MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
UNIVERSITATEA DE NORD DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE ŞTIINŢE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

MIRCEA D. FARCAŞ

Aproximarea funcţiilor de una şi mai multe variabile prin şiruri de operatori liniari

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific: C.S. I Dr. ION PĂVĂLOIU

BAIA MARE, 2008

Cuprins

Introducere

Un domeniu de mare actualitate, datorită aplicaţiilor pe care le are, este cel al aproximării funcţiilor cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi.

Pe cale probabilistică, S.N. Bernstein în 1912 în lucrarea [40], a definit şirul de operatori $B_m : C([0,1]) \to C([0,1])$ prin

$$(B_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right),$$

$m \in \mathbb{N}$, numiţi operatorii Bernstein, demonstrând că pentru orice funcţie continuă $f \in C([0,1])$, $\lim\limits_{m\to\infty} B_m f = f$ uniform pe $[0,1]$. Aceasta a constituit o demonstraţie constructivă a celebrei teoreme de convergenţă uniformă a lui Weierstrass.

Un pas important în studiul convergenţei uniforme a operatorilor liniari şi pozitivi s-a făcut prin rezultatele importante ale lui H. Bohman în lucrarea [44] şi P.P. Korovkin în lucrarea [69]. Se consideră funcţiile probă sau funcţiile test $e_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $e_j(x) = x^j$, $j \in \{0,1,2\}$, respectiv şirul de operatori liniari şi pozitivi $L_m : C([a,b]) \to C([a,b])$, $m \in \mathbb{N}$. Teorema Bohman-Korovkin afirmă că, dacă $\lim\limits_{m\to\infty} L_m e_j = e_j$, $j \in \{0,1,2\}$ uniform pe $[a,b]$, atunci pentru orice funcţie $f \in C([a,b])$, $\lim\limits_{m\to\infty} L_m f = f$ uniform pe $[a,b]$.

Un rezultat de bază în evaluarea erorii a fost dat de O. Shisha şi B. Mond în lucrarea [110].

Prin activitatea deosebită a academicianului Tiberiu Popoviciu şi a profesorului emerit D.V. Ionescu, în centrul universitar clujean a fost creată o puternică şcoală de analiză numerică şi teoria aproximării, activitate continuată apoi de către acad. prof. dr. D. D. Stancu şi de colaboratorii domniei sale.

Capitolul 1 al tezei cuprinde câteva generalităţi (teoreme de aproximare, modulul de continuitate, teoreme de evaluare a erorilor de aproximare), precum şi câteva contribuţii personale la aproximarea prin operatori liniari a funcţiilor de o variabilă: exprimarea momentelor şi momentelor centrale ale operatorilor Bernstein şi Schurer cu ajutorul numerelor lui Stirling de prima şi a doua speţă, câteva formule de recurenţă verificate de aceste momente, studiul unor operatori cu noduri modificate, din care se obţin câţiva operatori clasici, inclusiv teoreme de tip Voronovskaja pentru aceştia (în subcapitolul 1.6, concretizat prin multe aplicaţii).

În Capitolul 2 sunt reamintite câteva rezultate cunoscute privitoare la aproximarea funcţiilor de două variabile (teoreme de tip Korovkin, Shisha-Mond, noţiunile de funcţie B-continuă şi B-derivabilă, modul de continuitate total şi mixt), rezultate care vor fi folosite ulterior. Contribuţiile personale cu privire la teoremele de medie pentru funţii B-continue şi B-derivabile, publicate în articolul [98], sunt expuse în subcapitolul 2.2. În subcapitolul 2.3 am prezentat câteva rezultate privind operatorii de tip Bernstein de două variabile definiţi pe triunghiul $\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$: relaţii de recurenţă verificate de momentele acestor operatori, reprezentări ale acestor momente cu ajutorul numerelor lui Stirling şi teoreme de aproximare verificate de aceşti operatori, rezultate publicate în articolele [52], [55], [99] şi [100]. În subcapitolele 2.4 şi 2.5, am construit operatorii de două variabile de tip Schurer, Stancu şi Schurer-Stancu pe Δ_2 şi am studiat proprietăţile de aproximare ale acestora, rezultate publicate în articolele [56], [57] şi [58]. Împreună cu O.T. Pop, în subcapitolul 2.6 am construit şi studiat operatorii de tip Durrmeyer şi Kantorovich, rezultate conţinute în lucrările [101] şi [102]. În subcapitolul 2.7 am construit operatori de două variabile cu noduri modificate din care se obţin ca aplicaţii operatorii Bernstein, Schurer, Stancu şi Schurer-Stancu şi am studiat proprietăţile de aproximare ale acestora; aceste rezultate se regăsesc în articolul [59]. În subcapitolul 2.8, sunt prezentate unele rezultatele privind aproximarea funcţiilor de n variabile, B-continue şi B-derivabile, apărute în articolulele [55] şi [61], unele rezultate cu privire la aproximarea funcţiilor de trei variabile prin operatori de tip Bernstein, apărute în articolul [60] şi prin operatori de tip Schurer, apărute în articolul [62].

În încheiere, doresc să-i mulţumesc domnului cercetător ştiinţific I dr. Ion Păvăloiu pentru răbdarea de care a dat dovadă pe parcursul perioadei de îndrumare, pentru citirea cu atenţie a acestei lucrări şi pentru observaţiile făcute asupra acesteia.

Îi mulţumesc domnului conf. dr. Dan Bărbosu de la Universitatea de Nord din Baia Mare, specialist în teoria aproximării prin operatori liniari, pentru ideile împărtăşite cu generozitate cu ocazia întâlnirilor de la Baia Mare.

Îi mulţumesc de asemenea colegului meu, domnul profesor Ovidiu T. Pop, doctor în matematică cu o temă despre teoremele de tip Voronovskaja, împreună cu care am scris câteva articole de specialitate, prezentate în teză.

Mă gândesc cu deosebită gratitudine şi recunoştinţă la părinţii mei Leontina şi Dumitru, care şi-au dedicat viaţa familiei şi educaţiei copiilor lor şi cărora le dedic acestă lucrare.

Îi mulţumesc pe această cale şi fostului meu profesor de matematică din liceu şi diriginte, domnul profesor Costin Păcurar, care mi-a insuflat dragostea pentru matematică şi mai apoi, în calitate de coleg, dragostea pentru elevi, fără de care profesia de dascăl nu poate fi completă.

Capitolul I. Aproximarea funcţiilor de o variabilă

În capitolul I al tezei sunt prezentate câteva noţiuni şi rezultate privind aproximarea uniformă a funcţiilor continue de o variabilă prin şiruri de operatori liniari, precum şi teoreme de evaluare pentru erorile de aproximare. În legătură cu aproximarea prin operatori Bernstein, s-au dat câteva formule ale momentelor şi momentelor centrale ale acestora, precum şi câteva relaţii de recurenţă, în articolele [52] şi [94].

Lema 1. *Pentru $m \in \mathbb{N}$ şi $q \in \mathbb{N}_0$, avem reprezentarea*

$$(B_m e_q)(x) = \frac{1}{m^q} \sum_{k=0}^{q} a_{q,k}(x) m^k, \tag{1}$$

unde

$$a_{q,k}(x) = \sum_{j=k}^{q} S(q,j) s(j,k) x^j, \tag{2}$$

pentru $q \in \mathbb{N}_0$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$.

Teorema 1. *Avem relaţia de recurenţă*

$$(B_m e_{q+1})(x) = x(B_m e_q)(x) + \frac{x(1-x)}{m}(B_m e_q)'(x) \tag{3}$$

pentru $m \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}_0$ şi $x \in [0, 1]$.

Teorema 2. *Momentele centrale ale polinoamelor Bernstein admit reprezentarea*

$$(B_m(\cdot - x)^q)(x) = \frac{1}{m^q} \sum_{k=0}^{q} b_{q,k}(x) m^k \tag{4}$$

unde

$$b_{q,k}(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{q}{j} x^j a_{q-j,k-j}(x), \tag{5}$$

$q \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$.

Teorema 3. *Avem* $\lim\limits_{m\to\infty} (B_m(\cdot - x)^q)(x) = 0, q \geq 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} m(B_m(\cdot - x)^q)(x) = 0, q \geq 3$ *şi* $\lim\limits_{m\to\infty} m^2(B_m(\cdot - x)^q)(x) = 0, q \geq 5$.

Analog ca în cazul operatorilor Bernstein, s-au determinat unele rezultate privitoare la operatorii Schurer, în articolul [53].

Lema 2. *Avem reprezentarea*

$$(\tilde{B}_{m,p} e_q)(x) = \frac{1}{m^q} \sum_{k=0}^{q} \tilde{a}_{q,k}(x) m^k, \tag{6}$$

unde

$$\tilde{a}_{q,k}(x) = \sum_{\nu=k}^{q} \binom{\nu}{k} a_{q,\nu}(x) p^{\nu-k}, \tag{7}$$

$k \in \{0, 1, \ldots, q\}$, cu convenţia $0^0 = 1$ în cazul $p = 0$, iar $a_{q,\nu}(x)$ sunt date de relaţia (2).

Teorema 4. *Momentele centrale ale operatorilor Bernstein-Schurer asociate funcţiilor test admit reprezentarea*

$$(\tilde{B}_{m,p}(\cdot - x)^q)(x) = \frac{1}{m^q} \sum_{k=0}^{q} \tilde{b}_{q,k}(x) m^k, \tag{8}$$

unde

$$\tilde{b}_{q,k}(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{q}{\nu} \tilde{a}_{q-\nu,k-\nu}(x) x^\nu, \tag{9}$$

$q \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{0, 1, \ldots, q\}$.

Teorema 5. *Avem $\lim\limits_{m\to\infty} (\tilde{B}_{m,p}(\cdot - x)^q)(x) = 0$, $q \geq 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} m(\tilde{B}_{m,p}(\cdot - x)^q)(x) =$ $= 0$, $q \geq 3$ şi $\lim\limits_{m\to\infty} m^2(\tilde{B}_{m,p}(\cdot - x)^q)(x) = 0$, $q \geq 5$.*

În articolele [54], [95], [96] şi [97] s-a studiat o clasă de operatori cu noduri modificate.

Pentru $m \in \mathbb{N}$, definim operatorul $A_m : C([0,1]) \to C([0,1])$ prin

$$(A_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} p_{m,k}(x) f(x_{m,k}), \tag{10}$$

unde nodurile $x_{m,k}$ verifică relaţiile

$$x_{m,k} \in [0,1], \tag{11}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi orice $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ şi

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_m = 0, \tag{12}$$

unde

$$\alpha_m = \max_{k \in \{0,1,\ldots,m\}} \left| x_{m,k} - \frac{k}{m} \right|.$$

De asemenea, definim operatorul $\tilde{A}_m : C([0, 1+p]) \to C([0,1])$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ prin

$$(\tilde{A}_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m+p} \tilde{p}_{m,k} f(x_{m,k}) \tag{13}$$

unde nodurile $x_{m,k}$ verifică relaţiile

$$x_{m,k} \in [0, 1+p], \tag{14}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, m+p\}$ şi

$$\lim_{m\to\infty} \beta_m = 0, \tag{15}$$

unde

$$\beta_m = \max_{k\in\{0,1,\ldots,m+p\}} \left| x_{m,k} - \frac{k}{m} \right|.$$

Pentru aceşti operatori, avem:

Teorema 6. *Dacă $f \in C([0,1])$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $m \in \mathbb{N}$, avem*

$$|(A_m f)(x) - f(x)| \le 2\omega_f(\delta_m), \tag{16}$$

unde $\delta_m = \sqrt{4\alpha_m + \frac{1}{4m}}$.

Teorema 7. *Dacă $f \in C([0,1+p])$, atunci pentru orice $x \in [0,1]$ şi orice $m \in \mathbb{N}$, avem*

$$|\tilde{A}_m f)(x) - f(x)| \le 2\omega_f(\delta_{m,p}), \tag{17}$$

unde

$$\delta_{m,p} = \sqrt{2(2+p)\beta_m + \frac{m+4p^2}{4m^2}}.$$

Fie $I, J \subset [0,\infty)$ două intervale nedisjuncte. Pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, p_m\}$, unde $p_m = m$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$ (cazul finit) sau $p_m = \infty$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$ (cazul infinit), considerăm nodurile $x_{m,k}$ şi funcţiile $\varphi_{m,k} : J \to \mathbb{R}$, cu $\varphi_{m,k}(x) \ge 0$ pentru orice $x \in J$. Mai notăm cu $E(I)$ şi $F(J)$ mulţimile de funcţii reale definite pe I, respectiv J cu proprietatea că suma

$$\sum_{k=0}^{p_m} \varphi_{m,k}(x) f(x_{m,k})$$

există pentru orice $f \in E(I)$, $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}$. Pentru $m \in \mathbb{N}$, fie operatorul $L_m : E(I) \to F(J)$ definit prin

$$(L_m f)(x) = \sum_{k=0}^{p_m} \varphi_{m,k}(x) f(x_{m,k}) \tag{18}$$

cu proprietatea că

$$\lim_{m\to\infty} (L_m f)(x) = f(x) \tag{19}$$

pentru orice $x \in J$, uniform pe orice compact $K \subset I \cap J$, pentru orice funcţie $f \in E(I) \cap C(I)$.

Pentru $m \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, p_m\} \cap \mathbb{N}_0$, considerăm nodurile $y_{m,k} \in I$ astfel încât

$$\alpha_m = \sup_{k \in \{0,1,\ldots,p_m\} \cap \mathbb{N}_0} |x_{m,k} - y_{m,k}| < \infty \tag{20}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi

$$\lim_{m \to \infty} \alpha_m = 0. \tag{21}$$

Pentru $m \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{0, 1, \ldots, p_m\} \cap \mathbb{N}_0$ notăm $\alpha_{m,k} = x_{m,k} - y_{m,k}$.

Definiţia 1. *Pentru $m \in \mathbb{N}$ definim operatorul $K_m : E(I) \to F(J)$ prin*

$$(K_m f)(x) = \sum_{k=0}^{p_m} \varphi_{m,k}(x) f(y_{m,k}), \tag{22}$$

pentru orice $x \in I$.

Teorema 8. *Pentru orice funcţie $f \in E(I) \cap C(I)$, avem*

$$\lim_{m \to \infty} (K_m f)(x) = f(x) \tag{23}$$

uniform pe orice compact $K \subset I \cap J$.

Teorema 9. *Dacă $f \in E(I \cap J) \cap C(I \cap J)$, atunci pentru orice $x \in K = [a, b] \subset I \cap J$ şi orice $m \in \mathbb{N}$, avem*

$$\begin{aligned} |(K_m f)(x) - f(x)| &\le |f(x)||(L_m e_0)(x) - 1| + \\ &+ ((L_m e_0)(x) + 1)\omega(f; \delta_{m,x}) \le M u_m(K) + (2 + u_m(K))\omega(f; \delta_m), \end{aligned} \tag{24}$$

unde
$\delta_{m,x} = \sqrt{(L_m e_0)(x)[(L_m \psi_x^2)(x) + 2\alpha_m (L_m e_1)(x) + (\alpha_m^2 + 2x\alpha_m)(L_m e_0)(x)]}$,
$\delta_m = \sqrt{(1 + u_m(K))[w_m(K) + 2\alpha_m(b + v_m(K) + (\alpha_m^2 + 2b\alpha_m)(1 + u_m(K))]}$ *şi*
$M = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$.

Prin particularizarea şirului $y_{m,k}$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, p_m\} \cap \mathbb{N}_0$, putem obţine teoreme de convergenţă şi teoreme de aproximare pentru noii operatori.

Considerăm în continuare o funcţie pondere $w : I \to (0, \infty)$ cu proprietatea că există constanta $L > 0$ astfel încât $L \le w(x)$, pentru orice $x \in I$ şi mulţimea

$$E_w(I) = \{f : I \to \mathbb{R} |\ wf \text{ mărginită pe } I\}. \tag{25}$$

Fie s un număr natural par, fixat. Pentru orice $x \in I \cap J$, presupunem că $\psi_x^i \in E_w(I)$, unde $i \in \{0, 1, \ldots, s + 2\}$, iar pentru $m \in \mathbb{N}$ şi $i \in \{0, 1, \ldots, s + 2\}$ definim

$$(T_i L_m)(x) = m^i (L_m \psi_x^i)(x) = m^i \sum_{k=0}^{p_m} (x_{m,k} - x)^i \varphi_{m,k}(x) \tag{26}$$

pentru orice $x \in I \cap J$.

Teorema 10. *Dacă $f \in E_w(I)$ este de s ori derivabilă în $x \in I \cap J$ (dacă $s = 0$ considerăm f continuă în x) şi există $\lambda_{s+2} \geq 0$ şi $m(s) \in \mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{(T_{s+2}L_m)(x)}{m^{\lambda_{s+2}}}$ să fie mărginită pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m(s)$, atunci pentru orice γ care verifică inegalitatea*

$$\gamma < s + 2 - \lambda_{s+2} \tag{27}$$

avem

$$\lim_{m\to\infty} m^{\gamma} \left[(L_m f)(x) - \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{m^i i!}(T_i L_m)(x) f^{(i)}(x) \right] = 0. \tag{28}$$

Dacă $f \in E_w(I)$ este de s ori derivabilă pe I şi pentru compactul $K \subset I \cap J$ există $m(s) \in \mathbb{N}$ şi constanta $k_{s+2}(K) \in \mathbb{R}$, depinzând de K, astfel încât pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m(s)$ şi pentru orice $x \in K$ să avem

$$\frac{(T_{s+2}L_m)(x)}{m^{\lambda_{s+2}}} \leq k_{s+2}(K), \tag{29}$$

atunci convergenţa de mai sus este uniformă pe compactul K.

Teorema 11. *Dacă f este continuă pe I şi $K \subset I \cap J$ este un compact, atunci avem*

$$\left| (L_m f)(x) - \sum_{k=0}^{p_m} \varphi_{m,k}(x) f(x) \right| \leq (k_0(K) + k_2(K))\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m^{2-\lambda_2}}}\right) \tag{30}$$

pentru orice $x \in K$ şi orice $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 12. *Dacă $f \in E_w(I)$ este continuă în $x \in I \cap J$, atunci*

$$\lim_{m\to\infty} (K_m f)(x) = f(x). \tag{31}$$

Dacă f este continuă pe I, iar $K \subset I \cap J$ este un compact, atunci convergenţa de mai sus este uniformă pe K şi avem

$$\left| (K_m f)(x) - \left(\sum_{k=0}^{p_m} \varphi_{m,k}(x) \right) f(x) \right| \leq (k_0'(K) + k_2'(K))\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m^{2-\lambda_2}}}\right) \tag{32}$$

pentru orice $x \in K$ şi orice $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 13. *Dacă $f \in E_w(I)$ este de două ori derivabilă în $x \in I \cap J$, cu $f^{(2)}$ continuă în x şi $\dfrac{(T_4 L_m)(x)}{m^{\lambda_4}}$ este mărginită pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m(2)$, atunci*

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} m^{2-\lambda_2} \Big[&(K_m f)(x) - (T_0 L_m)(x) f(x) - \frac{1}{m}(T_1 L_m)(x) f^{(1)}(x) - \\ &- \frac{1}{2m^2}(T_2 L_m)(x) f^{(2)}(x) \Big] = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Capitolul II. Aproximarea funcţiilor de două variabile

În Capitolul II al tezei sunt prezentate rezultate privind aproximarea uniformă a funcţiilor continue, B-continue, respectiv B-derivabile prin şiruri de operatori liniari. De asemenea, pentru cele câteva tipuri de operatori, sunt date teoreme de evaluare pentru erorile de aproximare. Pentru funcţii B-derivabile s-au demonstrat teoreme de medie de tip Pompeiu, Boggio şi Ivan, în articolul [98].

Teorema 14. *Fie $f : [a,b] \times [a',b'] \to \mathbb{R}$ o funcţie B-derivabilă pe $[a,b] \times [a',b']$ şi $d \notin [a,b]$, $d' \notin [a',b']$. Atunci există un punct $(\xi,\eta) \in (a,b) \times (a',b')$ astfel încât*

$$\begin{aligned}(34)\qquad &\Delta \frac{1}{(\cdot - d)(* - d')}\,[(a,a'),(b,b')] D_B \frac{f(\cdot\,,*)}{(\cdot - d)(* - d')}\,(\xi,\eta) = \\ &= \Delta \frac{f(\cdot\,,*)}{(\cdot - d)(* - d')}\,[(a,a'),(b,b')] D_B \frac{1}{(\cdot - d)(* - d')}\,(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Dacă în plus f admite derivatele f'_x, f'_y, f''_{xy} pe $[a,b] \times [a',b']$ cu f''_{xy} continuă pe $(a,b) \times (a',b')$, atunci

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\frac{aa'f(b,b') - a'bf(a,b') - ab'f(b,a') + bb'f(a,a')}{(a-b)(a'-b')} - \xi\eta f''_{xy}(\xi,\eta) + \\ &+ \xi f'_x(\xi,\eta) + \eta f'_y(\xi,\eta) - f(\xi,\eta) = (dd' - \xi d' - \eta d) f''_{xy}(\xi,\eta) + \\ &+ d f'_x(\xi,\eta) + d' f'_y(\xi,\eta) - \\ &- \frac{(dd' - ad' - a'd) f(b,b') - (dd' - bd' - a'd) f(a,b')}{(a-b)(a'-b')} + \\ &+ \frac{(dd' - ad' - b'd) f(b,a') - (dd' - b'd - bd') f(a,a')}{(a-b)(a'-b')}.\end{aligned}$$

Teorema 15. *Fie $f, g : [a,b] \times [a',b'] \to \mathbb{R}$ două funcţii B-derivabile pe $[a,b] \times [a',b']$. Dacă $g(x,y) \neq 0$ pentru orice $(x,y) \in [a,b] \times [a',b']$, atunci există $(\xi,\eta) \in (a,b) \times (a',b')$ astfel încât*

$$\begin{aligned}(36)\qquad &\Delta \frac{f(\cdot\,,*)}{g(\cdot\,,*)}\,[(a,a'),(b,b')] D_B \frac{*}{g(\cdot\,,*)}\,(\xi,\eta) = \\ &= \Delta \frac{*}{g(\cdot\,,*)}\,[(a,a'),(b,b')] D_B \frac{f(\cdot\,,*)}{g(\cdot\,,*)}\,(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Dacă în plus f şi g admit derivatele f'_x, g'_x, f'_y, g'_y, f''_{xy}, g''_{xy} pe $[a,b] \times [a',b']$ cu

f''_{xy}, g''_{xy} continue pe $(a,b)\times(a',b')$, atunci

$$\begin{aligned}(37)\qquad &\left[\frac{f(a,a')}{g(a,a')}-\frac{f(b,a')}{g(b,a')}-\frac{f(a,b')}{g(a,b')}+\frac{f(b,b')}{g(b,b')}\right]\left[2\eta g'_x(\xi,\eta)g'_y(\xi,\eta)-\right.\\ &\left.-\,g(\xi,\eta)g'_x(\xi,\eta)-\eta g(\xi,\eta)g''_{xy}(\xi,\eta)\right]=\\ &=\left[\frac{a'}{g(a,a')}-\frac{a'}{g(b,a')}-\frac{b'}{g(a,b')}+\frac{b'}{g(b,b')}\right]\left[2f(\xi,\eta)g'_x(\xi,\eta)g'_y(\xi,\eta)-\right.\\ &-g(\xi,\eta)f'_x(\xi,\eta)g'_y(\xi,\eta)-g(\xi,\eta)f'_y(\xi,\eta)g'_x(\xi,\eta)-\\ &\left.-\,f(\xi,\eta)g(\xi,\eta)g''_{xy}(\xi,\eta)+g^2(\xi,\eta)f''_{xy}(\xi,\eta)\right].\end{aligned}$$

Teorema 16. *Fie $f:[a,b]\times[a',b']\to\mathbb{R}$ o funcţie B-derivabilă, $d\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(x,y)\neq d$ pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[a',b']$. Atunci există $(\xi,\eta)\in(a,b)\times(a',b')$ astfel încât*

$$\begin{aligned}(38)\qquad &\Delta\frac{\cdot\,*}{f(\cdot\,,*)-d}\left[(a,a'),(b,b')\right]D_B\frac{*}{f(\cdot\,,*)-d}(\xi,\eta)=\\ &=\Delta\frac{*}{f(\cdot\,,*)-d}\left[(a,a'),(b,b')\right]D_B\frac{\cdot\,*}{f(\cdot\,,*)-d}(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Dacă f admite derivatele f'_x, f'_y, f''_{xy} pe $[a,b]\times[a',b']$, f''_{xy} continuă pe $(a,b)\times$ $\times(a',b')$, atunci

$$\begin{aligned}(39)\qquad &\left[\frac{aa'}{f(a,a')-d}-\frac{ba'}{f(b,a')-d}-\frac{ab'}{f(a,b')-d}+\frac{bb'}{f(b,b')-d}\right]\cdot\\ &\cdot\left[2\eta f'_x(\xi,\eta)f'_y(\xi,\eta)-(f(\xi,\eta)-d)f'_x(\xi,\eta)-\right.\\ &\left.-\,\eta(f(\xi,\eta)-d)f''_{xy}(\xi,\eta)\right]=\\ &=\left[\frac{a'}{f(a,a')-d}-\frac{a'}{f(b,a')-d}-\frac{b'}{f(a,b')-d}+\frac{b'}{f(b,b')-d}\right]\cdot\\ &\cdot\left[f^2(\xi,\eta)-\eta f(\xi,\eta)f'_y(\xi,\eta)-\xi f(\xi,\eta)f'_x(\xi,\eta)-\right.\\ &\left.-\,\xi\eta f(\xi,\eta)f''_{xy}(\xi,\eta)+2\xi\eta f'_x(\xi,\eta)f'_y(\xi,\eta)\right].\end{aligned}$$

Pentru operatorii Bernstein de două variabile definiţi pe triunghiul Δ_2 s-a dat o formulă de recurenţă în articolul [52] şi o formulă pentru momentele $B_m e_{pq}$ în articolul [55].

Teorema 17. *Dacă $m\in\mathbb{N}$ şi $p,q\in\mathbb{N}_0$, atunci avem egalitatea*

$$(40)\qquad (B_m e_{pq})(x,y)=\frac{1}{m^{p+q}}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}m^{[i+j]}S(p,i)S(q,j)x^iy^j,$$

pentru orice $x,y\in\Delta_2$.

Teorema 18. *Dacă* $m \in \mathbb{N}$*,* $p, q \in \mathbb{N}_0$ *şi* $(x, y) \in \Delta_2$*, atunci*

$$(B_m e_{p+1q})(x,y) = \frac{x(1-x)}{m}\frac{\partial}{\partial x}(B_m e_{pq})(x,y) + x(B_m e_{pq})(x,y) - \tag{41}$$
$$- \frac{xy}{m}\frac{\partial}{\partial y}(B_m e_{pq})(x,y)$$

şi respectiv

$$(B_m e_{pq+1})(x,y) = \frac{y(1-y)}{m}\frac{\partial}{\partial y}(B_m e_{pq})(x,y) + y(B_m e_{pq})(x,y) - \tag{42}$$
$$- \frac{xy}{m}\frac{\partial}{\partial x}\left(B_m e_{pq}\right)(x,y).$$

Teoreme de aproximare uniformă a funcţiilor continue, respectiv B-continue şi B-derivabile s-au dat în articolele [99] şi [100].

Teorema 19. *Dacă* $f \in C(\Delta_2)$*, atunci pentru orice* $(x, y) \in \Delta_2$ *şi pentru orice* $m \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|(B_m f)(x,y) - f(x,y)| \le \left(1 + \delta_1^{-1}\frac{1}{2\sqrt{m}}\right) \cdot \tag{43}$$
$$\cdot \left(1 + \delta_2^{-1}\frac{1}{2\sqrt{m}}\right)\omega_{total}(f;\delta_1,\delta_2),$$

pentru orice δ_1*,* $\delta_2 > 0$ *şi*

$$|(B_m f)(x,y) - f(x,y)| \le 4\omega_{total}\left(f;\frac{1}{2\sqrt{m}},\frac{1}{2\sqrt{m}}\right). \tag{44}$$

Teorema 20. *Dacă* $f \in C_b(\Delta_2)$*, atunci pentru orice* $(x, y) \in \Delta_2$ *şi pentru orice* $m \in \mathbb{N}$ *avem*

$$|(UB_m f)(x,y) - f(x,y)| \le \left(1 + \delta_1^{-1}\frac{1}{2\sqrt{m}} + \delta_2^{-1}\frac{1}{2\sqrt{m}} + \right. \tag{45}$$
$$\left. + \delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\frac{1}{2m}\right)\omega_{mixed}(f;\delta_1,\delta_2),$$

pentru orice δ_1*,* $\delta_2 > 0$ *şi*

$$|(UB_m f)(x,y) - f(x,y)| \le \frac{5}{2}\omega_{mixed}\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}},\frac{1}{\sqrt{m}}\right). \tag{46}$$

Teorema 21. *Dacă* $f \in D_b(\Delta_2)$*, cu* $D_B f \in B(\Delta_2)$ *atunci pentru orice* $(x, y) \in \Delta_2$ *şi pentru orice* $m \in \mathbb{N}$*,* $m \ge 2$*, avem*

$$|(UB_m f)(x,y) - f(x,y)| \le \frac{3}{2m}\|D_B f\|_\infty + \left(\frac{1}{2m} + \delta_1^{-1}\frac{1}{2m\sqrt{m}} + \right. \tag{47}$$

$$+\delta_2^{-1}\frac{1}{2m\sqrt{m}}+\delta_1^{-1}\delta_2^{-1}\frac{1}{4m^2}\Bigg)\,\omega_{mixed}(D_Bf;\delta_1,\delta_2),$$

pentru orice $\delta_1,\ \delta_2>0$ *şi*

$$|(UB_mf)(x,y)-f(x,y)|\le\frac{3}{2m}\|D_Bf\|_\infty+ \tag{48}$$

$$+\frac{7}{4m}\omega_{mixed}\left(D_Bf;\frac{1}{\sqrt{m}},\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

În articolul [56] am studiat aproximarea uniformă pe Δ_2 prin operatorii de tip Schurer

$$(\tilde{B}_{m,p}f)(x,y)=\sum_{\substack{k,j=0\\ k+j\le m+p}}p_{m+p,k,j}(x,y)f\left(\frac{k}{m},\frac{j}{m}\right), \tag{49}$$

Aproximarea uniformă pe Δ_2 a funcţiilor de două variabile prin operatori de tip Stancu şi Schurer-Stancu a fost studiată în articolele [57] şi [58].

Fie $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ parametri reali care verifică relaţiile $0\le\alpha_1\le\beta_1$, $0\le\alpha_2\le$ $\le\beta_2$. Pentru $m\in\mathbb{N}$, operatorul $S_m^{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}:C([0,1]\times[0,1])\to C(\Delta_2)$, definit pentru orice funcţie $f\in C([0,1]\times[0,1])$ prin relaţia

$$(S_m^{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}f)(x,y)=\sum_{\substack{k,j=0\\ k+j\le m}}p_{m,k,j}(x,y)f\left(\frac{k+\alpha_1}{m+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right), \tag{50}$$

pentru orice $(x,y)\in\Delta_2$, este un operator de două variabile de tip Stancu.

Fie $p\in\mathbb{N}_0$ dat şi $\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2$ parametri reali care verifică relaţiile $0\le\alpha_1\le$ $\le\beta_1$, $0\le\alpha_2\le\beta_2$. Pentru $m\in\mathbb{N}$, operatorul $\tilde{S}_{m,p}^{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}$, definit pentru orice funcţie $f\in C([0,1+p]\times[0,1+p])$ prin

$$(\tilde{S}_{m,p}^{(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)}f)(x,y)=\sum_{\substack{k,j=0\\ k+j\le m+p}}p_{m+p,k,j}(x,y)f\left(\frac{k+\alpha_1}{m+\beta_1},\frac{j+\alpha_2}{m+\beta_2}\right), \tag{51}$$

pentru orice $(x,y)\in\Delta_2$, este un operator de două variabile de tip Schurer-Stancu.

În articolele [101] şi [102] am studiat proprietăţile de aproximare ale operatorilor de două variabile de tip Kantorovich şi Durrmeyer pe mulţimea Δ_2 şi am demonstrat câteva teoreme de aproximare uniformă.

Pentru $m\in\mathbb{N}$, considerăm operatorul $\mathcal{K}_m:L_1([0,1]\times[0,1])\to C([0,1]\times[0,1])$ definit pentru orice funcţie $f\in L_1([0,1]\times[0,1])$ prin

$$(\mathcal{K}_mf)(x,y)=(m+1)^2\sum_{\substack{k,j=0\\ k+j\le m}}p_{m,k,j}(x,y)\int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}}\int_{\frac{j}{m+1}}^{\frac{j+1}{m+1}}f(s,t)\,ds\,dt \tag{52}$$

pentru orice $(x,y)\in\Delta_2$, care este un operator de tip Kantorovich.

Pentru $m\in\mathbb{N}$, operatorul $\mathcal{M}_m : L_1(\Delta_2)\to\mathcal{F}(\Delta_2)$, definit pentru orice funcţie $f\in L_1(\Delta_2)$ prin

$$(\mathcal{M}_m f)(x,y)=(m+1)(m+2)\sum_{\substack{k,j=0\\k+j\le m}} p_{m,k,j}(x,y)\iint_{(\Delta_2)} p_{m,k,j}(s,t)f(s,t)\,ds\,dt \tag{53}$$

pentru orice $(x,y)\in\Delta_2$, este un operator de tip Durrmeyer.

În articolul [59] am studiat proprietăţile de aproximare ale unor operatori de două variabile cu noduri modificate, din care, prin particularizări, se obţin câţiva operatori clasici:

$$(K_{m,p}f)(x,y)=\sum_{\substack{k,j=0\\k+j\le m+p}}\varphi_{m+p,k,j}(x,y)f(u_{m,k},v_{m,j}). \tag{54}$$

În articolul [60] s-au studiat proprietăţile de aproximare ale operatorului Bernstein de trei variabile pe tetraedrul Δ_3 şi s-a obţinut o evaluare a erorii de aproximare pentru funcţii continue şi respectiv B-continue. În articolul [61] s-a stabilit o formulă pentru polinoamele fundamentale Bernstein de n variabile:

Teorema 22. *Pentru $m,n\in\mathbb{N}$ şi $\mathbf{x}\in\Delta_n$, avem formula*

$$\sum_{\substack{\mathbf{i}\\0\le|\mathbf{i}|\le m}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{i_j}{m}-x_j\right)p_{m,\mathbf{i}}(\mathbf{x})=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{m^n}\sum_{i=0}^{n}a_im^i \tag{55}$$

unde

$$a_i=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{n}{j}s(n-j,i-j), \tag{56}$$

$i\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Domeniul aproximării prin operatori liniari reprezintă un câmp larg de cercetare, datorită diversităţii tipurilor de operatori şi a problematicii legate de procesul de aproximare: studiul convergenţei, studiul restului din formulele de aproximare, studiul conservării unor proprietăţi ale funcţiilor - cum ar fi monotonia sau convexitatea - prin aplicarea unor operatori. Prin prezenta teză, elaborată sub atenta îndrumare a domnului cercetător ştiinţific I dr. Ion Păvăloiu, de la Institutul de Calcu "Tiberiu Popoviciu" din Cluj-Napoca şi cu sprijinul altor doi specialişti, conf. univ. dr. Dan Bărbosu, de la Universitatea de Nord din Baia Mare şi prof. dr. Ovidiu Pop, de la Colegiul Naţional "Mihai Eminescu" din Satu Mare, am intenţionat să aduc un mic aport la eforturile cercetătorilor matematicieni care se ocupă de această problematică.

Bibliografie

[1] Abel, U., *The moments for the Meyer-König and Zeller operators*, J. Approx. Theory, **82** (1995), 352-361

[2] Abel, U., *The complete asymtotic expansion for the Meyer-König and Zeller operators*, J. Math. Anal. Appl., **208** (1997), 109-119

[3] Abel, U., Ivan, M., *Some identities for the operator of Bleimann, Butzer and Hahn involving divided differences*, Calcolo, **36** (1999), 143-160

[4] Abel, U., Ivan, M., *Durrmeyer variants of the Bleimann, Butzer and Hahn operators*, The 5^{th} Romanian-German Seminar on Approximation Theory and its Applications, RoGer 2002 - Sibiu, 3-8

[5] Agratini, O., *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000

[6] Agratini, O., *On a certain class of approximation operators*, Pure Math. Appl., **11** (2000)

[7] Agratini, O., *Approximation properties of generalization of Bleimann, Butzer and Hahn operators*, Mathematica Pannonica, **9** (1998), 2, 165-171

[8] Agratini, O., *Approximation properties of a class of linear operators*, Bul. Acad. Şt. R. Moldova, Matematica, **29** (1999), 1, 73-78

[9] Agratini, O., *On a class of linear approximating operators*, Mathematica Balkanica, N. S. **11** (1997), Fasc. 3-4, 407-412

[10] Agratini, O., *On the rate of convergence of a positive approximation process*, Nihonkai Mathematical Journal, **11** (2000), No. 1, 47-56

[11] Agratini, O., *On a sequence of linear and positive operators*, Facta Universitatis (Niš), Ser. Math. Inform., **14** (1999), 41-48

[12] Agratini, O., Della Vecchia, B., *Mastroianni operators revisited*, Facta Univ. (Niš), Ser. Math. Inform., **19** (2004), 53-63

[13] Badea, I., *Modulul de continuitate în sens Bögel şi unele aplicaţii în aproximarea printr-un operator Bernstein*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Mech. (2), **4**(1973), 69-78

[14] Badea, I., *Modulul de oscilaţie pentru funcţii de două variabile şi unele aplicaţii în aproximarea prin operatori Bernstein*, Ann. Univ. Craiova, Ser. V, **2**(1974), 43-54

[15] Badea, I., *Asupra unei teoreme de aproximare uniformă prin pseudopolinoame de tip Bernstein*, An. Univ. Craiova, Ser. a V-a, **2**(1974), 55-58

[16] Badea, C., Badea, I., Gonska, H. H., *A test function theorem and approximation by pseudopolynomials*, Bull. Austral. Math. Soc., **34** (1986), 53-64

[17] Badea, C., Cottin, C., *Korovkin-type Theorems for Generalized Boolean Sum Operators*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, **58**, Approximation Theory, Kecskemét (Hungary) (1990), 51-67

[18] Badea, C., Badea, I., Cottin, C., *A Korovkin-type theorem for generalizations of Boolean sum operators and approximation by trigonometric pseudopolynomials*, Anal. Numér. Théorie Approx. 17, **7**(1988), 7-17

[19] Badea, C., Badea, I., Cottin, C., Gonska, H. H., *Notes on the degree of approximation of B-continuous and B-differentiable functions*, J. Approx. Theory Appl., **4**(1988), 95-108

[20] Badea, C., *On a Korovkin-Type Theorem for Simultaneous Approximation*, J. Approx. Theory, **62**(**2**)(1990), 223-234

[21] Baskakov, V. A., *An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, **113**(1957), 249-251

[22] Bărbosu, D., *Simultaneous Approximation by Schurer-Stancu type operators*, Math. Balkanica, **17**(2003), Fasc. 3-4, 365-374

[23] Bărbosu, D., *Polynomial approximation by means of Schurer-Stancu type operators*, Editura Universităţii de Nord, Baia Mare, 2006

[24] Bărbosu, D., *Approximation properties of some generalized Bernstein operators*, BAM-1700/99 XCB, 149-164

[25] Bărbosu, D., *Obsérvation sur l'approximation des fonctions bidimensionel continues*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, seria B, Mat.-Inf., **VIII**(1991), 75-79

[26] Bărbosu, D., *The approximation of the Bögel-continuous functions using the Bernstein-Stancu polynomials*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, seria B, Mat.-Inf., **VIII**(1992), 11-18

[27] Bărbosu, D., *On the approximation by GBS operators of Mirakjan type*, BAM-1794/2000 XCIV, 169-176

[28] Bărbosu, D., *Some generalized bivariate Bernstein operators*, Mathematical Notes, Miskolc, **I**, No. 1(2000), 3-10

[29] Bărbosu, D., *Aproximarea funcţiilor de mai multe variabile prin sume booleene de operatori liniari de tip interpolator*, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2002

[30] Bărbosu, D., *Durrmeyer-Stancu type operators*, Facta Univ. (Niš), Ser. Math-Inform., **19**(2004), 65-72

[31] Bărbosu, D., *Kantorovich-Stancu type operators*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **5**(**3**)(2004)

[32] Bărbosu, D., *The Kantorovich form of the Schurer-Stancu operators*, Demonstratio Math., **17**, fasc. 2(2004), 383-391

[33] Bărbosu, D., Bărbosu, M., *GBS operators of Kantorovich-Schurer type*, Bulletins for Applied & Computer Mathematics, BAM-2076, A(CIV), Budapest (2003), 339-346

[34] Bărbosu, D., *Voronovskaja theorem for Bernstein-Schurer bivariate operators*, Rev. Anal. Numér. Thér. Approx., Tome 33, No. 1, 2004, 19-24

[35] Bărbosu, D., *GBS operators of Schurer-Stancu type*, Annales of Univ. of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., **31**(2003), 1-7

[36] Bărbosu, D., *Approximation properties of a bivariate Stancu type operators*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., XLVII, No. 4, 2002, 13-18

[37] Bărbosu, D., *Voronovskaja Theorem for Bernstein-Schurer operators*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematică-Informatică, **XVIII**(2002), nr. 2, 137-140

[38] Bărbosu, D., Bărbosu, M., *Some properties of the fundamental polynomials of Bernstein-Schurer*, Bul. Şt. Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematică-Informatică, **XVIII**(2002), nr. 2, 133-136

[39] Bărbosu, D., *Kantorovich-Schurer operators* (va apărea în Novi-Sad Journal of Mathematics)

[40] Bernstein, S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités*, Commun. Soc. Math. Kharkow (2), **13**(1912-1913), 1-2

[41] Bernstein, S. N., *Complément à l'article de E. Voronovskaja*, C. R. Acad. Sci. URSS, 1932, 86-92

[42] Bleimann, G., Butzer, P. L., Hahn, L., *A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis*, Indag. Math., **42**(1980), 255-262

[43] Boggio, T., *Sur une proposition de M. Pompeiu*, Mathematica, **23**(1947-1948), 101-102

[44] Bohman, H., *On approximation of continuous and of analytic functions*, Ark. Mat., **2**(1952), 43-56

[45] Bögel, K., *Mehrdimensionale Differentiation von Funktionen mehrer Veränderlicher*, J. Reine Angew. Math., **170**(1934), 197-217

[46] Bögel, K., *Über mehrdimensionale Differentiation, Integration und beschränkte Variation*, J. Reine Angew. Math., **173**(1935), 5-29

[47] Cheney, E. W., Sharma, A., *On a generalization of Bernstein polynomials*, Riv. Mat. Univ. Parma, **5**(1964), 77-84

[48] Crăciun, M., *On compound operators depending on s parameters*, Rev. Anal. Numr. Thor. Approx., vol. 33 (2004), no. 1, 51-60

[49] Crăciun, M., *Approximation methods obtained using the umbral calculus*, PHD Thesis, Cluj-Napoca, 2005

[50] Dobrescu, E., Matei, I., *Aproximarea prin polinoame de tip Bernstein a funcţiilor bidimensional continue*, An. Univ. Timişoara, Ser. Şt. Mat., **IV**(1966), 85-90

[51] Durrmeyer, J. L., *Une formule d'inversion de transformée de Laplace: Application à la theorie des moments*, Thèse de 3e cycle, Faculté de Sciences de l'Université de Paris, 1967

[52] Farcaş, M. D., *About Bernstein polynomials* (trimis spre publicare la Analelel Universităţii din Craiova, Seria Matematic ̆)

[53] Farcaş, M. D., *About the central moments of the Bernstein and Bernstein-Schurer polynomials*, St. Cercet. Ştiinţ. Ser. Mat. Univ. Bacău, **18**(2008), 92-97

[54] Farcaş, M. D., *An extension for the Bernstein-Stancu operators*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., Tom **XV**(2008), 23-27

[55] Farcaş, M. D., *About the coefficients of Bernstein multivariate polynomials*, Creat. Math. & Inf., **15**(2006), 17-20

[56] Farcaş, M. D., *About some bivariate operators of Schurer type*, St. Cercet. Ştiinţ. Ser. Mat., **19**(2009), (va apărea)

[57] Farcaş, M. D., *About some bivariate operators of Stancu type* (trimis spre publicare la Acta Mathematica Apulensis)

[58] Farcaş, M. D., *About some bivariate operators of Schurer-Stancu type* (trimis spre publicare la International Journal of Pure and Applied Mathematics)

[59] Farcaş, M. D., *On certain bivariate operators defined on a triangle* (trimis spre publicare la Acta Mathematica Universitatis Comenianae)

[60] Farcaş, M. D., *About approximation of B-continuous functions of three variables by GBS operators of Bernstein type on a tetrahedron*, Acta Univ. Apulensis Mat. Inform., **16**(2008), 214-218

[61] Farcaş, M. D., *A formula involving the Bernstein fundamental polynomials*, Creat. Math. & Inf., **11**(2008), 62-66

[62] Farcaş, M. D., *About approximation of B-continuous and B-differentiable functions of three variables by GBS operators of Bernstein-Schurer type* (trimis spre publicare la Buletinul Ştiinţific al Universităţii Politehnica din Timişoara, Secţia Matematică–Fizică)

[63] Favard, J., *Sur les multiplicateur d'interpolation*, J. Math. Pures Appl., **23** (**9**)(1944), 219-247

[64] Ismail, M., May, C. P., *On a family of approximation operators*, J. Math. Anal. Appl., **63**(1978), 446-462

[65] Ivan, M., *A note on a Pompeiu-type theorem*, Analysis and Approx. Theory, The 5-th Romanian-German Seminar on Approx Theory and its Applications, RoGer 2002, Sibiu, 129-134

[66] Kantorovich, L. V., *Sur certain développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein*, **I**, **II**, C. R. Acad. URSS (1930), 563-568, 595-600

[67] Kása, Z., *Combinatorică cu aplicaţii*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2003

[68] Korovkin, P. P., *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Acad. Nauk. SSSR (N.S.), **90**(1953), 961-964

[69] Korovkin, P. P., *Linear operators and approximation theory*, Moskow (1959), Delhi (1980)

[70] Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, 1953

[71] Lorentz, G. G., *Approximation of functions*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966

[72] Lupaş, A., *On Bernstein power series*, Mathematica, **(8) 31**(1966), 287-396

[73] Lupaş, A., *Some properties of the linear positive operators*, (I), Mathematica, Cluj, **(9) 32**(1967), 77-83

[74] Lupaş, A., *Some properties of the linear positive operators*, (II), Mathematica, Cluj, **(9) 32**(1967), 295-298

[75] Lupaş, A., *Some properties of the linear positive operators*, (III), Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **3**(1974), 47-61

[76] Lupaş, A., *Contribuţii la teoria aproximării prin operatori liniari*, Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1976

[77] Lupaş, A., *Asupra unor polinoame de aproximare*, Gazeta Matematică, Seria A, **5**(1984), 91-93

[78] Lupaş, A., *The approximation by means of linear positive operators*, IDoMAT 95, Dortmund, Math. Research vol **86**(1995), 201-229

[79] Lupaş, A., *Classical polynomials and approximation theory*, Kolloquium Vortrag Univ. Duisburg, Dec. 19996

[80] Lupaş, A., *Approximation operators of binomial type*, IDoMAT 98, Birkhäuser Verlag, Witten, 1998

[81] Lupaş, A., Lupaş, L., *Properties of Stancu operators*, Proceedings of the International Symposium on Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj-Napoca, May 9-11, 2002, Dedicated to the 75^{th} birthday of Professor dr. Dimitrie D. Stancu, Cluj University Press, 2002, 258-275

[82] Lupaş, A., Lupaş, L., *Polynomials of binomial type and approximation*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Mathematica, **32**(1987), 61-69

[83] Mastroianni, G., *Su un operatore lineare e positivo*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, **46**(1979), 161-176

[84] Mastroianni, G., *Su una classe di operatori lineari e pozitivi*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, Serie IV, **48**(1980), 217-235

[85] Meyer–König, W., Zeller, K., *Bernsteinsche Potenzreihen*, Studia Math., **19**(1960), 89–94

[86] Mirakjan, G. M., *Approximation of continuous functions with the aid of polynomials*, Dokl. Acad. Nauk SSSR, **31**(1941), 201–205

[87] Mortici, C., Oancea, I., *A nonsmooth extension for the Bernstein-Stancu operators and an application*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., Vol. **LI**, No 2, 2006, 69–81.

[88] Mustăţa, C., Andrica, D., *An abstract Korovkin type theorem and applications*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., **XXXIV**, fasc. 2(1989), 44–51

[89] Nicolescu, M., *Analiză matematică*, **II**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[90] Pop, O. T., *New properties of the Bernstein-Stancu operators*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat., Tom **XI**(2004), 51–60

[91] Pop, O. T., *About some linear operators*, Int. J. Math. Math. Sci., Vol. 2007, Article ID 91781, 13 pp., 2007

[92] Pop, O. T., *Approximation of B-differentiable functions by GBS operators*, An. Univ. Oradea Fasc. Matem., Tom **XIV**(2007), 15–31

[93] Pop, O. T., *About the generalization of Voronovskaja's theorem for Bernstein polynomials of two variables*, Int. J. Pure Appl. Math., **38**(2007), no. 3, 297–308

[94] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About Bernstein polynomials and the Stirling's numbers of second kind*, Creat. Math., **14**(2005), 53–56

[95] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About a class of linear positive operators obtained by choosing the nodes* (trimis spre publicare la Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics)

[96] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About a class of linear positive operators*, General Math., **16**(**1**)(2008), 59–72

[97] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *The Voronovskaja-type theorem for a class of linear positive operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. (trimis spre publicare la Studia Universitatis "Babeş–Bolyai", Mathematica)

[98] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About some mean-value theorems for B-differentiable functions*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., Tome **35**, No 1, 2006, 105-110

[99] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *Approximation of B-continuous and B-differentiable functions by GBS operators of Bernstein bivariate polynomials*, J. Ineq. Pure App. Math., Vol. **7**, Iss. 3, Art. 92, 2006, 9pp (electronic)

[100] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *Some approximation theorems for Bernstein polynomials of two variables on a triangle*, Bul. Şt. Univ. Politeh. Timiş. Ser Mat. Fiz., Tom **51**(**65**), Fasc.1, 2006, 22-28

[101] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About the bivariate operators of Kantorovich type*, Acta Math. Univ. Com., **78**(**1**)(2009) (va apărea)

[102] Pop, O. T., Farcaş, M. D., *About the bivariate operators of Durrmeyer type*, Demonstratio Math., **42**(**1**)(2009) (va apărea)

[103] Pompeiu, D., *Sur une proposition analogue au théoréme des acroisements finis*, Mathematica, **22**(1946), 143-146

[104] Popa, E. C., *Contribuţii la calculul operatorial finit*, Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1998

[105] Popoviciu, T., *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor prin polinoame*, Cluj, (Roumanie), **6**(1931), 146-148

[106] Popoviciu, T., *Remarques sur les polynômes binomiaux*, Bull. Soc. Math. Cluj, **6**(1932), 8-10

[107] Popoviciu, T., *Sur l'approximations des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica **10**(1935), 49-54

[108] Popoviciu, T., *Sur la reste dans certain formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica, **1(24)**,(1959), 85-141

[109] Schurer, F., *Linear positive operators in approximation theory*, Math. Inst. Techn., Univ. Delft Report, 1962

[110] Shisha, O., Mond, B., *The degree of convergence of sequences of linear positive operators*, Proc. Nat. Acad. Sci USA, **60**(1968), 1196-2000

[111] Sikkema, P. C., *Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen*, Numer. Math., **3**(1961), 107-116

[112] Stancu, D. D., Coman, Gh., Agratini, O., Trîmbiţaş, R., *Analiză numerică şi teoria aproximării*, **I**, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001

[113] Stancu, D. D., *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Mat. Fiz., **14**(1969), 31-45

[114] Stancu, D. D., *Curs şi culegere de probleme de analiză numerică*, **I**, Univ. "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică, Cluj-Napoca, 1977

[115] Stancu, D. D., *A method for obtaining Polynomials of Bernstein type of two Variables*, Amer. Math. Monthly, **15**(1963), 260-264

[116] Stancu, D. D., *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*, J. SIAM Numer. Anal., **1**(1964)

[117] Stancu, D. D., *A New Class of Uniform Approximating Polynomial Operators in Two and Several Variables*, in "Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions", Budapest (1969), 443-445

[118] Stancu, D. D., *Aproximarea funcţiilor de două şi mai multe variabile printr-un operator de tip Bernstein*, Stud. Cercet. Mat. 2, **22**(1970), 335-345

[119] Stancu, D. D., *Approximation of bivariate functions by means of some Bernstein-type operators*, in "Multivariate Approximation" Edited by D. C. Handscomb, Academic Press, London (1978), 189-208

[120] Stancu, D. D., *Asupra aproximării funcţiilor de două variabile prin polinoame de tip Bernstein. Câteva evaluări asimptotice*, St. Cercet. Şt. Ser. Mat., **11**(1960), 171-176

[121] Stancu, D. D., *Asupra unor polinoame de tip Bernstein*, St. Cercet. Şt. Ser. Mat., Anul **XI**, Fasc. 2 (1960), 221-233

[122] Stancu, F., *Aproximarea funcţiilor de două şi mai multe variabile cu ajutorul operatorilor liniari şi pozitivi*, Ph. D. Thesis, Univ. "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1984

[123] Szász, O., *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. Research National Bureau of Standards, **45**(1950), 239-245

[124] Tomescu, I., *Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor*, E.D.P. Bucureşti, 1981

[125] Vernescu, A., *Approximation of Bivariate Functions by Operators of Bernstein Type*, Proceedings of the International Symposium on Numerical Analysis and Approximation Theory, Cluj-Napoca, May 9-11, 2002, Dedicated to the 75^{th} birthday of Professor dr. Dimitrie D. Stancu, Edited by Radu T. Trâmbiţaş (476 pages), Cluj University Press, 2002, 459-465

[126] Vernescu, A., *On the Contribution of the Romanian School of Numerical Analysis and Approximation Theory in the Construction of the Approximation Operators*, Proceedings of the First Conference on Nonlinear Analysis and Applications, Târgovişte, December 12-14, 2003, 57-63

[127] Voronovskaja, E., *Détermination de la forme asymtotique d'approximation des fonctions par des polinômes de M. Bernstein*, C. R. Acad. Sci. URSS (1932), 79-85