n^{(\beta,\gamma)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\beta}{n+\gamma}\right).$$

Cazul 5.

Alegerea parametrilor: $p \neq 0$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,p}^{\langle 0,\beta,\gamma\rangle}(f;x) := \tilde{S}_{n,p}^{(\beta,\gamma)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k (1-x)^{n+p-k} f\left(\frac{k+\beta}{n+\gamma}\right).$$

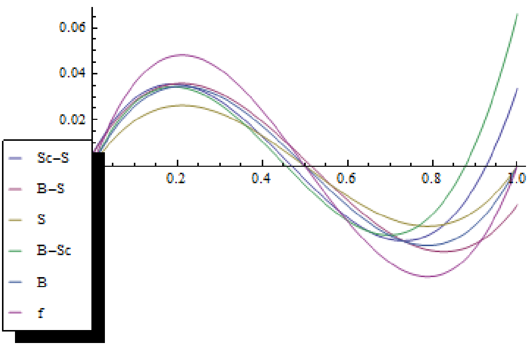
Cazul 6. (caz special)

Alegerea parametrilor: $p = 0$, $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Reprezentarea explicită pentru $L_{n,p}^{\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle}(f;x)$:

$$L_{n,0}^{\left\langle \frac{1}{n},0,0\right\rangle}(f;x) := P_n^{\left\langle \frac{1}{n}\right\rangle}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{\left[k,-\frac{1}{n}\right]}(1-x)^{\left[n-k,-\frac{1}{n}\right]}}{1^{\left[n,-\frac{1}{n}\right]}} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Aplicaţia 2.1.12. În cele ce urmează considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată prin $f(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, pe care o vom aproxima prin operatori Bernstein, Bernstein-Schurer, Stancu, Bernstein-Stancu, respectiv Schurer-Stancu pentru diferite alegeri ale numărului de noduri şi aceleaşi valori ale parametrilor p, α, β.



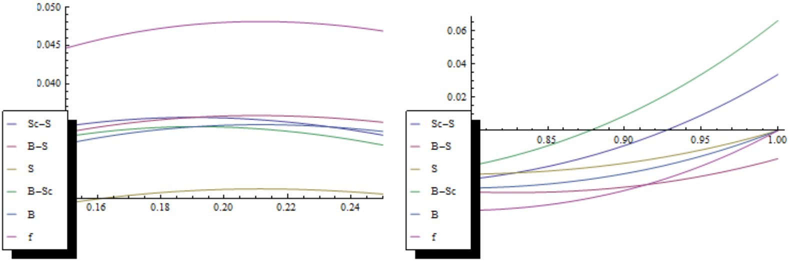


Figure 11. Aproximarea lui f prin operatori de tip Bernstein, pentru $m = 10$, $p = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$

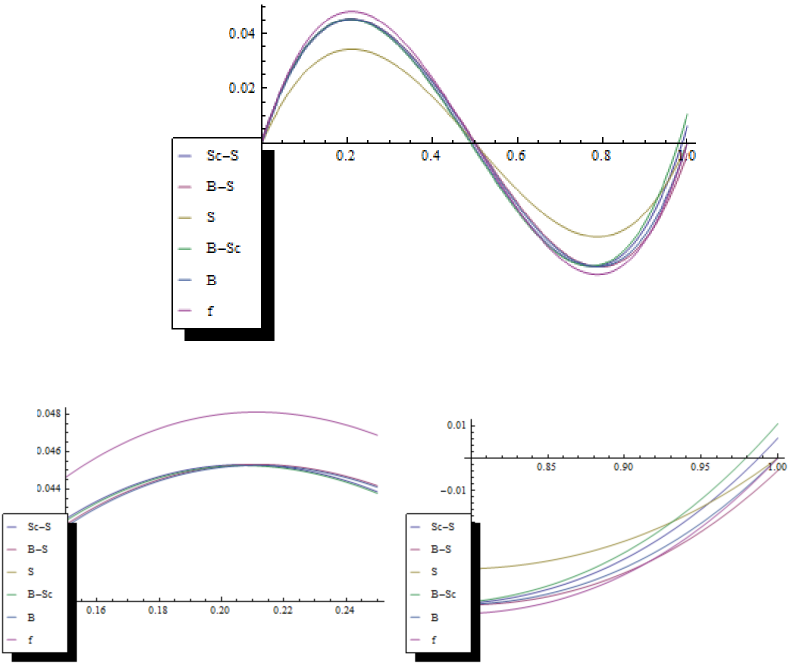


Figure 12. Aproximarea lui f prin operatori de tip Bernstein, pentru $m = 50$, $p = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$

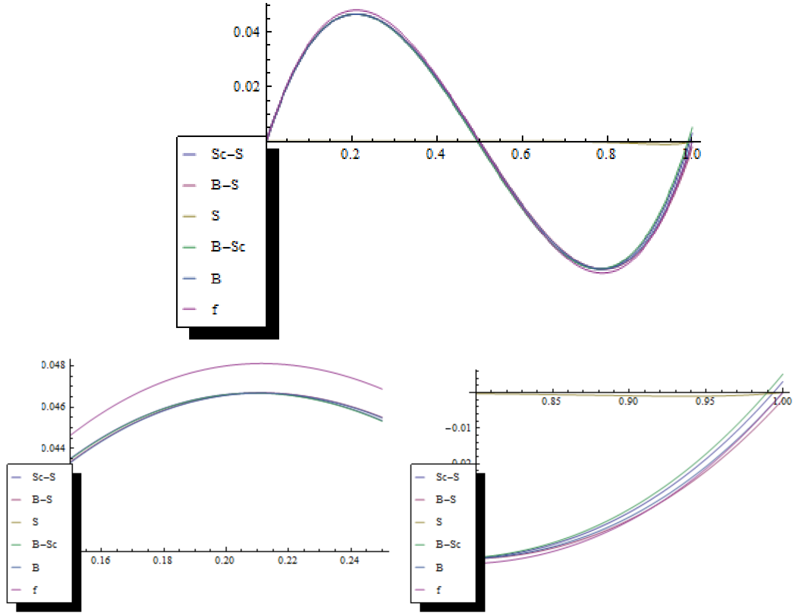


Figure 13. Aproximarea lui f prin operatori de tip Bernstein, pentru $m = 100$, $p = 1$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$

2. Operatori de tip Szász-Mirakjan

2.1. Operatori Mirakjan-Favard-Szász

Cu scopul de a obţine anumite rezultate calitative şi cantitative pentru funcţiile definite pe intervale nemărginite, în cele ce urmează prezentăm câţiva operatori liniari şi pozitivi definiţi pe spaţiul

$$C_2[0,+\infty) = \left\{ f \in C[0,+\infty) : \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2} \text{ există şi este finită} \right\},$$

care este înzestrat cu norma $\|f\|_2 := \sup\limits_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{1+x^2}$.

Operatorii Mirakjan-Favard-Szász reprezintă generalizarea operatorilor Bernstein pe intervalul infinit. În această clasă de operatori definiţi pe intervale nemărginite, operatorii Mirakjan-Favard-Szász joacă un rol important şi au fost studiaţi intens, de exemplu câteva lucrări recente [**36**], [**130**], [**44**], [**103**], [**80**], [**27**], [**97**].

2.2. Operatori Szász-Mirakjan-Kantorovich

2.3. Operatori Szász-Mirakjan-Schurer

3. Operatori de tip φ-Szász-Mirakjan

3.1. Operatori φ-Szász-Mirakjan

Recent, C. Mortici [**103**] a definit o nouă clasă de operatori liniari şi pozitivi depinzând de o anumită funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Operatorii conţinuţi în această nouă clasă generalizează binecunoscuţii operatori Mirakjan-Favard-Szász. Cu scopul de a înţelege cât mai bine însemnătatea acestor operatori dăm câteva exemple:

Exemplul 2.3.13. (**D. Miclăuş** et al., [**27**])Fie $\varphi(x) = (x+1)^2 e^x$ dată, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0, +\infty)$, rezultă

$$\varphi^{(k)}(x) = \left(x^2 + 2x(k+1) + k^2 + k + 1\right) e^x.$$

În acest caz, pentru orice $f \in C_2[0, +\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, obţinem

$$\varphi S_n(f; x) = \tfrac{e^{-nx}}{(nx+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{k^2+k+1}{k!} (nx)^k f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

Exemplul 2.3.14. (**D. Miclăuş** et al., [**27**]) Fie $\varphi(x) = \frac{2(x+1)e^x}{x+2}$ dată, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0, +\infty)$, rezultă

$$\varphi^{(k)}(x) = 2e^x \left(\tfrac{x+1}{x+2} + \sum_{i=1}^{k} \tbinom{k}{i} \left(\tfrac{x+1}{x+2}\right)^{(i)} \right)$$

$$= 2e^x \left(\tfrac{x+1}{x+2} + \sum_{i=1}^{k} \tbinom{k}{i} \left(1 - \tfrac{1}{x+2}\right)^{(i)} \right) = 2e^x \left(\tfrac{x+1}{x+2} + \sum_{i=1}^{k} \tbinom{k}{i} \tfrac{(-1)^{i+1} \cdot i!}{(x+2)^{i+1}} \right).$$

În acest caz, pentru orice $f \in C_2[0,+\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, obţinem

$$\varphi S_n(f;x) = \tfrac{(nx+2)e^{-nx}}{2(nx+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+\sum\limits_{i=1}^{\infty} \binom{k}{i} \frac{(-1)^{i+1}\cdot i!}{2^i}}{k!} (nx)^k f\left(\tfrac{k}{n}\right).$$

3.2. Operatori φ-Szász-Mirakjan-Kantorovich

Folosind idea utilizată de C. Mortici [**103**] pentru definirea operatorilor φ-Szász-Mirakjan, am construit în [**26**] o clasă nouă de operatori liniari şi pozitivi depinzând de o anumită funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$. Aceşti operatori sunt numiţi operatori φ-Szász-Mirakjan-Kantorovich, pentru că în cazul când $\varphi(x) = e^x$, se reduc la operatorii clasici Szász-Mirakjan-Kantorovich. Pentru a înţelege cât mai bine însemnătatea acestor operatori dăm următorul:

Exemplul 2.3.15. (**D. Miclăuş** et al., [**26**]) Fie $\varphi(x) = (x+1)e^x$ dată, atunci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $x \in [0,+\infty)$, rezultă

$$\varphi^{(k)}(x) = (x+k+1)e^x.$$

În acest caz, pentru orice $f \in C_2[0,+\infty)$ şi $n \in \mathbb{N}$, obţinem

$$\varphi\tilde{K}_n(f;x) = \tfrac{ne^{-nx}}{nx+1} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{k+1}{k!} (nx)^k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt.$$

3.3. O clasă generală de operatori de tip φ-Szász-Mirakjan

Această secţiune este dedicată definirii unei noi clase generale de operatori liniari şi pozitivi depinzând de o anumită funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$. Operatorii conţinuţi în această nouă clasă generalizează binecunoscuţii operatori Mirakjan-Favard-Szász, respectiv φ-Szász-Mirakjan.

CAPITOLUL 3

Teoreme de tip Voronovskaja aplicate anumitor operatori liniari şi pozitivi

Acest capitol este dedicat prezentării diferitelor versiuni calitative şi cantitative ale teoremei de tip Voronovskaja aplicată unei clase mari de operatori liniari şi pozitivi. Am folosit o tehnică dezvoltată în câteva lucrări recente de către O.T. Pop (a se vedea [**107**], [**110**], [**108**], [**111**]), cu scopul de a obţine comportarea asimptotică a operatorilor prezentaţi în primul capitol, convergenţa uniformă şi ordinul de aproximare pentru funcţiile aproximate. Aceste rezultate pot fi găsite în diferite lucrări scrise de autor, de exemplu [**90**], [**92**], [**94**], [**88**] sau scrise în colaborare cu O.T. Pop, D. Bărbosu şi P.I. Braica [**99**], [**118**], [**96**], [**98**], [**97**], [**115**], [**117**].

1. Teoreme calitative şi cantitative de tip Voronovskaja

2. Aplicaţie la operatorii de tip Bernstein

Rezultatul demonstrat de către E.V. Voronovskaja [**169**] pentru operatorii Bernstein este binecunoscut şi poate fi găsit în monografia R.A. DeVore şi G.G. Lorentz [**34**].

Teorema 3.2.16. *Dacă funcţia f este mărginită pe $[0,1]$, derivabilă într-o vecinătate a lui x şi are derivată de ordinul doi $f^{(2)}(x)$ pentru anumiţi $x \in [0,1]$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n(f;x) - f(x)\right) = \tfrac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x).$$

Dacă $f \in C^2[0,1]$, *convergenţa este uniformă.*

Acest rezultat a atras atenţia multor autori în ultimi 80 de ani.

Operatori Bernstein

Teorema 3.2.17. (**D. Miclăuş** şi P.I. Braica, [**96**]) *Fie* $f \in C[0,1]$ *dată. Dacă* $x \in [0,1]$ *şi* f *este de* s *ori derivabilă într-o vecinătate a lui* x, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x), \ \textit{pentru } s=0; \tag{3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} n(B_n(f;x) - f(x)) = \tfrac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x), \ \textit{pentru } s=0; \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^2 \left(B_n(f;x) - f(x) - \tfrac{x(1-x)}{2n} f^{(2)}(x)\right) \\ &= \tfrac{x(1-x)(1-2x)}{6} f^{(3)}(x) + \tfrac{(x(1-x))^2}{8} f^{(4)}(x), \ \textit{pentru } s=4. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Presupunând că f *este de* s *ori derivabilă pe* $[0,1]$. *Atunci convergenţa din* (3.5)–(3.7) *este uniformă pe* $[0,1]$. *În plus, obţinem*

$$|B_n(f;x) - f(x)| \le \tfrac{5}{4} \cdot \omega\left(f, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \ \textit{pentru } s=0 \textit{ şi} \tag{3.8}$$

$$n\left|B_n(f;x) - f(x) - \tfrac{x(1-x)}{2n} f^{(2)}(x)\right| \le \tfrac{7}{32} \cdot \omega\left(f^{(2)}, \tfrac{1}{\sqrt{n}}\right), \ \textit{pentru } s=2. \tag{3.9}$$

Operatori Stancu

Teorema 3.2.18. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Fie* $f \in C[0,1]$ *dată. Dacă* $x \in [0,1]$ *şi* f *este de* s *ori derivabilă într-o vecinătate a lui* x, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = f(x), \ \textit{pentru } s=0; \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - f(x)\right) = \tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)} f^{(2)}(x), \ \textit{pentru } s=2; \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^2 \left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) - f(x) - \tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)} f^{(2)}(x)\right) \\ &= \tfrac{x(1-x)(1-2x)(1+\alpha n)(1+2\alpha n)}{6(1+\alpha)(1+2\alpha)} f^{(3)}(x) + \tfrac{(x(1-x))^2(1+\alpha n)^2}{8(1+\alpha)(1+2\alpha)(1+3\alpha)} f^{(4)}(x), \ \textit{pentru } s=4. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Presupunând că f este de s ori derivabilă pe $[0,1]$, atunci convergenţa din (3.10)–(3.12) este uniformă pe $[0,1]$. În plus, obţinem

$$\left|P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)-f(x)\right|\le\left(1+\tfrac{1+\alpha n}{4(1+\alpha)}\right)\cdot\omega\left(f,\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \textit{pentru } s=0 \textit{ şi}$$

$$n\left|P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)-f(x)-\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)}f^{(2)}(x)\right|$$
$$\le\tfrac{1+\alpha n}{8(1+\alpha)}\left(1+\tfrac{3(1+\alpha n)}{4(1+2\alpha)(1+3\alpha)}\right)\cdot\omega\left(f^{(2)},\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \textit{pentru } s=2.$$

Estimări folosind cel mai mic majorant concav al modulului de continuitate pot fi date, folosind rezultatul demonstrat în [**56**], prin

Propoziţia 3.2.19. *Pentru operatorii Stancu, obţinem*

$$\left|n\left(P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)-f(x)\right)-\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)}f^{(2)}(x)\right|$$
$$\le\tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2(1+\alpha)}\cdot\tilde{\omega}\left(f^{(2)},\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1+\alpha n}{n(1+3\alpha)}}\right).$$

3. Aplicaţie la operatorii de tip Szász-Mirakjan

Operatori Mirakjan-Favard-Szász

Operatori Szász-Mirakjan-Kantorovich

Operatori Szász-Mirakjan-Schurer

4. Aplicaţie la operatorii de tip φ-Szász-Mirakjan

Operatori φ-Szász-Mirakjan

Operatori φ-Szász-Mirakjan-Kantorovich

Operatori de tip φ-Szász-Mirakjan

CAPITOLUL 4

Aproximarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi

Idea de bază a acestui capitol este aproximarea uni şi bidimensională a funcţiilor prin câţiva operatori liniari şi pozitivi prezentaţi, precum şi estimarea marginilor superioare pentru termenii rest corespunzători. În [**91**], [**93**], [**94**], [**85**], [**86**], [**87**] am demonstrat rezultate importante şi interesante privind formulele de aproximare uni, respectiv bidimensionale prin anumiţi operatori liniari şi pozitivi.

1. Formulele de aproximare uni şi bidimensionale Bernstein

2. Formulele de aproximare uni şi bidimensionale de tip Stancu

Formule de aproximare unidimensionale

Pentru orice $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, următoarea

$$f(x) = P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) + R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) \tag{4.13}$$

se numeşte formula de aproximare a lui Stancu, unde $R_n^{\langle\alpha\rangle}$ este operatorul rest asociat operatorului Stancu $P_n^{\langle\alpha\rangle}$, adică $R_n^{\langle\alpha\rangle}$ este termenul rest a formulei de aproximare (4.13). Studiul asupra termenului rest asociat operatorilor Stancu a fost făcut în [**144**], cu ajutorul diferenţelor divizate de primul, respectiv al doilea ordin a funcţiei f. Trei ani mai târziu, în [**149**] D.D. Stancu a stabilit o expresie a acestui termen rest folosind doar diferenţele divizate de ordinul al doilea:

Teorema 4.2.20. *Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, termenul rest asociat operatorilor Stancu poate fi reprezentat sub următoarea formă*

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{n-1-k}\alpha)}{n(1+\overline{n-1}\alpha)} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x)\left[x, \tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}; f\right]. \tag{4.14}$$

Pentru stabilirea unei reprezentări a unui anumit termen rest, asociat unui operator liniar, putem folosi binecunoscutul criteriu demonstrat de către T. Popoviciu [**124**]. Cu scopul de a obţine o formă corespunzătoare a termenului rest, ca şi o aplicaţie, în [**86**] am aplicat teorema lui Popoviciu operatorilor Stancu.

Aplicaţia 4.2.21. (**D. Miclăuş**, [**86**]) Aplicând teorema lui Popoviciu operatorilor Stancu, rezultă că funcţionala liniară $R_n^{\langle\alpha\rangle}$ din $C[0,1]$, definită prin $R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = f(x) - P_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)$, satisface

i) $R_n^{\langle\alpha\rangle}(e_0;x) = R_n^{\langle\alpha\rangle}(e_1;x) = 0$, $R_n^{\langle\alpha\rangle}(e_2;x) = -\frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)} \neq 0$;

ii) Pentru orice funcţie $f \in C[0,1]$ convexă de ordinul întâi, $R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) \neq 0$.

Atunci, pentru orice funcţie $f \in C[0,1]$, există trei puncte $0 \le \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 \le 1$, astfel încât

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = R_n^{\langle\alpha\rangle}(e_2;x)[\xi_0,\xi_1,\xi_2;f] = -\frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)}[\xi_0,\xi_1,\xi_2;f]. \tag{4.15}$$

Idea de revizuire apare când ne uităm la rezultatul demonstrat cu teorema lui Popoviciu şi relaţia (4.14). Evaluarea termenului rest a fost revizuită în [**94**] de către autor.

Teorema 4.2.22. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Reprezentarea termenului rest asociat operatorilor Stancu este dată prin*

$$R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x) = -\frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)\left[x, \tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}; f\right], \tag{4.16}$$

unde $p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha) = \binom{n-1}{k}\frac{(x+\alpha)^{[k,-\alpha]}(1-x+\alpha)^{[n-1-k,-\alpha]}}{(1+2\alpha)^{[n-1,-\alpha]}}$.

Observaţia 4.2.23. (**D. Miclăuş**, [**94**]) Ar trebui remarcat faptul că expresia (4.14) a termenului rest este o formă intermediară a expresiei (4.16). În una dintre cele mai importante lucrări [**32**], care este o colecţie a principalelor rezultate obţinute în teoria aproximării funcţiilor cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi a lui D.D. Stancu, aflăm că ambele expresii (4.14), (4.15) ale termenului rest sunt prezentate. Făcând cercetări amănunţite, am descoperit în [**154**] reprezentarea (4.16), care este demonstrată folosind $\frac{(x+k\alpha)(1-x+\overline{n-1-k}\alpha)}{n(1+\overline{n-1}\alpha)}p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x) = \frac{x(1-x)(1+\alpha n)}{n(1+\alpha)}p_{n-1,k}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)$, fapt ce fortifică idea că (4.14) este doar o formă intermediară.

Corolarul 4.2.24. (**D. Miclăuş**, [**94**]) *Presupunând că* $f \in C^2[0,1]$ *şi că diferenţele divizate de ordinul al doilea a lui* f *sunt toate mărginite pe* $[0,1]$, *atunci obţinem*

$$\left|R_n^{\langle\alpha\rangle}(f;x)\right| \leq \tfrac{x(1-x)(1+\alpha n)}{2n(1+\alpha)}M_2[f] \leq \tfrac{1+\alpha n}{8n(1+\alpha)}M_2[f]. \tag{4.17}$$

Formule de aproximare bidimensionale

Folosind aceaşi procedură pentru construirea operatorilor liniari şi pozitivi pe spaţiul funcţiilor multidimensionale, ca şi în cazul operatorilor Bernstein putem defini extinderile parametrice ale operatorilor Stancu, prin

$$ {}_xP_m^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{m,i}^{\langle\alpha\rangle}(x)p_{n,j}^{\langle\beta\rangle}(y)f\left(\tfrac{i}{m},y\right), \quad \text{respectiv} \tag{4.18}$$

$$ {}_yP_n^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{m,i}^{\langle\alpha\rangle}(x)p_{n,j}^{\langle\beta\rangle}(y)f\left(x,\tfrac{j}{n}\right). \tag{4.19}$$

Considerând operatorii (4.18) şi (4.19), două tipuri de operatori bidimensionali Stancu pot fi definiţi. Unul se numeşte operator GBS şi este definit prin

$$\begin{aligned} U_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) &= {}_xP_m^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) + {}_yP_n^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) - P_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} p_{m,i}^{\langle\alpha\rangle}(x)p_{n,j}^{\langle\beta\rangle}(y)\left(f\left(\tfrac{i}{m},y\right)+f\left(x,\tfrac{j}{n}\right)-f\left(\tfrac{i}{m},\tfrac{j}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Celălalt poate fi obţinut prin produsul tensorial al extinderilor parametrice şi este dat prin

$$ {}_xP_m^{\langle\alpha,\beta\rangle}\left({}_yP_n^{\langle\alpha,\beta\rangle};x,y\right)=P_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}p_{m,i}^{\langle\alpha\rangle}(x)p_{n,j}^{\langle\beta\rangle}(y)f\left(\tfrac{i}{m},\tfrac{j}{n}\right). $$

Operatorii $P_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ definiţi pe domeniul poligonal S se numesc operatori bidimensionali Stancu şi pot fi găsiţi în [**149**], [**32**]. Demonstrăm:

Teorema 4.2.25. (**D. Miclăuş**, [**85**]) *Termenul rest asociat operatorului GBS Stancu poate fi reprezentat sub următoarea formă*

$$ R_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) $$

$$ =\tfrac{xy(1-x)(1-y)(1+m\alpha)(1+n\beta)}{mn(1+\alpha)(1+\beta)}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}p_{m-1,i}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)p_{n-1,j}^{\langle\beta\rangle}(y+\beta)\left[\begin{array}{l} x,\tfrac{i}{m},\tfrac{i+1}{m} \\ y,\tfrac{j}{n},\tfrac{j+1}{n}\end{array};f\right], $$

unde $p_{m-1,i}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)=\binom{m-1}{i}\frac{(x+\alpha)^{[i,-\alpha]}(1-x+\alpha)^{[m-1-i,-\alpha]}}{(1+2\alpha)^{[m-1,-\alpha]}}$.

Estimarea marginei superioare pentru termenul rest este dată în:

Corolarul 4.2.26. (**D. Miclăuş**, [**85**]) *Dacă funcţia f are următoarele proprietăţi*

i) $f\in C^{2,2}(S)$,

ii) există $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ *on* $(0,1)\times(0,1)$,

iii) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ *este mărginită pe S, atunci au loc inegalităţile*

$$ \left|R_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y)\right|\le\tfrac{xy(1-x)(1-y)(1+m\alpha)(1+n\beta)}{4mn(1+\alpha)(1+\beta)}M_{2,2}[f]\le\tfrac{(1+m\alpha)(1+n\beta)}{64mn(1+\alpha)(1+\beta)}M_{2,2}[f], $$

pentru orice $(x,y)\in S$ şi $m,n\in\mathbb{N}$.

Teorema 4.2.27. (**D. Miclăuş**, [**87**]) *Termenul rest asociat formulei de aproximare bidimensională a lui Stancu poate fi reprezentată sub forma*

$$R_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y) = -\frac{x(1-x)(1+m\alpha)}{m(1+\alpha)}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n} p_{m-1,i}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)p_{n,j}^{\langle\beta\rangle}(y)\begin{bmatrix} x, \frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} & ; f \\ \frac{j}{n} & \end{bmatrix}$$

$$-\frac{y(1-y)(1+n\beta)}{n(1+\beta)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} p_{m,i}^{\langle\alpha\rangle}(x)p_{n-1,j}^{\langle\beta\rangle}(y+\beta)\begin{bmatrix} \frac{i}{m} & ; f \\ y, \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} & \end{bmatrix}$$

$$+\frac{xy(1-x)(1-y)(1+m\alpha)(1+n\beta)}{mn(1+\alpha)(1+\beta)}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} p_{m-1,i}^{\langle\alpha\rangle}(x+\alpha)p_{n-1,j}^{\langle\beta\rangle}(y+\beta)\begin{bmatrix} x, \frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} & ; f \\ y, \frac{j}{n}, \frac{j+1}{n} & \end{bmatrix}.$$

Estimarea marginei superioare pentru termenul rest este dată în:

Corolarul 4.2.28. (**D. Miclăuş**, [**87**]) *Dacă funcţia f are următoarele proprietăţi*

i) $f \in C^{2,2}(S)$,

ii) există $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ *on* $(0,1)\times(0,1)$,

iii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ *sunt mărginite pe S, atunci au loc inegalităţile*

$$\left|R_{m,n}^{\langle\alpha,\beta\rangle}(f;x,y)\right|$$

$$\leq \frac{x(1-x)(1+\alpha m)}{m(1+\alpha)}M_{2,0}[f] + \frac{y(1-y)(1+\beta n)}{n(1+\beta)}M_{0,2}[f] + \frac{xy(1-x)(1-y)(1+\alpha m)(1+\beta n)}{mn(1+\alpha)(1+\beta)}M_{2,2}[f]$$

$$\leq \frac{1+\alpha m}{8m(1+\alpha)}M_{2,0}[f] + \frac{1+\beta n}{8n(1+\beta)}M_{0,2}[f] + \frac{(1+\alpha m)(1+\beta n)}{64mn(1+\alpha)(1+\beta)}M_{2,2}[f],$$

pentru orice $(x,y)\in S$ şi $m,n\in\mathbb{N}$.

3. Formulele de aproximare uni şi bidimensionale de tip Mirakjan-Favard-Szász

CAPITOLUL 5

Aproximarea funcţionalelor liniare

1. Preliminarii

Scopul acestui paragraf este de a aproxima integrala definită a unei funcţii date pe un interval finit, folosind informaţii numerice, precum şi informaţii globale. Informaţiile numerice sunt valori ale funcţiilor în diferite puncte şi pot fi folosite în aproximarea valorilor integralei definite. În cazul în care o integrală definită este aproximată printr-o astfel de metodă, evaluarea erorii poate fi făcută folosind informaţiile globale, care se referă la afilierea funcţiei integrate anumitor clase de funcţii. Formula $I(f) = Q(f) + R(f)$, unde $Q(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \lambda_k(f)$ se numeşte formulă de integrare numerică pentru funcţia f sau formulă de cuadratură. Parametrii A_k, $k = \overline{0,n}$ se numesc ponderi sau coeficienţi ai formulei, şi $R(f)$ este termenul rest. Studiul asupra formulelor de cuadratură poate fi făcut doar pentru funcţii unidimensionale şi extinderea la cazul funcţiilor bidimensionale implică alte formule, numite formule de cubatură. În cele ce urmează, ne referim la studiul asupra formulelor de cuadratură, respectiv cubatură aplicate binecunoscutului operator liniar şi pozitiv Bernstein.

2. Formula de cuadratură a lui Bernstein

2.1. Formula de cuadratură compozită a lui Bernstein

Ţelul acestei secţiuni este de a construi formula de cuadratură compozită a lui Bernstein. Pentru a obţine acest lucru, intervalul $[0, 1]$ va fi împărţit în n subintervale egale $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, pentru orice $j = \overline{1, n}$. Pe fiecare astfel de interval, va fi aplicată formula de cuadratură a lui Bernstein. Apoi, adunând formulele de cuadratură menţionate, se va obţine formula de cuadratură compozită pe intervalul $[0, 1]$.

Teorema 5.2.29. (D. Bărbosu şi **D. Miclăuş**, [**20**]) *Pentru orice* $f \in C^2[0, 1]$*, are loc următoarea formulă de cuadratură compozită*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{jn-n+k}{n^2}\right) + R_n[f], \text{ unde } |R_n[f]| \leq \frac{1}{12n} M_2[f].$$

3. Formula de cubatură a lui Bernstein

3.1. Formula de cubatură compozită a lui Bernstein

Ţelul acestei secţiuni este de a construi formula de cubatură compozită a lui Bernstein. Pentru aceasta, intervalul bidimensional $[0, 1] \times [0, 1]$ va fi împărţit în mn subintervale egale $\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Pe fiecare astfel de interval, va fi aplicată formula de cubatură a lui Bernstein. Apoi, adunând formulele de cubatură menţionate, se va obţine formula de cubatură compozită a lui Bernstein pe $[0, 1] \times [0, 1]$.

Teorema 5.3.30. (D. Bărbosu şi **D. Miclăuş**, [**19**]) *Pentru orice* $f \in C^{2,2}([0, 1] \times [0, 1])$*, are loc următoarea formulă de cubatură compozită a lui Bernstein*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dxdy$$
$$= \frac{1}{mn(m+1)(n+1)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{im-m+h}{m^2}, \frac{jn-n+l}{n^2}\right) + R_{m,n}[f],$$

unde $|R_{m,n}[f]| \leq \frac{1}{12m} M_{2,0}[f] + \frac{1}{12n} M_{0,2}[f] + \frac{1}{144(mn)^2} M_{2,2}[f]$.

Bibliografie

[1] U. Abel and M. Ivan, *Asymptotic expansion of the multivariate Bernstein polynomials on a simplex*, Approx. Theory and Appl., **16** (2000), no. 3, 85–93.

[2] U. Abel and M. Ivan, *New representation of the remainder in the Bernstein approximation*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 952–956.

[3] O. Agratini, *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.

[4] F. Altomare and M. Campiti, *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, 17, De Gruyter Series Studies in Mathematics, New York, 1994.

[5] O. Aramă, *Some properties concerning the sequence of polynomials of S.N. Bernstein (in Romanian)*, Studii şi Cerc. Mat., **8** (1957), 195–210.

[6] S.N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Comm. Soc. Math. Kharkow, **13** (1912/1913), 1–2, (Also appears in Russian translation in Bernstein's Collected Works).

[7] S.N. Bernstein, *Complément à l'article de E.V. Voronovskaya "Détérmination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de Bernstein"*, C. R. Akad. Sci. URSS A (1932), no. 4, 86–92.

[8] H. Bohman, *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2** (1952), 43–56.

[9] E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Gauthier-Villars, 1905.

[10] Yu.A. Brudnyni, *On a certain method for approximation of bounded functions, given on an segment (in Russian)*, Studies in Contemporary Problems in Constructive Theory of Functions (Baku) (I.I. Ibragimov, ed.), Second All-Union Conf. Baku 1962, Izdat. Akad. Nauk Azerbaidzan, 1965, pp. 40–45.

[11] D. Bărbosu, *Voronovskaja theorem for Bernstein-Schurer operators*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, **18** (2002), no. 2, 137–140.

[12] D. Bărbosu, *Schurer-Stancu type operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **48** (2003), no. 3, 31–35.

[13] D. Bărbosu, *Simultaneous approximation by Schurer-Stancu type operators*, Math. Balkanica, **17** (2003), no. 3-4, 365–374.

[14] D. Bărbosu, *Polynomial approximation by means of Schurer-Stancu type operators*, Editura Universităţii de Nord, Baia Mare, 2006.

[15] D. Bărbosu, *A Schurer-Stancu type quadrature formula*, Carpathian J. Math., **23** (2007), no. 1-2, 27–31.

[16] D. Bărbosu, *Two dimensional divided differences revisited*, Creat. Math. Inform., **17** (2008), no. 1, 1–7.

[17] D. Bărbosu, *Introducere în analiză numerică şi teoria aproximării*, Editura Universităţii de Nord, Baia Mare, 2009.

[18] D. Bărbosu and M. Bărbosu, *Some properties of the fundamental polynomials of Bernstein-Schurer operators*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, **18** (2002), no. 2, 133–136.

[19] D. Bărbosu and D. Miclăuş, *On the composite Bernstein type cubature formula*, General Mathematics, **18** (2010), no. 3, 73–81.

[20] D. Bărbosu and D. Miclăuş, *On the composite Bernstein type quadrature formula*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **39** (2010), no. 1, 3–7.

[21] D. Bărbosu and O.T. Pop, *A note on the GBS Bernstein's approximation formula*, An. Univ. Craiova, **35** (2008), 1–6.

[22] D. Bărbosu and O.T. Pop, *On the Bernstein bivariate approximation formula*, Carpathian J. Math., **24** (2008), no. 3, 293–298.

[23] D. Bărbosu and O.T. Pop, *A note on the Bernstein's cubature formula*, General Mathematics, **17** (2009), no. 3, 161–172.

[24] D. Bărbosu and O.T. Pop, *Bivariate Schurer-Stancu operators revisited*, Carpathian J. Math., **26** (2010), no. 1, 24–35.

[25] D. Bărbosu, O.T. Pop, and D. Miclăuş, *Some quadrature formulas based on linear and positive operators*, J. of Science and Arts, **11** (2009), no. 2, 198–205.

[26] D. Bărbosu, O.T. Pop, and D. Miclăuş, *The Kantorovich form of some extensions for the Szász-Mirakjan operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **39** (2010), no. 1, 8–20.

[27] D. Bărbosu, O.T. Pop, and D. Miclăuş, *On some extensions for the Szász-Mirakjan operators*, An. Univ. Oradea, Fasc. Math., **18** (2011), 179–187.

[28] P.L. Butzer, *On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval*, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 547–553.

[29] Jia-ding Cao, *On linear approximation method (in Chinese)*, Acta Sci. Natur. Univ. Fudan, **9** (1964), 43–52.

[30] Gh. Coman, *Analiză Numerică*, Editura Libris, Cluj-Napoca, 1995.

[31] I. Coroian, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2003.

[32] B. Della Vecchia, *On the approximation of functions by means of the operators of D.D. Stancu*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **37** (1992), no. 1, 3–36.

[33] F.J. Delvos and W. Schempp, *Boolean Methods in Interpolation and Approximation*, Pitman Research Notes in Math. Ser. 230, New York, 1989.

[34] R.A. DeVore and G.G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[35] Z. Ditzian and V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[36] O. Duman and M.A. Özarslan, *Szász-Mirakjan type operators providing a better error estimation*, Appl. Math. Lett., **20** (2007), 1184–1188.

[37] O. Duman, M.A. Özarslan, and B. Della Vecchia, *Modified Szász-Mirakjan-Kantorovich operators preserving linear functions*, Turk. J. Math., **33** (2009), 151–158.

[38] V.K. Dzjadyk, *Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials (in Russian)*, Moscow Izdat. Nauka, 1977.

[39] S. Eisenberg, *Korovkin's Theorem*, Bull. Malays. Sci. Soc., **2** (1979), no. 2, 13–29.

[40] S.M. Eisenberg and B. Wood, *Approximation of analytic functions by Bernstein type operators*, J. Approx. Theory, **6** (1972), 242–248.

[41] C.G. Esseen, *Über die asymptotische beste Approximation stetiger Functionen mit Hilfe von Bernstein-Polynomen*, Numerische Math., **2** (1960), 206–213.

[42] H. Esser, *On pointwise convergence estimates for positive linear operators on $C[a,b]$*, Indag. Math., **38** (1976), 189–194.

[43] J. Favard, *Sur les multiplicateur d'interpolation*, J. Math. Pures et Appl., **23** (1944), no. 9, 219–247.

[44] S.G. Gal, *Approximation and geometric properties of complex Favard-Szász-Mirakjan operators in compact disk*, Com. Math. Appl., **56** (2008), no. 4, 1121–1127.

[45] I. Gavrea, H.H. Gonska, R. Păltănea, and G. Tachev, *General estimates for the Ditzian-Totik modulus*, East. J. Approx., **9** (2003), 175–194.

[46] H.H. Gonska, *Quantitative Aussagen zur Approximation durch positive lineare Operatoren*, Ph.D. thesis, Universität Duisburg, 1979.

[47] H.H. Gonska, *On approximation in spaces of continuous functions*, Bull. Austral. Math. Soc., **28** (1983), 411–432.

[48] H.H. Gonska, *On approximation of continuously differentiable functions by positive linear operators*, Bull. Austral. Math. Soc., **27** (1983), 73–81.

[49] H.H. Gonska, *Quantitative Korovkin-type theorems on simultaneous approximation*, Math. Z., **186** (1984), 419–433.

[50] H.H. Gonska, *Quantitative Approximation in $C(X)$*, Schriftenreihe des Fachberreiches Mathematik, Universität Duisburg, 1985, (Habilitionsschrift).

[51] H.H. Gonska, *The rate of convergence of bounded linear processes on spaces of continuous functions*, Automat. Comput. Appl. Math., **7** (1998), 38–97.

[52] H.H. Gonska, *On the degree of approximation in Voronovskaja's theorem*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **52** (2007), no. 3, 103–115.

[53] H.H. Gonska and R.K. Kovacheva, *The second order modulus revisited: Remarks, Applications, Problems*, Conf. Sem. Mat. Bari, **257** (1994), 1–32.

[54] H.H. Gonska and J. Meier, *Quantitative theorems on approximation by Bernstein-Stancu operators*, Calcolo, **21** (1984), 317–335.

[55] H.H. Gonska, P. Piţul, and I. Raşa, *On differences of positive linear operators*, Carpathian J. Math., **22** (2006), no. 1-2, 65–78.

[56] H.H. Gonska, P. Piţul, and I. Raşa, *On Peano's form of the Taylor remainder, Voronovskaja's theorem and the comutator of positive linear operators*, Numerical Analysis and Approximation Theory (Cluj-Napoca) (O. Agratini and P. Blaga, eds.), Casa Cărţii de Ştiinţă, 2006, pp. 55–80.

[57] H.H. Gonska and I. Raşa, *A Voronovskaya estimate with second order modulus of smoothness*, Proc. of the 5-th Int. Symposium "Mathematical Inequalities" (Sibiu, Romania), 2008, pp. 76–91.

[58] H.H. Gonska and I. Raşa, *Differences of positive linear operators and the second order modulus*, Carpathian J. Math., **24** (2008), no. 3, 332–340.

[59] H.H. Gonska and I. Raşa, *Remarks on Voronovskaja's theorem*, General Mathematics, **16** (2008), no. 4, 87–99.

[60] H.H. Gonska and G. Tachev, *On the constants in ω_2^φ-inequalites*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II Suppl., **68** (2002), no. 2, 467–477.

[61] H.H. Gonska and G. Tachev, *The second Ditzian-Totik modulus revisited: Refined estimates for positive linear operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **32** (2003), 39–61.

[62] W.J. Gordon, *Distributive lattices and the approximation of multivariate functions*, Proc. of the Symposium on Approximation with Special Emphasis on Splines (New York) (I.J. Schoenberg, ed.), Acad. Press, 1969, pp. 223–277.

[63] V. Gupta, V. Vasishtha, and M.K. Gupta, *Rate of convergence of the Szász-Kantorovitch-Bezier operators for bounded variation functions*, Publ. Inst. Math. Beograd, **72** (2002), 137–143.

[64] M. Hasse, *Convexity Inequalities for Positive Operators*, Positivity, **11** (2007), 57–68.

[65] A. Holhoş, *Contribuţii la aproximarea funcţiilor*, Ph.D. thesis, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2010.

[66] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeleer Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, Ph.D. thesis, Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, 1926.

[67] D.V. Ionescu, *Diferenţe divizate*, Editura Academiei R. S. R., Bucureşti, 1978.

[68] M. Ivan, *Elements of Interpolation Theory*, Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 2004.

[69] D. Jackson, *Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung*, Ph.D. thesis, Georg-August Univ. of Göttingen, Göttingen, 1911.

[70] A. Jakimovski and D. Leviatan, *Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval*, Mathematica (Cluj), **34** (1969), 97–103.

[71] D. Kacsó, *Estimates for Iterates of Positive Linear Operators Preserving Linear Functions*, Results in Mathematics, **54** (2009), 85–101.

[72] L.V. Kantorovich, *Sur certains developpements suivant les polynômes de la forme de S.N. Bernstein*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **I, II** (1930), 563–568, 595–600.

[73] S. Karlin and Z. Ziegler, *Iteration of positive approximation operators*, J. Approx. Theory, **3** (1970), 310–339.

[74] N.P. Korneičuk, *On best constants in Jackson's inequality for continuous periodic functions*, Mat. Zametki, **32** (1982), no. 5, 669–674.

[75] P.P. Korovkin, *On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **90** (1953), 961–964.

[76] A. Leonte and I. Vîrtopeanu, *Studiul restului într-o formulă de aproximare a funcţiilor de două variabile cu ajutorul unui operator de tip Favard-Szász*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **31** (1986), no. 4, 10–15.

[77] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.

[78] G.G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, Chelsea Publishing Company, Second Edition, 1986.

[79] L. Lupaş and A. Lupaş, *Polynomials of binomial type and approximation operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Math., **32** (1987), no. 4, 61–69.

[80] N.I. Mahmudov, *On q-Parametric Szász-Mirakjan operators*, Mediterr. J. Math., **7** (2010), no. 3, 297–311.

[81] R.G. Mamedov, *On the asymptotic value of the approximation of repeatedly differentiable functions by positive linear operators (in Russian)*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **146** (1962), 1013–1016, (Translated in Soviet Math. Dokl. **3** (1962), 1435–1439).

[82] C. Manole, *Asupra aproximării funcţiilor de două şi mai multe variabile prin operatori liniari şi pozitivi*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **25** (1980), no. 4, 32–38.

[83] G. Mastroianni and M.R. Occorsio, *Sulle derivate dei polinomi di Stancu*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, **45** (1978), no. 4, 273–281.

[84] G. Mastroianni and M.R. Occorsio, *Una generalizatione dell'operatore di Stancu*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, **45** (1978), no. 4, 495–511.

[85] D. Miclăuş, *On the GBS Bernstein-Stancu's type operators*, (trimisă).

[86] D. Miclăuş, *On the monotonicity property for the sequence of Stancu type polynomials*, (trimisă).

[87] D. Miclăuş, *On the Stancu type bivariate approximation formula*, (trimisă).

[88] D. Miclăuş, *The generalization of certain results for Kantorovich operators*, General Mathematics, (acceptată).

[89] D. Miclăuş, *The moments of Bernstein-Stancu operators revisited*, Mathematica (Cluj), (acceptată).

[90] D. Miclăuş, *The Voronovskaja type theorem for the Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, J. of Science and Arts, **13** (2010), no. 2, 257–262.

[91] D. Miclăuş, *On the Mirakjan-Favard-Szász bivariate approximation formula*, J. of Science and Arts, **17** (2011), no. 4, 405–411.

[92] D. Miclăuş, *The generalization of some results for Schurer and Schurer-Stancu operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **40** (2011), no. 1, 52–63.

[93] D. Miclăuş, *On the remainder in bivariate approximation formula by means of Mirakjan-Favard-Szász type operators*, An. Univ. Oradea, Fasc. Math., **19** (2012), 93–100.

[94] D. Miclăuş, *The revision of some results for Bernstein-Stancu type operators*, Carpathian J. Math., **28** (2012), no. 2, 273–284.

[95] D. Miclăuş and P.I. Braica, *Some results concerning calculation of the test functions by Bernstein type operators*, Acta Universitatis Apulensis, **28** (2011), 135–142.

[96] D. Miclăuş and P.I. Braica, *The generalization of some results for Bernstein and Stancu operators*, Creat. Math. Inform., **20** (2011), no. 2, 147–156.

[97] D. Miclăuş and O.T. Pop, *The Voronovskaja theorem for some linear positive operators defined by infinite sum*, Creat. Math. Inform., **20** (2011), no. 1, 55–61.

[98] D. Miclăuş and O.T. Pop, *The generalization of certain results for Szász-Mirakjan-Schurer operators*, Creat. Math. Inform., **21** (2012), no. 1, 79–85.

[99] D. Miclăuş, O.T. Pop, and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for an extension of Kantorovich operators*, An. Univ. Craiova, **37** (2010), no. 4, 29–36.

[100] G.M. Mirakjan, *Approximation of continuous functions with the aid of polynomials*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **31** (1941), 201–205.

[101] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[102] Augustus de Morgan, *The differential and Integral Calculus*, Baldwin and Cradock, London, 1842, (cf. Chapter XVIII, "On Interpolation and Summation", pp. 550).

[103] C. Mortici, *An extension of the Szász-Mirakjan operators*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **17** (2009), no. 1, 137–144.

[104] G. Mülbach, *Verallgemainerung der Bernstein und Lagrange polynome. Bemerkungen zu einer Klasse linearer Polynomoperatoren von D.D. Stancu*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **15** (1970), 1235–1252.

[105] J. Peetre, *A theory of Interpolation of Normed Spaces*, Lecture Notes, Brasilia, 1963, (Notas de Matemática **39** (1968), pp.1–86).

[106] P. Piţul, *Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators*, Ph.D. thesis, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2007.

[107] O.T. Pop, *About a class of linear and positive operators*, Carpathian J. Math., **21** (2005), no. 1-2, 99–108.

[108] O.T. Pop, *About a general property for a class of linear positive operators and applications*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **34** (2005), no. 2, 175–180.

[109] O.T. Pop, *Remarks about the convergence of Bernstein-Schurer operators*, Octogon Math. Magazine, **13** (2005), no. 1, 67–70.

[110] O.T. Pop, *The generalization of Voronovskaja's theorem for a class of linear and positive operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **34** (2005), no. 1, 79–91.

[111] O.T. Pop, *About some linear and positive operators defined by infinite sum*, Dem. Math., **39** (2006), no. 2, 376–388.

[112] O.T. Pop, *Teoreme de tip Voronovskaja. Aplicaţii la aproximarea uniformă a funcţiilor cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi*, Ph.D. thesis, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2006.

[113] O.T. Pop and D. Bărbosu, *Two dimensional divided differences with multiple knots*, An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **17** (2009), no. 2, 181–190.

[114] O.T. Pop, D. Bărbosu, and P.I. Braica, *Some results regarding the Bernstein polynomials*, Acta Universitatis Apulensis, **22** (2010), 243–247.

[115] O.T. Pop, D. Bărbosu, and D. Miclăuş, *The Voronovskaja type theorem for an extension of Szász-Mirakjan operators*, Dem. Math., **45** (2012), no. 1, 107–115.

[116] O.T. Pop and M. Farcaş, *About Bernstein polynomial and the Stirling's numbers of second type*, Creat. Math. Inform., **14** (2005), 53–56.

[117] O.T. Pop, D. Miclăuş, and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for a general class of Szász-Mirakjan operators*, (trimisă).

[118] O.T. Pop, D. Miclăuş, and D. Bărbosu, *The approximation of functions by combining two sequences of operators*, Automat. Comput. Appl. Math., **19** (2010), no. 1, 153–163.

[119] T. Popoviciu, *Sur quelques propriété des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj), **8** (1934), 1–85.

[120] T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica (Cluj), **10** (1935), 49–54.

[121] T. Popoviciu, *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame*, Institutul de Arte Grafice Ardealul, Cluj-Napoca, 1937.

[122] T. Popoviciu, *Les Fonctions Convexes*, Actualités Scientifiques et Industrielles, Fasc. 992, Paris, 1944, (Publiés sous la direction de Paul Montel).

[123] T. Popoviciu, *Asupra demonstraţiei teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare*, Lucrările Sesiunii Gen. Şt. din 2-12

iunie 1950 (Bucureşti), Ed. Acad. R. P. R., 1951, (translated into English by D. Kacsó, On the proof of Weierstrass theorem using interpolation polynomials, East J.Approx., **4** (1998), 107–110), pp. 1–4.

[124] T. Popoviciu, *Sur le reste dans certaines formules lineaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica (Cluj), **1** (1959), no. 24, 95–142.

[125] R. Păltănea, *Best constant in estimates with second order moduli of continuity*, Approximation Theory (Berlin) (M.W. Müler, ed.), Proc. Int. Dormund Meting on Approximation Theory 1995, Akademie Verlag, 1995, pp. 251–275.

[126] R. Păltănea, *New second order moduli of continuity*, Approximation and Optimization (Cluj-Napoca) (D.D. Stancu., G. Coman, W.W. Breckner, and P. Blaga, eds.), vol. I, International Conference on Approximation and Optimization, Transilvania Press, 1997, pp. 327–334.

[127] R. Păltănea, *Optimal estimates with moduli of continuity*, Results in Mathematics, **32** (1997), 318–331.

[128] R. Păltănea, *Optimal Constant in Approximation by Bernstein Operators*, J. Comp. Anal. Appl., **5** (2003), no. 2, 195–235.

[129] R. Păltănea, *Approximation Theory using Positive Linear Operators*, Boston Birkhäuser, 2004.

[130] R. Păltănea, *Modified Szász-Mirakjan operators of integral form*, Carpathian J. Math., **24** (2008), no. 3, 378–385.

[131] R. Păltănea, *On some constants in approximation by Bernstein operators*, General Mathematics, **16** (2008), no. 4, 137–148.

[132] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[133] F. Schurer, *Linear positive operators in approximation theory*, Math. Inst. Techn., Univ. Delft Report, 1962.

[134] F. SCHURER, *On linear positive operators in approximation theory*, Delft University of Technology, Delft, 1965, (Dissertation).

[135] F. SCHURER and W. STEUTEL, *On the degree of approximation of functions in $C^1[0,1]$ by Bernstein polynomials*, TH-Report 75-WSK-07, 1975, (Onderafdeling der Wiskunde, Technische Hogeschool Eindhoven).

[136] O. SHISHA and B. MOND, *The degree of convergence of sequences of linear positive operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **60** (1968), 1196–1200.

[137] P.C. SIKKEMA, *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*, Numerische Mathematik, **3** (1961), 107–116.

[138] P.C. SIKKEMA and P.J.C. VAN DER MEER, *The exact degree of local approximation by linear positive operators involving the modulus of continuity of the p-th derivative*, Indag. Math., **41** (1979), 63–76.

[139] D.D. STANCU, *Contributions to the numerical integration of functions of several variables (in Romanian)*, Acad. R. P. R., Fil. Cluj, Stud. Cerc. Mat., **8** (1957), 75–101.

[140] D.D. STANCU, *Generalization of some interpolation formulas for functions of several variables and certain considerations on the numerical integration formula of Gauss (in Romanian)*, Acad. R. P. R., Bul. Şt. Mat. Fiz., **9** (1957), 287–313.

[141] D.D. STANCU, *A method for constructing cubature formulas for functions of two variables (in Romanian)*, Acad. R. P. R., Fil. Cluj, Stud. Cerc. Mat., **9** (1958), 351–369.

[142] D.D. STANCU, *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, SIAM J. Numer. Anal., Ser. B, **1** (1964), 137–163.

[143] D.D. STANCU, *On the monotonicity of the sequence formed by the first derivatives of the Bernstein polynomials*, Math. Zeitschrift, **98** (1967), 46–51.

[144] D.D. Stancu, *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **13** (1968), 1173–1194.

[145] D.D. Stancu, *On a new linear polynomial operator*, Proc. Japan Acad., **44** (1968), 221–224.

[146] D.D. Stancu, *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Math.-Phys., **14** (1969), 31–45.

[147] D.D. Stancu, *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., **14** (1969), 673–691.

[148] D.D. Stancu, *Approximation properties of a class of linear positive operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Seria Math.-Mech., **15** (1970), 33–38.

[149] D.D. Stancu, *On the remainder of approximation of functions by means of a parameter-dependent linear polynomial operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mech., **16** (1971), 59–66.

[150] D.D. Stancu, *Aproximation of functions by means of some new classes of positive linear operators*, Numerische Methoden der Approximation-Theorie (Basel) (L. Collatz and G. Meinardus, eds.), vol. I, Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1971, Birkhäuser, 1972, pp. 187–203.

[151] D.D. Stancu, *A study of the remainder in an approximation formula using a Favard-Szász type operator*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **25** (1980), 70–76.

[152] D.D. Stancu, *Procedures of numerical integration of functions obtained by means of some linear positive operators (in Romanian)*, Itinerant Seminar on functionals equations, Approximation and Convexity (1982), 333–337.

[153] D.D. Stancu, *Quadrature formulas constructed by using linear positive operators*, Numerical Int. (Bassel-Boston-Stuttgart) (G. Hämmerlin, ed.), no. 65003, Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, Birkhäuser, 1982, pp. 241–251.

[154] D.D. Stancu, *On the representation by divided differences of the remainder in Bernstein's approximation formula*, Research Seminaries: Seminar on Numerical and Statistical Calculus of Cluj- Napoca, Preprint (1985), no. 4, 103–107.

[155] D.D. Stancu, *Quadrature rules obtained by means of interpolatory linear positive operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **21** (1992), no. 1, 75–81.

[156] D.D. Stancu, *Approximation properties of a class of multiparameter positive linear operators*, Approximation and Optimization (Cluj-Napoca) (D.D. Stancu., G. Coman, W.W. Breckner, and P. Blaga, eds.), vol. I, Inter. Conf. on Approx. and Optimization, Transilvania Press, 1997, pp. 107–120.

[157] D.D. Stancu, G. Coman, O. Agratini, and R. Trîmbiţaş, *Analiză Numerică şi Teoria Aproximării*, vol. I, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001.

[158] D.D. Stancu, Gh. Coman, and P. Blaga, *Analiză Numerică şi Teoria Aproximării*, vol. II, Presa Universitară Clujeană, 2002.

[159] D.D. Stancu and E.I. Stoica, *On the use of Abel-Jensen type combinatorial formulas for construction and investigation of some algebraic polynomial operators of approximation*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **54** (2009), no. 4, 167–182.

[160] D.D. Stancu and A. Vernescu, *On some remarkable positive polynomial operators of approximation*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **28** (1999), no. 1, 85–95.

[161] F. Stancu, *Asupra restului în formula de aproximare prin operatorii lui Mirakyan de una şi două variabile*, An. Şt. Univ. Al. I. Cuza, Iaşi, Secţ. 1, **14** (1968), 415–422.

[162] J. Stirling, *Differential Method: A Treatise of the Summation and Interpolation of Infinite Series (in Latin)*, London, 1730.

[163] E.I. Stoica, *On the Stancu type linear positive operators of approximation constructed by using the Beta and the Gamma functions*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., **54** (2009), no. 2, 117–126.

[164] O. Szász, *Generalization of Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. Res. Nat. Bur. Standards, **45** (1950), 239–245.

[165] G. Tachev, *The complete asymptotic expansion for Bernstein operators*, J. Math. Anal. Appl., **385** (2012), 1179–1183.

[166] W.B. Temple, *Stieljes integral representation of convex functions*, Duke Math. J., **21** (1954), 527–531.

[167] V. Totik, *Uniform approximation by Szász-Mirakjan type operators*, Acta Math. Hungarica, **41** (1983), no. 3-4, 291–307.

[168] V.S. Videnskij, *Linear Positive Operators of Finite Rank (in Russian)*, A.I. Gerzen State Pedagogical Institute, Leningrad, 1985.

[169] E.V. Voronovskaja, *Détérmination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynômes de Bernstein*, C. R. Akad. Sci. URSS, **4** (1932), 79–85.

[170] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsber. Akad. Berlin (1885), 633–639, 789–805.

Cercetarea ştiinţifică efectuată în perioada 1.10.2008 - prezent

Această teză de doctorat este dezvoltată şi bazată pe următoarele lucrări publicate, acceptate, trimise spre publicare şi comunicate:

Lista lucrărilor publicate

1. D. Bărbosu, O.T. Pop and **D. Miclăuş**, *Some quadrature formulas based on linear and positive operators*, J. of Science and Arts, **11** (2009), no. 2, 198–205.

2. D. Bărbosu and **D. Miclăuş**, *On the composite Bernstein type quadrature formula*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **39** (2010), no. 1, 3–7.

3. D. Bărbosu and **D. Miclăuş**, *On the composite Bernstein type cubature formula*, General Mathematics, **18** (2010), no. 3, 73–81.

4. D. Bărbosu, O.T. Pop and **D. Miclăuş**, *The Kantorovich form of some extensions for Szász-Mirakjan operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **39** (2010), no. 1, 8–20.

5. **D. Miclăuş**, O.T. Pop and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for an extension of Kantorovich operators*, An. Univ. Craiova, **37** (2010), no. 4, 29–36.

6. **D. Miclăuş**, *The Voronovskaja type theorem for the Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, J. of Science and Arts, **13** (2010), no. 2, 257–260.

7. O.T. Pop, **D. Miclăuş** and D. Bărbosu, *The approximation of functions by combining two sequences of operators*, Automat. Comput. Appl. Math., **19** (2010), no. 1, 153–163.

8. D. Bărbosu, O.T. Pop and **D. Miclăuş**, *On some extensions for the Szász-Mirakjan operators*, An. Univ. Oradea, Fasc. Math., **18** (2011), 179–187.

9. **D. Miclăuş**, *The generalization of some results for Schurer and Schurer-Stancu operators*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **40** (2011), no. 1, 52–63.

10. **D. Miclăuş**, *On the Mirakjan-Favard-Szász bivariate approximation formula*, J. of Science and Arts, **17** (2011), no. 4, 405–411.

11. **D. Miclăuş** and P.I. Braica, *The generalization of some results for Bernstein and Stancu operators*, Creat. Math. Inform., **20** (2011), no. 2, 147–156.

12. **D. Miclăuş** and P.I. Braica, *Some results concerning calculation of the test functions by Bernstein type operators*, Acta Univ. Apulensis, **28** (2011), 135–142.

13. **D. Miclăuş** and O.T. Pop, *The Voronovskaja theorem for some linear positive operators defined by infinite sum*, Creat. Math. Inform., **20** (2011), no. 1, 55–61.

14. **D. Miclăuş**, *On the remainder in bivariate approximation formula by means of Mirakjan-Favard-Szász type operators*, An. Univ. Oradea, Fasc. Math., **19** (2012), 93–100.

15. **D. Miclăuş** and O.T. Pop, *The generalization of certain results for Szász-Mirakjan-Schurer operators*, Creat. Math. Inform., **21** (2012), 79–85.

16. O.T. Pop, D. Bărbosu and **D. Miclăuş**, *The Voronovskaja type theorem for an extension of Szász-Mirakjan operators*, Dem. Math., **45** (2012), no. 1, 107–115.

17. **D. Miclăuş**, *The revision of some results for Bernstein-Stancu type operators*, Carpathian J. Math., **28** (2012), no. 2, 273–284.

Lista lucrărilor acceptate

1. **D. Miclăuş**, *The moments of Bernstein-Stancu operators*, Mathematica (Cluj), (acceptată).

2. **D. Miclăuş**, *The generalization of certain results for Kantorovich operators*, General Mathematics, (acceptată).

Lista lucrărilor trimise spre publicare

1. **D. Miclăuş**, *On the GBS Bernstein-Stancu's type operators*, Carpathian J. Math., (trimisă).

2. **D. Miclăuş**, *On the monotonicity property for the sequence of Stancu type polynomials*, Positivity, (trimisă).

3. **D. Miclăuş**, *On the Stancu type bivariate approximation formula*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, (trimisă).

4. O.T. Pop, **D. Miclăuş** and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for a general class of Szász-Mirakjan operators*, Miskolc Math. Notes, (trimsă).

Lista lucrărilor comunicate

1. D. Bărbosu, O.T. Pop and **D. Miclăuş**, *Some quadrature formulas based on linear and positive operators*, The seventh Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Târgovişte 26–27 iunie, 2009.

2. D. Bărbosu, O.T. Pop and **D. Miclăuş**, *The Kantorovich form of some extensions for Szász-Mirakjan operators*, Zilele Academice Clujene, Simpozionul *Metode Numerice şi de Aproximare*, Cluj-Napoca 3–4 iunie, 2010.

3. **D. Miclăuş**, *The Voronovskaja type theorem for the Szász-Mirakjan-Kantorovich operators*, The eighth Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Târgovişte 11–12 iunie, 2010.

4. O.T. Pop, **Dan Miclăuş** and D. Bărbosu, *The approximation of functions by combining two sequences of operators*, The thirteenth International

Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca 26–28 august, 2010.

5. **Dan Miclăuş**, O.T. Pop and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for an extension of Kantorovich operators*, The seventh International Conference on Applied Mathematics, Baia Mare 1–4 septembrie, 2010.

6. O.T. Pop, **Dan Miclăuş** and D. Bărbosu, *The Voronovskaja type theorem for a general class of Szász-Mirakjan operators*, The seventh International Conference on Applied Mathematics, Baia Mare 1–4 septembrie, 2010.

7. O.T. Pop, D. Bărbosu and **Dan Miclăuş**, *The Voronovsakaja type theorem for an extension of Szász-Mirakjan operators*, The seventh International Conference on Applied Mathematics, Baia Mare 1–4 septembrie, 2010.

8. **Dan Miclăuş**, *The Voronovskaja type theorem for the Szász-Mirakjan-Schurer operators*, Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj-Napoca 23–26 septembrie, 2010.

9. **Dan Miclăuş**, *On the Mirakjan-Favard-Szász bivariate approximation formula*, The ninth Conference on Nonlinear Analysis and Applied Mathematics, Târgovişte 10–11 iunie, 2011.

10. **D. Miclăuş**, *The revision os some results for Bernstein-Stancu type operators*, The eighth International Conference on Applied Mathematics, Baia Mare 27–30 octombrie, 2011.

11. **D. Miclăuş**, *The generalization of certain results for Kantorovich operators*, The eighth International Conference on Applied Mathematics, Baia Mare 27–30 octombrie, 2011.