MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
UNIVERSITATEA DE NORD DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE ŞTIINŢE

REZUMAT AL TEZEI DE DOCTORAT

INELE TOPOLOGICE DE ENDOMORFISME

Coordonator ştiinţific:
Prof. Univ. Dr. Ursul Mihail

Doctorand:
Abrudan Horea Florian

Baia Mare
2011

Mulţumiri

Cercetarea ştiinţifică şi elaborarea unei teze de doctorat poate fi realizată numai printr-o îndrumare deosebită. Am găsit această îndrumare la Domnul Profesor Mihail Ursul, care nu numai că mi-a ghidat paşii în activitatea de elaborare a tezei, dar mi-a fost un mentor pe toate planurile şi un exemplu de urmat. Pentru tot ceea ce a făcut pentru mine nu pot decât să-i mulţumesc şi să-l asigur de profunda mea recunoştinţă şi consideraţie.

De asemenea doresc să exprim mulţumiri în mod deosebit Domnului Profesor Vasile Berinde, pentru suportul şi ajutorul permanent pe care mi l-a arătat de-a lungul întregii perioade de elaborare a tezei de doctorat. Aduc mulţumiri întregului colectiv al Departamentului de Matematică şi Informatică din cadrul Facultăţii de Ştiinţe a Universităţii de Nord din Baia Mare, pentru suportul arătat şi căldura cu care am fost întotdeauna primit.

Articole publicate în reviste de specialitate

- Horea Abrudan, Mihail Ursul: *Boundedness of topological endomorphism rings of torsion Abelian groups*, Contr. to Gen. Algebra **17** (2006), 1-8.
- Horea Abrudan: *On regular endomorphism rings of topological Abelian groups*, acceptat spre publicare la "Czechoslovak Mathematical Journal", revistă publicată de Institutul de Matematică al Academiei de Ştiinţe a Republicii Cehe.
- Horea Abrudan, Mihail Ursul: *Endomorphism rings with special neighborhoods of zero*, trimis spre publicare la "Algebra Colloquium", revistă publicată de Academia de Matematică, Academia de Ştiinţe a Chinei împreună cu Universitatea Suzhou.
- Horea Abrudan: *Topological endomorphism rings with minimal topologies*, Automation, Computers, Applied Mathematics **19**(2010), 33-36.
- Horea Abrudan: *Bounded topologies on endomorphism rings*, acceptat spre publicare la "Creative Mathematics", revistă publicată de Departamentul de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii de Nord Baia Mare.
- Horea Abrudan: *Admissible topologies on endomorphism rings*, acceptat spre publicare la "Carpathian Journal of Mathematics", revistă publicată

de Departamentul de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii de Nord Baia Mare.

Lucrări prezentate în conferinţe internaţionale

- Horea Abrudan: *Topological endomorphism rings with minimal topologies*, The Thirteenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Universitatea Tehnică, Cluj-Napoca, România, 2010.
- Horea Abrudan: *The character and the pseudo-character in endomorphism rings*, International Conference on Algebras and Lattices, Universitatea Charles şi Societatea Cehă de Matematică, Praga, Cehia, 2010.
- Horea Abrudan: *Rings of endomorphisms of Abelian groups with special 0-neighborhoods*, 6th International Conference on Applied Mathematics, Universitatea de Nord, Baia Mare, România, 2008.
- Horea Abrudan: *Rings of endomorphisms of Abelian groups with special neighborhoods of zero*, 2008 Summer School on Algebra and Ordered Sets, Universitatea Charles- Eduard Cech Center - Academia de Ştiinţe a Republicii Cehe, Trest, Cehia, 2008.
- Horea Abrudan: *On regular endomorphism rings of topological Abelian groups*, 75th Workshop on General Algebra, Universitatea Tehnică, Darmstadt, Germania, 2007.
- Horea Abrudan: *Notes on regular endomorphism rings of topological Abelian groups*, 14th Conference on Applied and Industrial Mathematics - Satellite Conference of the International Congress of Mathematicians, Chişinău, Republica Moldova, 2006.
- Horea Abrudan: *Boundedness of topological rings of endomorphisms*, International Conference "Several aspects of Biology, Chemistry, Informatics and Physics", Universitatea din Oradea, Băile Felix, România, 2005.
- Horea Abrudan: *Boundedness of topological rings of endomorphisms*, 70th Workshop on General Algebra, Institutul de Matematică Discretă şi Geometrie, Universitatea Tehnică, Viena, Austria, 2005.

Lucrări prezentate în conferinţe naţionale

- Horea Abrudan: *Unele proprietăţi ale inelului de endomorfisme a unui grup Abelian local compact*, Sesiunea anuală de comunicări ştiinţifice a studenţilor, Universitatea din Oradea, Oradea, România, 2004.

Premii obţinute

Premiul I obţinut pentru cercetarea ştiinţifică cu titlul **"Boundedness of topological rings of endomorphisms"**, din cadrul secţiunii "Young mathematics scientists" a Conferinţei Internaţionale "Several aspects of Biology, Chemistry, Informatics and Physics", Universitatea of Oradea, Băile Felix, România, 2005.

Participări la granturi şi contracte de cercetare

Membru în echipa de cercetare în contractul CERES nr. 4-147/2004 cu tema "Reprezentări şi omologie în Geometrie, Algebră şi Fizică" oferit de Ministerul Educaţiei şi Cercetării.

Cuprins

Introducere

Teoria inelelor de endomorfisme a grupurilor Abeliene şi, mai general, a modulelor, este un domeniu al algebrei în care se intersectează teoria mulţimilor, algebra omologică, teoria modulelor, logica matematică, teoria inelelor şi topologia generală. Studierea inelelor de endomorfisme este importantă deoarece ne oferă posibilitatea de cercetare, cu ajutorul unor metode specifice, a grupurilor şi inelelor. În prezent este dificil de stabilit frontiera între teoria inelelor şi teoria modulelor; de fapt aceste teorii au devenit una singură. Menţionăm că în teoreme de structură figurează de multe ori inelele de endomorfisme ale modulelor. De asemenea teoria inelelor de endomorfisme poate fi considerată atât parte a teoriei grupurilor Abeliene cât şi parte a teoriei reprezentării inelelor. În teoria abstractă a inelelor sunt utilizate noţiuni generale cum ar fi: ideal maximal, radicalul Jacobson, inel primitiv, ş.a.m.d.. Trebuie ţinut cont că într-un fel teoria inelelor are unele limite în a dezvolta aceste noţiuni. Ele pot fi studiate mai profund în cazul inelelor topologice de endomorfisme deoarece pe lânga metodele algebrice avem la dispoziţie noţiunile şi metodele topologice.

Fiecărui grup Abelian îi asociem un inel asociativ cu unitate, şi anume, inelul tuturor endomorfismelor. În calitate de model serveşte inelul transformărilor liniare ale unui spaţiu vectorial. Un caz particular foarte important este cazul spaţiului finit dimensional. În acest caz inelul de endomorfisme este izomorf cu inelul matricilor de dimensiune egală cu dimensiunea spaţiului vectorial. Primele lucrări în domeniul inelelor de endomorfisme au fost scrise de Shoda [**50**]. Vom ilustra netrivialitatea teoriei inelelor de endomorfisme chiar în cazul grupurilor Abeliene finite prin următorul exemplu: În teoria inelelor a fost studiată următoarea problemă: Fie R un inel finit. Există oare un inel comutativ S şi un număr natural n astfel încât R se scufundă în $M(n, S)$? Răspunsul surprinzător a fost dat de G. Bergman [**14**].

El a arătat că pentru orice număr prim p inelul $\mathrm{End}(Z(p) \oplus Z(p^2))$ nu admite o reprezentare de acest gen. Problema reprezentării inelelor finite cu ajutorul matricilor peste un inel comutativ este dificilă şi departe de a fi rezolvată. Ea nu este rezolvată (2010) chiar în cazul inelelor finite locale [**9**].

Baer [**12**] a fost primul care a studiat inelele de endomorfisme ca inele speciale, reuşind să caracterizeze inelele de endomorfisme a grupurilor de exponentă finită. Abordări diferite au mai fost propuse de Liebert în lucrările [**40**], [**41**], [**42**] obţinând caracterizări în cazul p-grupurilor separabile.

Există clase de inele a căror structură este bine cunoscută; astfel s-a ajuns la ideea studierii apariţiei inelelor de endomorfisme printre aceste inele. Iniţiatorul unui astfel de program a fost Szele [**52**], iar de atunci acestor cercetări li s-a acordat multă atenţie ([**47**] şi [**48**]). Obiectivul principal al programului era de a obţine cât mai multă informaţie despre structura grupurilor pe care erau definite endomorfismele.

În cercetarea inelelor de endomorfisme este urmărită descoperirea relaţiilor ce există între grupul Abelian şi inelul format din endomorfisme. În timp s-au evidenţiat două direcţii de cercetare în această teorie. Una ar fi prin impunerea unor restricţii asupra inelului de endomorfisme şi obţinerea de cât mai multe informaţii despre grupul Abelian sau chiar caracterizări ale acestuia. O altă problemă intens cercetată este aceea de a găsi condiţii în care un inel oarecare este realizat ca inel de endomorfisme al unui grup Abelian.

Clasa grupurilor Abeliene este divizată în trei subclase principale: grupuri cu torsiune, grupuri mixte şi grupuri fără torsiune. Cea mai bogată în rezultate este clasa grupurilor cu torsiune. De asemenea, clasa grupurilor mixte conţine suficient de multe rezultate. Spre deosebire de aceste două clase, este dificil de studiat grupurile fără torsiune(amintim că până în anii 60 ai secolului trecut nu erau cunoscute multe exemple de grupuri reduse fără torsiune care să nu fie libere).

Teoria inelelor de endomorfisme este prezentată în [**27**] capitolele XV-XVIII. Vom menţiona că rezultatele centrale se referă la grupurile periodice. Rezultate interesante cu privire la inelele de endomorfisme ale grupurilor fără torsiune pot fi găsite în monografia [**23**] (vezi acolo şi lucrările citate). Un rezultat important, obţinut în cazul grupurilor fără torsiune, poate fi găsit la Corner în [**19**]. De asemenea cercetări în acest sens mai pot fi întâlnite în lucrările lui Corner [**20**], [**21**], Brenner şi Butler [**16**], Kishkina [**34**], Krol [**35**]. Budanov în [**18**] reuşeşte să descrie elementele radicalului lui Jacobson (din punct de vedere al acţiunii acestora) pentru o clasă mare de grupuri fără torsiune. O mai mică atenţie a fost acordată grupurilor mixte. În [**53**], T. Szele a arătat că nu există grupuri mixte a căror inel de endomorfisme să conţină divizori ai lui 0. Comutativitatea inelului de endomorfisme a fost de asemenea rezolvată în cazul a două clase mari de grupuri mixte de către Szele şi Szendrei în [**54**]. O extindere a caracterizării date de cei doi în cazul comutativităţii inelelor de endomorfisme pentru grupuri mixte a fost realizată de Schultz în [**49**].

Problema centrală în teoria inelelor topologice este următoarea: Care este influenţa topologiilor care pot fi definite pe un inel R asupra proprietăţilor lui algebrice şi invers? Această problemă este mai nuanţată când studiem unele construcţii în clasa inelelor topologice. De exemplu, sunt studiate relaţiile între proprietăţile unui spaţiu topologic X şi proprietăţile inelelor de funcţii continue $C(X)$, proprietăţile unui pro-p-grup G şi inelului grupal completat $\mathbb{Z}_p[[G]]$, ş.a.m.d..

Inelul de endomorfisme al unui grup Abelian are o topologie naturală de inel topologic - topologia finită. În cazul grupurilor infinite cu torsiune topologia finită nu este discretă.

Rezultatele tezei sunt legate de două probleme de bază:

i) Fie $\mathcal{P}$ o proprietate topologică, adică o clasă de spaţii topologice. În care condiţii asupra lui A inelul topologic $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ are proprietatea $\mathcal{P}$?

ii) Fie că inelul topologic $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ are proprietatea $\mathcal{P}$. Care este structura grupului A?

Fie A un grup Abelian şi $\mathcal{T}$ topologia finită pe $\mathrm{End}(A)$. Menţionăm că poate fi studiată o problema mai generală: Fie A un grup local compact Abelian şi $\mathrm{End}_c(A)$ inelul endomorfismelor continue cu topologia compact-deschisă. Care este legatura între proprietăţile inelului $\mathrm{End}_c(A)$ şi a grupului topologic A?

Următoarele proprietăţi generale sunt utile:

i) inelul $\mathrm{End}_c(A)$ are un sistem fundamental de vecinătăţi în punctul 0 format din subsemigrupuri ale semigrupului multiplicativ [**56**].

ii) $\mathrm{End}_c(A)$ este inel complet[**56**].

iii) deoarece $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ are sistem fundamental de vecinătăţi în 0 format din ideale stângi (în alţi termeni este inel stâng liniar) el este inel stâng mărginit şi 0 dimensional în sensul dimensiunii ind. Cu alte cuvinte, $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ are o bază formată din submulţimi închise şi deschise.

Primul rezultat important în acest domeniu a fost obţinut de L. Fuchs, şi anume, au fost caracterizate grupurile Abeliene cu $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ compact([**27**] Propoziţia 107.4):

Dacă A este un grup Abelian atunci $\mathrm{End}(A)$ este compact dacă şi numai dacă $A = \oplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$ unde fiecare componentă primară A_p este o sumă directă finită de grupuri cociclice.

Alte rezultate în această direcţie au fost obţinute şi în [**56**] şi [**57**] .

Următoarea noţiune a teoriei generale a inelelor topologice reprezintă analogul algebric al noţiunii de spaţiu compact. Un inel topologic $(R, \mathcal{T})$ se numeşte *mărginit* dacă pentru orice vecinătate U a lui 0 există o vecinătate V a lui 0 astfel încât $V.R \subseteq U$ şi $R.V \subseteq U$. Clasa inelelor mărginite conţine inelele compacte şi inelele discrete. Orice inel topologic care are un sistem fundamental în punctul 0 format din ideale este mărginit.

Cum noţiunea de inel mărginit generalizează noţiunea de inel compact, am studiat următoarea problemă: Când inelul $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ este mărginit? Echivalent: În care condiţii asupra lui A inelul $\mathrm{End}(A)$ înzestrat cu topologia finită are sistem fundamental în punctul 0 format din ideale? Menţionăm că dacă $\mathrm{End}(A)$ este comutativ, el este mărginit. Caracterizarea grupurilor A cu inelul comutativ $\mathrm{End}(A)$, este o problemă nerezolvată faimoasă în teoria grupurilor Abeliene. În mod natural au apărut grupuri Abeliene A pentru care $\mathrm{End}(A)$ este discret(vezi [**10**]).

În preliminariile capitolului II sunt prezentate câteva rezultate tehnice. Propoziţia 2.1.31 arată că dacă un grup se descompune în sumă directă de subgrupuri deplin invariante atunci inelul de endomorfisme a grupului este izomorf topologic cu produsul inelelor de endomorfisme a respectivelor subgrupuri(Corolarul 2.1.32 tratează cazul grupurilor cu torsiune).

Începutul celui de-al doilea paragraf tratează cazul local mărginirii pentru inelele de endomorfisme. În Lema 2.2.37 se demonstrează că atunci când grupul este o sumă directă de un număr infinit de grupuri ($A = \bigoplus_{\mathfrak{m}} B$) atunci inelul nu este local mărginit. În consecinţă obţinem caracterizarea grupurilor divizibile periodice pentru care inelul de endomorfisme este local mărginit. În Teorema 2.2.40 sunt caracterizate grupurile divizibile pentru care inelul de endomorfisme este mărginit. Dacă vom considera grupurile Abeliene divizibile pentru care inelul endomorfismelor este local mărginit, atunci această caracterizare este dată de Teorema 2.2.42.

Trecând la cazul p-grupurilor reduse, în Propoziţia 2.2.44 se demonstrează că dacă grupul este separabil atunci inelul lui de endomorfisme este nemărginit, fapt ce ne permite caracterizarea p-grupurilor reduse A ($|A| \leq \omega$) pentru care $\mathrm{End}(A)$ este mărginit. Unul din rezultatele centrale ale tezei date este caracterizarea grupurilor numărabile cu torsiune pentru care $\mathrm{End}(A)$ este mărginit (Teorema 2.2.49). Ultimele rezultate ale paragrafului oferă câteva informaţii despre cardinalitatea grupului şi a subgrupului de bază în cazul p-grupurilor Abeliene respectiv a celor Abeliene reduse. În Teorema 2.2.54 noi prezentăm o caracterizare a submulţimilor mărginite ale inelului topologic $(\mathrm{End}A, \mathcal{T}_\lambda)$ unde A este un grup elementar sau liber. Rămâne nerezolvată problema caracterizării p-grupurilor de puterea 2^ω cu $\mathrm{End}(A)$ mărginit (vezi Observaţia 2.2.53).

În ultimul paragraf (Teorema 2.3.57) prezentăm un inel nediscret de endomorfisme al unui grup Abelian care admite topologii drept mărginite dar nu admite topologii de inel mărginite, nediscrete.

Inelele regulate au fost introduse de către John von Neumann în scopul clarificării unor aspecte legate de algebrele de operatori [**25**]. Cartea lui K.R. Goodearl [**30**] dezvoltă teoria în cazul unor variate tipuri de inele regulate, existând în acest sens şi multe articole publicate. În teoria grupurilor Abeliene accentul este pus pe determinarea grupurilor a căror inel de endomorfisme este regulat sau are proprietăţi asemănătoare ([**27**] secţiunea 112, [**28**], [**29**]). Brown şi McCoy oferă o nouă direcţie cercetărilor, ei arătând [**17**] că orice inel conţine un ideal maximal unic, a cărui elemente sunt elemente regulate ale inelului.

Teorema 3.1.61 oferă condiţii necesare şi suficiente pentru un endomorfism continu astfel încât acesta să fie m-regulat. Teorema 3.1.62 reprezintă un rezultat central al tezei. Ea conţine caracterizarea grupurilor Abeliene topologice, nu neaparat local compacte, pentru care inelul de endomorfisme este π-regulat, fiind o extindere naturală a Teoremei lui Rangaswamy ([**27**], Propoziţia 112.2) despre inele regulate de endomorfisme. Următoarele rezultate din paragraf ne oferă posibilitatea de a construi un exemplu de grup A al cărui inel de endomorfisme nu este regulat dar $\mathrm{End}_c(A)$ este. Propoziţia 3.1.70 exemplifică un grup pentru care $\mathrm{End}(A)$ este regulat iar $\mathrm{End}_c(A)$ nu este (se demonstrează de asemenea că inelul $\mathrm{End}_c(A)$ al grupului prezentat în propoziţie este prim). În Teorema 3.1.72 s-a obţinut o caracterizare a grupurilor local compacte Abeliene cu torsiune pentru care $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat.

În paragraful al doilea din capitolul III noi studiem inelele de endomorfisme ale modulelor topologice discrete quasi-injective. În Teorema 3.2.73, care reprezintă un rezultat central al tezei, este extinsă teorema faimoasă despre regularitatea inelului de endomorfisme a modulului quasi-injectiv modulo radicalul lui Jacobson (Utumi, Wang şi Johnson, Osofsky, Faith şi Utumi). Rezultatul obţinut în Teorema 3.2.76 ne furnizează o caracterizare a modulelor quasi-injective pentru care inelul endomorfismelor este compact.

În paragraful 3.3 este dat un exemplu de grup Abelian liniar compact a cărui inel de endomorfisme continue este regulat. De asemenea este studiată topologia "liniar compactă deschisă ", topologie împreună cu care inelul de endomorfisme formează inel topologic.

Categoria inelelor topologice este prea largă pentru a permite dezvoltarea unei teorii de structură. Vom menţiona două clase de inele topologice în care se aplică cu succes conceptele şi metodele teoriei abstracte a inelelor:

i) inelele local compacte;

ii) algebrele Banach şi diverse generalizări.

Radicalul Jacobson are un rol central în studierea inelelor abstracte. Bineînţeles, radicalul Jacobson nu poate fi utilizat cu succes la studierea inelului topologic dacă el nu este închis. Există exemple de inele de endomorfisme ale modulelor libere cu radicalul Jacobson neînchis [**15**]. Recent au fost construite exemple de inele de endomorfisme ale grupurilor Abeliene pentru care radicalul Jacobson nu este închis (vezi, de exemplu, [**18**]). Acest exemplu reflectă dificultăţile care pot să apară în cazul cercetării inelelor topologice de endomorfisme.

În ambele cazuri enunţate anterior radicalul este închis. În cazul algebrelor Banach, acest rezultat este adevărat deoarece algebra are o vecinătate a lui 0 formată din elemente quasi-regulate. Prin aceasta se explică importanţa noţiunii de Q-inel în categoria inelelor topologice. Într-un Q-inel topologic orice ideal maximal, drept sau stâng, este închis, ceea ce implică faptul că radicalul lui Jacobson este închis. Forma cea mai generală a acestei teoreme este conţinută în [**56**]. Aceste considerente ne-au condus la următoarea întrebare:

Când inelul End(A) este un Q-inel?

Prima teoremă din paragraful 4.1 formulează câteva afirmaţii echivalente pentru ca un inel topologic stâng mărginit să fie Q-inel. Ca şi corolar al acestei teoreme, enunţăm cazul inelului de endomorfisme (Corolarul 4.1.84).

În începutul celui de-al doilea paragraf se arată că în cazul sumelor directe infinite inelul de endomorfisme este nediscret. Teorema 4.2.87 arată faptul că în cazul grupurilor Abeliene periodice, pentru ca inelul End(A) să fie discret este necesar şi suficient ca grupul A să fie finit. De asemenea este tratat cazul în care inelul de endomorfisme are o vecinătate fără elemente nilpotente şi topologic nilpotente nenule, caz în care de asemenea este necesar şi suficient ca A să fie finit (Teorema 4.2.88). Tot aici se demonstrează că dacă A este grup separabil şi dacă inelul de endomorfisme are o vecinătate comutativă atunci A este finit. În Teorema 4.2.91 se arată că dacă End(A) are o vecinătate a lui 0 nilpotentă şi A este periodic atunci grupul este o sumă directă finită de p-grupuri.

Datorită faptului că Teorema 4.1.83 nu oferă informaţii despre grupurile Abeliene a căror inel de endomorfisme este Q-inel, al treilea paragraf al capitolului oferă câteva condiţii suficiente ca acest fapt să fie îndeplinit. Pe lângă câteva rezultate preliminarii, s-a obţinut o caracterizare a grupurilor periodice divizibile şi a p-grupurilor reduse separabile în cazul în care radicalul lui Jacobson al inelului de endomorfisme este deschis (Teoremele 4.3.95 şi 4.3.96).

Caracterul şi pseudo-caracterul sunt două noţiuni de bază în topologia generală. În paragraful 4.4 se realizează o descriere a celor două noţiuni pentru inelul de endomorfisme, prin intermediul invarianţilor grupului pe care s-au definit endomorfismele, şi se arată relaţiile ce se stabilesc între aceste noţiuni. Primul rezultat oferă informaţii despre suma directă în care s-a descompus un grup Abelian, în cazul în care caracterul inelului de endomorfisme este mai mic decât un număr cardinal. În urma acestui rezultat se formulează două consecinţe în Corolarul 4.4.101 şi Corolarul 4.4.102. Propoziţia 4.4.103 exprimă o relaţie între caracterul şi pseudo-caracterul inelului de endomorfisme al unei sume directe de un număr de copii ale unui grup nenul de cardinalitate $\leq \omega$. Un grup deosebit de interesant în teoria grupurilor este grupul lui Kulikov. Teorema 4.4.105 ne oferă informaţii despre caracterul şi pseudo-caracterul inelului de endomorfisme al grupului lui Kulikov. Teorema 4.4.107 este un rezultat central al tezei. În ea sunt caracterizate grupurile periodice infinite pentru care pseudo-caracterul este $\leq \tau$ unde τ este un cardinal infinit. În Teorema 4.4.110 se arată că pentru grupul lui Baer-Specker $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ caracterul $\chi(\mathrm{End}(A)) = 2^{\omega}$ şi pseudo-caracterul $\psi(\mathrm{End}(A)) = \omega$.

Teoria inelelor de fracţii este un domeniu important al teoriei moderne a inelelor. Teoria inelelor topologice de fracţii nu este însă atât de bine elaborată. Există diferite căi de a introduce noţiunea de inel de fracţii dar situaţia este mai dificilă în cazul topologic. Un rol important în teoria inelelor de fracţii îl joacă inelele prime. În acest sens este important de găsit exemple netriviale de inele prime de endomorfisme. Noi indicăm o clasă largă de inele prime în Paragraful 4.5.

În paragraful 4.6 sunt studiate condiţiile în care inelul de endomorfisme al unui modul unitar drept împreună cu topologia finită este inel topologic minimal, adică nu există o topologie mai grosieră decât topologia finită. Noi demonstrăm (Teorema 4.6.114) că inelul endomorfismelor unui modul liber asupra unui inel finit este minimal. De fapt noi indicăm o clasă largă de subinele minimale ale inelului de endomorfisme a unui modul liber peste un inel finit.

Ultimul paragraf al tezei tratează topologiile admisibile pe inele de endomorfisme. O topologie de inel nediscretă pe inelul de endomorfisme a unui grup Abelian A este *admisibilă* dacă grupul privit ca modul stâng peste $\mathrm{End}(A)$ este modul topologic, A fiind înzestrat cu topologia discretă. Este indicată o clasă de topologii admisibile peste inelul de endomorfisme al unui grup Abelian infinit, şi se demonstrează că aceste topologii peste $\mathrm{End}(A)$ formează inele complete. Construim o topologie pentru inelul de endomorfisme, topologie care în cazul grupurilor elementare nu este comparabilă cu topologia finită, prin urmare nu este admisibilă. Tot aici este dat un exemplu de topologie de inel împreună cu care inelul de endomorfisme formează inel topologic, această topologie fiind admisibilă şi diferită de topologiile din clasa amintită mai sus. Introducem noţiunea de topologie de grup admisibilă şi construim o astfel de topologie cu ajutorul ultrafiltrelor.

Rezultatele Capitolului II sunt regăsite în articolele [**5**] şi [**3**]. Ele au fost prezentate în următoarele conferinţe internaţionale: 26-29 mai 2005, AAA70 70th Workshop on General Algebra, Institute of Discrete Mathematics and Geometry, TU Wien, Wien, Austria şi 11-13 Noiembrie 2005 International Conference Several aspects of Biology, Chemistry, Informatics and Physics, University of Oradea, Băile Felix, Romania.

Rezultatele capitoulului III sunt acceptate spre publicare în articolul [**1**] şi au fost prezentate în conferinţele internaţionale: 17-19 August 2006 - The 14th Conference on Applied and Industrial Mathematics - Satellite Conference of the International Congress of Mathematicians 2006 Chisinău, Republica Moldova şi 2-4 November 2007 - AAA75+CYA23 - 75th Workshop on General Algebra, Darmstadt University of Technology, Darmstadt, Germania.

Rezultatele din primele 4 secţiuni ale capitolului IV sunt trimise spre publicare la revista Algebra Colloquium [**6**], cele din secţiunea 6 se regăsesc în lucrarea [**2**] iar cele din ultimul paragraf în [**4**]. Ele au fost prezentate în următoarele conferinţe internaţionale: 31 August-6 Septembrie 2008 Summer School on Algebra and Ordered Sets, Charles University - Eduard Cech Center - Czech Academy of Sciences, Trest, Cehia, 18-21 Septembrie 2008, 6th International Conference on Applied Mathematics,Universitatea de Nord, Baia Mare, Romania, 21- 25 Iunie 2010 International Conference on Algebras and Lattices, Universitatea Charles şi Societatea Cehă de Matematică, Praga, Cehia, 26-28 August 2010 The Thirteenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Universitatea Tehnică, Cluj-Napoca, România.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

1. Definiţii şi convenţii

$\mathbb{P}$ reprezintă mulţimea tuturor numerelor prime pozitive. Prin ω vom nota primul număr ordinal infinit sau mulţimea numerelor naturale. Dacă $n, m \in \omega, n \leq m$, atunci $[n, m]$ reprezintă mulţimea $\{n, n+1, \ldots, m\}$. Dacă $f : X \to Y$ este o aplicaţie şi $Z \subseteq X$ o submulţime, atunci prin $f \restriction_Z$ se notează restricţia lui f la Z. Vom nota prin $K \subset_f X$ faptul că K este o submulţime finită a lui X. Subgrupul unui grup A generat de o submulţime X este notat cu $\langle X \rangle$. Ordinul unui element a al unui grup se notează cu $o(a)$. Dacă A este o sumă directă a subgrupurilor B şi C, vom scrie $A = B \oplus C$. Fie X, Y două submulţimi ale inelului R. Atunci $X.Y := \{xy : x \in X, y \in Y\}$ şi $XY = \{\sum_{i=0}^{n} x_i y_i : x_i \in X, y_i \in Y, n \in \omega\}$. Închiderea unei submulţimi B a unui spaţiu topologic se notează cu $\overline{B}$. Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic şi $Y \subseteq X$ atunci prin $\mathcal{T} \restriction_Y$ se notează topologia indusă. O familie $\mathfrak{B}$ de submulţimi deschise ale unui spaţiu topologic X se numeşte *sub-bază* în punctul $x \in X$ dacă familia formată din intersecţiile finite ale elementelor lui $\mathfrak{B}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x. Un grup cu torsiune se numeşte p-grup dacă ordinul fiecărui element este o putere a lui p. Pentru un grup Abelian A şi un număr cardinal $\mathfrak{m}$ prin $\oplus_{\mathfrak{m}} A$ se notează suma directă a $\mathfrak{m}$ copii ale grupului A. Toate inelele sunt asociative cu 1. Inelul de endomorfisme $\mathrm{End}(A)$ a unui grup Abelian A este considerat ca inel topologic, cu topologia finită. Dacă K este o submulţime finită a lui A atunci prin $T(K)$ notăm idealul stâng $\{\varphi \in \mathrm{End}(A) : \varphi(K) = 0\}$ a lui $\mathrm{End}(A)$. Pentru a simplifica notaţiile, pentru $a \in A$ vom scrie $T(a)$ în loc de $T(\{a\})$. Familia $\{T(K)\}$, unde K parcurge toate submulţimile finite ale unui grup Abelian A, formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui 0, a inelului topologic $\mathrm{End}(A)$. $A \cong B$ înseamnă că grupurile A şi B sunt izomorfe iar $R_1 \cong_{top} R_2$ înseamnă că inelele topologice R_1 şi R_2 sunt izomorfe topologic. Evident, teoria inelelor topologice nu face distincţie între inelele topologic izomorfe. Modulele (stângi sau drepte) sunt unitare.

Vom nota prin $\mathrm{End}_c(A)$ inelul tuturor endomorfismelor continue ale unui grup Abelian A. Când A este un grup Abelian local compact (pe scurt, LCA), inelul $\mathrm{End}_c(A)$ împreună cu topologia convergenţei pe compacte este un inel topologic. Grupul aditiv al inelului R este notat cu $R(+)$ iar centrul inelului R va fi notat prin $Z(R)$. Fie $\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ o familie de inele topologice si $S_\alpha \subseteq R_\alpha$ un subinel deschis fixat pentru fiecare $\alpha \in \Omega$. Considerăm subinelul $A \subseteq \prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha$ al produsului Cartezian R_α, $A = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in\Omega} R_\alpha \mid x_\alpha \in S_\alpha$ pentru aproape toate $\alpha \in \Omega\}$ (aproape toate înseamnă toate cu excepţia unui număr finit). Atunci produsul $\prod_{\alpha\in\Omega} S_\alpha$ al inelelor topologice $S_\alpha, \alpha \in \Omega$, defineşte o topologie de inel pe A. Acest inel este numit *produs direct local* a lui R_α faţă de $S_\alpha, \alpha \in \Omega$ şi este notat prin $\prod_{\alpha\in\Omega}(R_\alpha : S_\alpha)$ (vezi [**15**], p. 46) şi ([**56**], p. 211). Este important de menţionat faptul că dacă toate S_α sunt local compacte şi aproape toate S_α sunt compacte, atunci inelul $\prod_{\alpha\in\Omega}(R_\alpha : S_\alpha)$ este local compact. Menţionăm că această construcţie joacă un rol important în teoria algebrică a numerelor (inelele adelelor, grupul idelelor)

Vom aminti o construcţie importantă (dar simplă) din teoria inelelor topologice:

Fie R un inel abstract. Fie S un subinel şi presupunem că pe S este dată o topologie de inel. Fie $A = \{x \in R|$ pentru orice vecinătate U a lui 0_S există o vecinătate V a lui 0_S astfel încât $Vx \subset U, xV \subset U\}$. Atunci A este un inel şi vecinătăţile lui 0_S definesc o topologie de inel . Subinelul A este maximal pentru care vecinătăţile lui S definesc o topologie de inel pe R.

Vom da în continuare definiţiile celor mai importante noţiuni ce intervin în teza dată.

Definiţia 1.1.1. *Un grup Abelian A se numeşte* separabil *dacă orice submulţime finită K este scufundată într-un sumand direct S al grupului A care este sumă directă de grupuri de rangul 1 (*[**27**]*, paragraful 65).*

Definiţia 1.1.2. *Un subgrup B al unui p-grup Abelian G se numeşte* subgrup de bază *dacă el este subgrup pur, dacă este decompozabil în sumă directă de grupuri ciclice şi dacă grupul factor G/B este grup divizibil.*

Definiţia 1.1.3. *Un inel topologic $(R, \mathcal{T})$ se numeşte* aproape mărginit *dacă există o topologie de inel $\mathcal{T}' \le \mathcal{T}$ astfel încât $(R, \mathcal{T}')$ este mărginit.*

Definiţia 1.1.4. *Un inel topologic se numeşte* stâng liniar *dacă are un sistem fundamental de vecinătăţi a lui 0 format din ideale stângi.*

Definiţia 1.1.5. *Inelul topologic se numeşte* local mărginit *dacă el conţine o submulţime deschisă mărginită.*

Definiţia 1.1.6. *Un grup Abelian A se numeşte self-small dacă $Hom(A, -)$ păstrează sumele directe de copii ale lui A.*

Definiţia 1.1.7. *Fie $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, unde $o(e_n) = \infty$. Grupul fără torsiune G se numeşte* îngust *dacă pentru orice homomorfism $\eta : P \to G$ egalitatea $\eta e_n = 0$ are loc pentru aproape toate numerele naturale n.*

Definiţia 1.1.8. *Un ideal P al unui inel R se numeşte* stâng primitiv *dacă este cel mai mare ideal conţinut într-un ideal maximal stâng.*

Definiţia 1.1.9. *Un inel se numeşte* stâng primitiv *dacă* 0 *este un ideal stâng primitiv.*

Definiţia 1.1.10. *Vom spune că idealul P al unui inel R este* prim*, dacă $P \neq R$ şi dacă $AB \subset P$ implică $A \subset P$ sau $B \subset P$, pentru orice ideale A şi B din R.*

Definiţia 1.1.11. *Un inel R se numeşte* prim *dacă* 0 *este un ideal prim.*

Următoarea noţiune este centrală în teoria inelelor:

Definiţia 1.1.12. *Un modul M se numeşte* injectiv *dacă pentru orice şir exact $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B$ şi pentru orice homomorfism $\beta : A \to M$ există un homomorfism $\gamma : B \to M$ astfel încât $\beta = \gamma \circ \alpha$*[**39**].

Definiţia 1.1.13. *Un submodul al unui modul A_R se numeşte* larg *dacă are intersecţie nenulă cu orice submodul nenul al lui A_R*[**39**].

Definiţia 1.1.14. *Un grup topologic Abelian A se numeşte liniar compact, dacă:*

i) topologia lui A este liniară, adică are un sistem fundamental de vecinătăţi în 0 format din subgrupuri.

ii) dacă $\mathfrak{F}$ este o bază de filtru formată din subgrupuri de forma $x + B$, unde B este un subgrup închis, atunci $\cap\mathfrak{F} \neq \emptyset$ (vezi [**43**], [**61**]*).*

Definiţia 1.1.15. *Vom numi* grup de tipul lui Kulikov *partea periodică a grupului* $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$ *($n = 1, 2, \ldots$) unde* B_n *este o sumă directă de grupuri ciclice de ordin* p^n*.*

Definiţia 1.1.16. *Un grup se numeşte* rezidual finit (sau finit aproximabil) *dacă el este subgrup al unui produs de grupuri finite.*

Mulţimea tuturor numerelor cardinale de forma $|\mathcal{B}|$, unde $\mathcal{B}$ este o bază pentru spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$, are cel mai mic element.

Definiţia 1.1.17. *Vom numi* ponderea spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ *cel mai mic număr cardinal din mulţimea numerelor cardinale de forma* $|\mathcal{B}|$*, unde* $\mathcal{B}$ *este o bază a spaţiului topologic şi vom nota acest număr cu* $w((X, \mathcal{T}))$ *sau* $w(X)$*.*

Definiţia 1.1.18. Caracterul unui punct x *al spaţiului topologic* $(X, \mathcal{T})$ *este cel mai mic număr de forma* $|\mathcal{B}(x)|$*, unde* $\mathcal{B}(x)$ *este o bază pentru* $(X, \mathcal{T})$ *în punctul* x*. Acest număr cardinal se notează cu* $\chi(x, (X, \mathcal{T}))$ *sau* $\chi(x, X)$*.*

Definiţia 1.1.19. Caracterul unui spaţiu topologic $(X, \mathcal{T})$ *se defineşte ca fiind supremumul tuturor numerelor* $\chi(x, (X, \mathcal{T}))$ *pentru orice* $x \in X$*. Acest cardinal se va nota cu* $\chi((X, \mathcal{T}))$*.*

Definiţia 1.1.20. *Vom numi* pseudo-caracterul unui punct x *al unui* T_1*-spaţiu topologic* X *cel mai mic număr cardinal de forma* $|\mathcal{U}|$*, unde* $\mathcal{U}$ *este o familie de submulţimi deschise ale lui* X *astfel încât* $\cap\mathcal{U} = \{x\}$*; acest cardinal se notează prin* $\psi(x, X)$*.* Pseudo-caracterul unui T_1-spaţiu *se defineşte ca fiind supremumul tuturor numerelor* $\psi(x, X)$ *pentru* $x \in X$*; acest cardinal se notează prin* $\psi(X)$*.* [**7**]

Definiţia 1.1.21. *Un grup Abelian* E *se numeşte* S-grup *dacă orice submulţime finită* $F \subseteq E$ *se conţine într-un subgrup liber* H *de rang finit şi* H *este sumand direct al lui* E *(vezi* [**11**]*).*

2. Inele de endomorfisme

Pe mulţimea endomorfismelor definite asupra unui grup se introduc operaţiile de adunare respectiv de înmulţire în felul următor:

$(\alpha+\beta)a = \alpha a+\beta a$ şi $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$, pentru orice $a \in A$. În acest mod obţinem un inel asociativ cu identitate numit *inelul de endomorfisme* $\mathrm{End}(A)$ *a lui* A.

Vom prezenta în continuare inelul de endomorfisme al unei sume directe de grupuri. O matrice $[\alpha_{ji}]$ cu elemente din $\mathrm{End}(A)$ se numeşte *convergentă pe coloană* dacă, pentru orice coloană i, suma $\sum_j \alpha_{ji}$ există în topologia finită a lui $\mathrm{End}(A)$.

Fie $A = \oplus_{i\in I} A_i$ o sumă directă şi $\varepsilon_i (i \in I)$ proiecţiile corespunzătoare, considerate ca idempotenţi în $\mathrm{End}(A)$. Orice $a \in A$ poate fi scris sub forma $a = \sum_i \varepsilon_i a$, unde aproape toţi $\varepsilon_i a$ sunt egali cu zero. Pentru $\alpha \in \mathrm{End}(A)$, avem $\alpha a = \sum_i \alpha\varepsilon_i a = \sum_{i,j} (\varepsilon_j \alpha \varepsilon_i) a$. În acest mod, cu orice $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ se poate asocia o $I \times I$-matrice:

$$\phi : \alpha \mapsto [\alpha_{ji}]_{j,i\in I}$$

unde $\alpha_{ji} = \varepsilon_j \alpha \varepsilon_i$. Dacă $\beta \in \mathrm{End}(A)$ şi dacă $[\beta_{ji}]$ cu $\beta_{ji} = \varepsilon_j \beta \varepsilon_i$ fiind matricea corespondentă, atunci matricile asociate cu $\alpha - \beta$ şi $\alpha\beta$ sunt exact matricea diferenţelor $[\alpha_{ji} - \beta_{ji}]$ şi respectiv matricea produs $[\sum_k \alpha_{jk}\beta_{ki}]$ a matricilor $[\alpha_{ji}]$ şi $[\beta_{ji}]$, adică ϕ este un homomorfism de inele.

Din definiţie rezultă că matricea zero poate apărea doar de la endomorfismul nul. Pentru orice indice i, $\alpha\varepsilon_i a = \sum_j \alpha_{ji} a$ există pentru orice $a \in A$, adică matricile $[\alpha_{ji}]$ sunt convergente pe coloană. Invers, dacă $[\alpha_{ji}]_{i,j\in I}$ este o matrice convergentă pe coloană cu $\alpha_{ji} \in \varepsilon_j \mathrm{End}(A)\varepsilon_i$, atunci rezultă că pentru un $\alpha \in \mathrm{End}(\mathrm{A})$

$$\alpha a = \sum_{i,j} \alpha_{ji} a.$$

Dacă vom identifica $Hom(A_i, A_j)$ cu un subgrup $\varepsilon_j \mathrm{End(A)} \varepsilon_i$ a lui End(A) atunci putem obţine următoarea teoremă:

Teorema 1.2.22 ([**27**], Teorema 106.1)**.** *Fie $A = \oplus_{i\in I} A_i$ o descompunere în sumă directă a lui A. Atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este izomorf cu inelul tuturor $I \times I$-matricilor convergente pe coloană*

$$[\alpha_{ji}]_{j,i\in I}, \alpha_{ji} \in Hom(A_i, A_j).$$

3. Topologia finită şi topologia compact-deschisă

Inelele de endomorfisme admit diverse topologii. Fie, de exemplu, α un număr cardinal infinit iar $\mathcal{P}_\alpha$ familia tuturor submulţimilor din A de putere $< \alpha$. Atunci familia $\{T(K)\}_{K\in\mathcal{P}_\alpha}$ definesc o topologie $\mathcal{T}_\alpha$ de inel topologic stâng liniar pe $\mathrm{End}(A)$. Este evident că dacă A va fi un grup Abelian elementar atunci topologiile $\mathcal{T}_\alpha$ formează o mulţime bine ordonată (suficient de mare).

O topologie care joacă un rol important în studierea inelelor de endomorfisme, o vom prezenta în continuare alături de câteva rezultate. Această topologie se numeşte *topologia finită*. Pentru o submulţime finită X a lui A, X-vecinătatea lui $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ este definită în felul următor:

$U_X(\alpha) = \{\eta \in \mathrm{End}(A) | \eta x = \alpha x$ pentru orice $x \in X\}$

În această definiţie $U_X(\alpha) = \cap_{x\in X} U_x(\alpha)$ şi $U_X(\alpha) = \alpha + U_X(0)$. Sau mai convenabil se pot defini vecinătăţile lui 0 astfel:

$U_x = \{\eta \in End(A) | \eta x = 0\}$ pentru orice $x \in A$.

Aceasta topologie este Hausdorff, iar U_x sunt ideale ale lui $\mathrm{End}(A)$.

Teorema 1.3.23 ([**27**], Teorema 107.1)**.** *Inelul de endomorfisme* $\mathrm{End}(A)$ *al unui grup abelian A este complet în topologia finită.*

Observaţia 1.3.24. *Inelul* $\mathrm{End}(A)$ *este discret în următoarele cazuri:*

i) A este finit generat;

ii) A este un grup fără torsiune de rang finit.

Amintim că dacă A este un grup Abelian, p un număr prim, atunci *p-componenta* A_p a lui A este subgrupul

$\{x \in A : \quad \text{există} \quad k \in \mathbb{N}, p^k x = 0\}$.

Teorema 1.3.25. *[*[**27**]*, Teorema 107.4] Inelul de endomorfisme* $\mathrm{End}(A)$*, al unui grup A, este compact în topologia finită, dacă şi numai dacă A este un grup cu torsiune a cărui p-componente sunt sume directe finite de grupuri cociclice.*

Topologia finită pe inelul de endomorfisme al unui grup Abelian se generalizează în cazul grupurilor Abeliene local compacte în modul următor. Se consideră topologia *compact deschisă*, numită altfel *topologia convergenţei pe compacte*. În calitate de bază de vecinătăţi în 0 a inelului $\mathrm{End}_c(A)$ de endomorfisme continue ale grupului A, se iau submulţimile de forma

$$T(K,U) = \{\alpha \in \mathrm{End}_c(A) : \alpha(K) \subseteq U\}$$

unde K este o submulţime compactă a lui A iar U este o vecinătate a lui 0.

Fie ${}_RM$ un R-modul stâng, local compact şi $\mathrm{End}_c({}_RM)$ înzestrat cu topologia compact deschisă (R inel local compact).

Teorema 1.3.26. *[[**56**], Teorema 19.2] $S = \mathrm{End}_c({}_RM)$ este complet.*

Menţionăm că Teorema 1.3.26 generalizează Teorema 1.3.25.

Un inel topologic drept este o pereche $(R, \mathcal{T})$ unde $(R(+), \mathcal{T})$ este grup topologic şi pentru orice $a \in R$, $R \overset{Ra}{\to} R$, $r \mapsto ra$, este o funcţie continuă. Următoarea teoremă prezintă o oportunitate de a studia inele de endomorfisme a unor grupuri Abeliene, prin metode topologice.

Teorema 1.3.27 ([**56**], Teorema 4.21)**.** *Fie M un R-modul stâng şi $\mathfrak{T}$ o topologie compactă pe M. Presupunem că pentru fiecare $r_0 \in R$ aplicaţia $M \to M$, $m \mapsto r_0m$ este continuă. Atunci inelul $S = \mathrm{End}({}_RM)$ a tuturor endomorfismelor, nu neaparat continue pe ${}_RM$ cu topologia finită, este un inel topologic compact drept.*

Corolarul 1.3.28 ([**56**], Corolarul 4.22)**.** *Dacă M este un grup Abelian care admite o topologie compactă de grup, atunci $\mathrm{End}(M)$ admite o topologie de inel compact drept.*

Corolarul 1.3.29 ([**56**], Corolarul 4.23)**.** *Fie p un număr prim şi M un grup Abelian elementar. Dacă există un număr cardinal $\mathfrak{m}$ astfel încât $|M| = 2^{\mathfrak{m}}$, atunci inelul $\mathrm{End}(M)$ admite o topologie de inel compact drept.*

Observaţia 1.3.30. *Dacă A, B sunt două grupuri topologice Abeliene, atunci $\mathrm{End}(A \oplus B)$ conţine o copie izomorfă a lui $\mathrm{End}(A)$.*

CAPITOLUL 2

Mărginirea inelelor topologice de endomorfisme

În teoria spaţiilor vectoriale topologice este bine cunoscută noţiunea de submulţime mărginită.

Această noţiune a fost extinsă pentru inele topologice (vezi, de exemplu, [**33**] p. 44).

Menţionăm rolul important al condiţiei de mulţime mărginită în teoria corpurilor topologice.

O sumbulţime S a unui inel topologic se numeşte *drept mărginită* dacă pentru orice vecinătate U a lui 0 există o vecinătate V a lui 0 astfel încât $V.S \subseteq U$([**32**], [**59**]). Noţiunea de submulţime stâng mărginită a unui inel topologic este dată analog. O submulţime este mărginită dacă este atât drept cât şi stâng mărginită.

Proprietatea unei submulţimi de a fi mărginită nu este absolută în următorul sens: Dacă S este o submulţime mărginită într-un inel topologic R şi $R \subset R'$, atunci S poate să nu fie mărginită în R'.

Ca exemplu fie $\mathbb{R}$ inelul topologic al numerelor reale. Atunci $S = \mathbb{Z}$ este un subinel discret, prin urmare, mărginit, dar S nu este submulţime mărginită în $\mathbb{R}$.

Inelele stâng mărginite (respectiv, drept mărginite, mărginite) admit unele caracterizări interesante:

i) Un inel topologic R este stâng mărginit (respectiv, drept mărginit, mărginit) $\Leftrightarrow$ are un sistem fundamental de vecinătăţi în 0 format din ideale stângi (respectiv, drepte, bilaterale) ale semigrupului multiplicativ $R(\cdot)$. Există şi versiunile locale ale acestui rezultat.

ii) Într-un inel local compact mărginit, $R_0R = RR_0 = 0$ şi inelul factor R/R_0 are un sistem fundamental în 0 format din ideale compacte deschise, unde R_0 este componenta conexă a lui 0 (adică cel mai mare subgrup conex în R care conţine 0).

Rezultate importante despre inele topologice mărginite au fost obţinute în [**33**], [**58**], [**60**].

Mulţimile mărginite sunt importante în clasele de inele topologice care au o familie bogată de submulţimi mărginite. Vom menţiona inelele local compacte şi inelele stâng liniare.

Menţionăm [**5**] următorul exemplu: Dacă A este un grup elementar infinit, atunci $\mathrm{End}(A)$ nu este local mărginit.

Cum inelul $\mathrm{End}(\mathbb{Z})$ este discret, el este mărginit. Prin urmare clasa grupurilor Abeliene pentru care inelele de endomorfisme sunt compacte este o subclasă proprie a clasei grupurilor Abeliene pentru care inelele de endomorfisme sunt mărginite.

Dacă A este un grup "self-small" şi numărabil atunci conform [**10**], Corolarul 2.3 $\mathrm{End}(A)$ este discret, adică inel mărginit. Pentru $A = Z(p^\infty), p \in \mathbb{P}$ inelul $\mathrm{End}(A)$ este mărginit dar conform cu [**10**], Propoziţia 3.1 grupul A nu este "self-small".

1. Preliminarii

Propoziţia 2.1.31. *Dacă un grup Abelian A se descompune într-o sumă directă $A = \oplus_{i\in I} A_i$ de subgrupuri deplin invariante, atunci* $\mathrm{End}(A) \cong_{top} \prod_{i\in I} \mathrm{End}(A_i)$.

Corolarul 2.1.32. *Fie A un grup Abelian cu torsiune, $A = \oplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$ descompunerea sa în componente p-primare. Atunci* $\mathrm{End}(A) \cong_{top} \prod_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{End}(A_p)$.

Observaţia 2.1.33. *Prima parte a Propoziţiei 2.1.31 este enunţată în* [**27**], *Cap. XV, § 106, Exerciţiul 4, (a) şi (b).*

Lema 2.1.34. ([**56**], *Propoziţia 19.21*) *Fie $M = N \oplus N'$ un grup Abelian. Notăm prin pr_N proiecţia lui M pe N. Atunci aplicaţia :* $\varphi : \mathrm{End}(N) \to \mathrm{End}(M)$, $\varphi(\alpha)(m) = \alpha(pr_N(m)), \alpha \in \mathrm{End}(N), m \in M$, *este un izomorfism topologic pe imaginea sa.*

Vom folosi următorul criteriu de compactitate pentru submulţimile inelului de endomorfisme $\mathrm{End}(A)$ a grupului Abelian A:

Teorema 2.1.35. ([**56**], *Teorema 19.4*) *O submulţime $X \subseteq \mathrm{End}(A)$ are închiderea compactă dacă şi numai dacă Xa este finită pentru orice $a \in A$.*

2. Inele mărginite de endomorfisme

Observaţia 2.2.36. *Fie* $R = (R, \mathcal{T})$ *un inel topologic şi* S *un subinel. Dacă* S *este o submulţime mărginită a lui* R*, atunci* $(S, \mathcal{T} \restriction_S)$ *este un inel topologic mărginit.*

Amintim că un inel topologic se numeşte *local mărginit* dacă are o vecinătate mărginită a lui 0. Echivalent: Un inel topologic este local mărginit dacă el are o submulţime nevidă deschisă mărginită.

Lema 2.2.37. *Dacă* $0 \neq A = \bigoplus_{\mathfrak{m}} B$ *unde* $\mathfrak{m}$ *este un număr cardinal infinit, atunci* $\mathrm{End}(A)$ *nu este local mărginit.*

Corolarul 2.2.38. *Fie* A *un grup Abelian fără torsiune şi divizibil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este discret;*

ii) $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit;*

iii) $\mathrm{End}(A)$ *este local mărginit;*

iv) $A \cong \mathbb{Q}^n$*, unde* $n \in \omega$*.*

Observaţia 2.2.39. *Fie* p *un număr prim,* $A = \mathbb{Q} \times Z(p^\infty)$*. Atunci inelul* $\mathrm{End}(A)$ *este nemărginit.*

Teorema 2.2.40. *Fie* A *un grup Abelian divizibil. Atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit* $\Leftrightarrow$ $A \cong \mathbb{Q}^n$ *unde* $n \in \omega$ *sau* $A \cong \oplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ *unde fiecare* A_p *este o sumă directă de un număr finit de copii ale lui* $Z(p^\infty)$*.*

Lema 2.2.41. *Fie* $n \in \omega$ *şi* $Y \subseteq \mathbb{P}$*,* $A = \mathbb{Q}^n \oplus (\bigoplus_{p \in Y} Z(p^\infty)), n \in \omega$*. Atunci inelul* $\mathrm{End}(A)$ *este local compact.*

Teorema 2.2.42. *Fie* A *un grup Abelian divizibil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este local mărginit;*

ii) $A \cong \mathbb{Q}^n \oplus (\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p)$ *unde* $n \in \omega$ *şi fiecare* A_p *este o sumă directă de un număr finit de copii ale grupului* $Z(p^\infty)$*;*

iii) $\mathrm{End}(A)$ *este local compact.*

Corolarul 2.2.43. *Fie A un grup Abelian divizibil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este local mărginit şi nemărginit;*

ii) $A \cong \mathbb{Q}^n \oplus (\bigoplus_{p\in X} A_p)$ *unde* $n \geq 1, \emptyset \neq X \subseteq \mathbb{P}$ *şi fiecare* A_p *este o sumă directă de un număr finit de copii ale grupului* $Z(p^\infty)$;

iii) $\mathrm{End}(A)$ *este local compact şi nemărginit.*

Propoziţia 2.2.44. *Fie A un p-grup redus având proprietatea că pentru fiecare submulţime finită $F \subseteq A$ există un sumand direct B a lui A astfel încât $B \neq A$ şi $F \subseteq B$. Atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este nemărginit.*

Corolarul 2.2.45. *Dacă A este un p-grup infinit redus şi separabil atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este nemărginit.*

Corolarul 2.2.46. *Dacă A este un p-grup infinit şi de exponentă finită atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este nemărginit.*

Corolarul 2.2.47. *Dacă A este un grup elementar infinit sau un grup liber de rang finit, atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este nemărginit.*

Teorema 2.2.48. *Pentru un p-grup redus $A, |A| \leq \omega$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este compact;*

ii) $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit;*

iii) A este finit.

Teorema 2.2.49. *Fie A un grup periodic şi numărabil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este compact;*

ii) $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit;*

iii) $A \cong \oplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$ *unde fiecare* A_p *este o sumă directă finită de grupuri cociclice.*

Teorema 2.2.50. *Dacă A este un grup Abelian periodic şi divizibil atunci submulţimea X a lui* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginită* $\Leftrightarrow \overline{X}$ *este compactă.*

Propoziţia 2.2.51. *Fie $p \in \mathbb{P}, A$ un p-grup Abelian şi B un subgrup de bază a lui A. Dacă* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit, atunci* $|B| \leq \omega$.

Corolarul 2.2.52. *Dacă A este un p-grup Abelian redus pentru care* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit, atunci* $|A| \leq 2^{\omega}$.

Observaţia 2.2.53. *Următoare întrebare legată de subiectul acestei secţiuni rămîne deschisă: Este adevărat că mărginirea inelului* $\mathrm{End}(A)$ *a unui p-grup Abelian redus A implică faptul că A este finit? Teorema 2.2.48 şi Corolarul 2.2.52 arată că dacă există un p-grup redus infinit A pentru care* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginit, atunci* $\omega < |A| \leq 2^{\omega}$.

O clasă importantă de topologii de inel pe $\mathrm{End}(A)$ sunt topologiile admisibile (vezi Capitoul IV, paragraful 7). În teorema următoare noi caracterizăm submulţimile mărginite în $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T}_\lambda)$ (vezi definiţia topologiilor $\mathcal{T}_\lambda$ din paragraful 7). Demonstraţia teoremei a fost inspirată de demonstraţia Teoremei 8 din [**22**].

Teorema 2.2.54. *Fie A un grup elementar sau liber şi λ un număr cardinal infinit. Atunci submulţimea $S \subset$* $\mathrm{End}(A)$ *este mărginită în* $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T}_\lambda)$ *dacă şi numai dacă pentru orice submulţime $A_0 \subset A$, $|A_0| < \lambda$, $|S(A_0)| < \lambda$.*

3. Topologii mărginite şi aproape mărginite pe inele de endomorfisme

În lucrarea [**5**] s-a demonstrat faptul că inelul de endomorfisme al unui p-grup infinit şi mărginit împreună cu topologia finită este nemărginit. În această secţiune demonstrăm, într-un caz mai particular, că inelul de endomorfisme nu admite nici o topologie nediscretă mărginită, totuşi, într-un caz mai general, admite o topologie de inel drept mărginită. Amintim faptul că inelul de endomorfisme al unui grup Abelian este întotdeauna stâng mărginit.

Teorema 2.3.55. *Dacă A este un grup infinit Abelian mărginit atunci inelul său de endomorfisme admite o topologie drept mărginită nediscretă.*

Amintim că un inel topologic $(R, \mathcal{T})$ se numeşte *aproape mărginit* dacă există o topologie mărginită mai grosieră decât $\mathcal{T}$.

Observaţia 2.3.56. *Un inel R nu admite o topologie de inel nediscretă aproape mărginită dacă şi numai dacă nu admite o topologie de inel nediscretă mărginită.*

Teorema 2.3.57. *Fie* $A = \oplus_\tau Z(p^n)$, *unde* n *este un număr natural pozitiv fixat,* $p \in \mathbb{P}$ *şi* τ *un număr cardinal. Atunci* $\mathrm{End}(A)$ *nu admite topologii de inel nediscrete, aproape mărginite.*

Prin urmare putem face următoarea remarcă:

Observaţia 2.3.58. *Inelul de endomorfisme al grupului Abelian* $A = \oplus_\tau Z(p^n)$ *admite atât topologie stâng mărginită cât şi drept mărginită dar nu admite o topologie nediscretă mărginită.*

Teorema 2.3.59. *Fie* D *un inel cu diviziune şi* V *un* D*-spaţiu vectorial drept de dimensiune* ω. *Fie* $R = \mathrm{End}(V)/I$, *unde* I *este alcătuită din endomorfismele de rang finit. Atunci* R *nu admite topologii de inel nediscrete mărginite.*

CAPITOLUL 3

Inele regulate de endomorfisme a grupurilor topologice Abeliene

Clasa inelelor *regulate în sensul lui von Neumann* este o subclasă importantă a inelelor asociative. Amintim că un inel R se numeşte *regulat* în sensul lui von Neumann dacă pentru orice $a \in R$ există $b \in R$ astfel încât $aba = a$. Vom studia următoarele întrebări:

(i) Care sunt grupurile Abeliene topologice în care fiecare imagine a unui endomorfism este sumand direct (în sens topologic)?

(ii) Care sunt grupurile Abeliene local compacte pentru care inelul $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat?

Rangaswamy a enunţat aceleaşi întrebări pentru cazul grupurilor Abeliene abstracte [**46**]. Menţionăm faptul că problema (i) nu are răspuns în clasa grupurilor Abeliene discrete. Vom da o caracterizare a grupurilor Abeliene topologice pentru care inelul $\mathrm{End}_c(A)$ este m-regulat. De asemenea este dată o caracterizare completă a grupurilor Abeliene local compacte cu $\mathrm{End}_c(A)$ regulat (Teorema 3.1.72). Vom da exemple:

(i) de LCA grup $(A, \mathcal{T})$ pentru care $\mathrm{End}(A)$ nu este regulat dar $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat;

(ii) de LCA grup $(A, \mathcal{T})$ pentru care $\mathrm{End}(A)$ este regulat dar $\mathrm{End}_c(A)$ nu este.

Vom da un exemplu de grup Abelian liniar compact a cărui inel de endomorfisme continue este regulat. De asemenea vom indica o topologie de inel pentru $\mathrm{End}_c(A)$ a oricărui grup Abelian liniar compact, topologie analoagă cu topologia convergenţei punctuale.

1. Inele regulate de endomorfisme continue a LCA-grupurilor

Lema 3.1.60. *Fie A un grup Abelian topologic nu neaparat Hausdorff şi $\alpha^2 = \alpha \in \mathrm{End}_c(A)$. Atunci $\operatorname{im}\alpha$ şi $\ker\alpha$ sunt sumanzi direcţi topologici ai lui A.*

Amintim că un element a dintr-un inel se numeşte *m-regulat* (vezi [**27**], p. 239) dacă există un număr întreg pozitiv m astfel încât a^m este regulat. Un inel este *π-regulat* dacă fiecare din elementele lui sunt m-regulate. Un inel se numeşte *m-regulat* dacă toate elementele sale sunt m-regulate pentru un număr fixat m. Următoarea teoremă oferă condiţii necesare şi suficiente pentru un endomorfism α de a fi m-regulat.

Teorema 3.1.61. *Fie A un grup Abelian topologic şi $\alpha \in \mathrm{End}_c(A)$. Atunci α este un element m-regulat dacă şi numai dacă $\operatorname{im}\alpha^{\mathrm{m}}$ şi $\ker\alpha^m$ sunt sumanzi direcţi topologici ai lui A.*

Teorema 3.1.62. *Inelul $\mathrm{End}_c(A)$ a tuturor endomorfismelor continue ale unui grup Abelian topologic A este π-regulat dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha \in \mathrm{End}_c(A)$ există un număr întreg pozitiv m astfel încât $\operatorname{im}\alpha^m$ şi $\ker\alpha^m$ sunt sumanzi direcţi topologici ai lui A.*

Corolarul 3.1.63. *Inelul $\mathrm{End}_c(A)$ a tuturor endomorfismelor continue ale unui grup Abelian topologic A este regulat dacă şi numai dacă imaginea şi nucleul fiecărui endomorfism sunt sumanzi direcţi topologici ai grupului.*

Lema 3.1.64. *Fie A un grup Abelian topologic şi $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat. Dacă $p \in \mathbb{P}, x \in A$, şi $p^2x = 0$ atunci $px = 0$.*

Corolarul 3.1.65. *Dacă A este un grup Abelian topologic, $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat şi A este un p-grup atunci pentru orice $x \in A$, $px = 0$.*

Teorema 3.1.66. *Fie A un LCA-grup fără torsiune. Dacă $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat atunci $\mathrm{End}_c(A)(+)$ este divizibil.*

Corolarul 3.1.67. *Dacă $\mathrm{End}_c(A)(+)$ este divizibil atunci A este un grup divizibil.*

Exemplul 3.1.68. *Fie $p \in \mathbb{P}$ şi $A = \prod_{i\in\omega}(R_i : S_i)$ unde $R_i = \mathbb{Q}_p, S_i = \mathbb{Z}_p$. Atunci $\mathrm{End}_c(A)$ nu este regulat.*

Amintim că un subgrup B a unui grup topologic A se numşte *deplin invariant* dacă $\alpha B \subseteq B$ pentru orice endomorfism continu α a lui A.

Lema 3.1.69. *Dacă A este un LCA grup, descompus în sumă directă $A = A_1 \oplus A_2$ de subgrupuri deplin invariante a lui A atunci* $\mathrm{End}_c(A) \cong_{top} \mathrm{End}_c(A_1) \times \mathrm{End}_c(A_2)$.

Rangaswamy [**46**] a demonstrat că inelul $\mathrm{End}(A)$ unde $A = \mathbb{R} \times \prod_{p\in\mathbb{P}} Z(p)$ nu este regulat. Este interesant de subliniat faptul că dacă vom considera A ca şi grup topologic cu topologia produs unde $\mathbb{R}$ este dată cu topologia uzuală şi fiecare $Z(p)$ cu topologia discretă, atunci $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat.

Vom da acum un exemplu de grup a cărui inel de endomorfisme este regulat dar inelul endomorfismelor continue nu este.

Propoziţia 3.1.70. *Fie $A = Z(p)^{\mathfrak{m}} \oplus (\bigoplus_{\mathfrak{n}} Z(p))$ unde $p \in \mathbb{P}$ şi $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ sunt numere cardinale arbitrare şi infinite. Atunci inelul* $\mathrm{End}_c(A)$ *nu este regulat.*

Observaţia 3.1.71. *Inelul* $\mathrm{End}_c(A)$ *este prim.*

Teorema 3.1.72. *Fie A un LCA grup cu torsiune. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}_c(A)$ *este regulat;*

ii) Există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât subgrupul $\oplus_{i\geq n+1} A_{p_i}$ este discret şi grupul A_{p_i} este un grup compact infinit satisfăcând identitatea $px = 0$.

2. Inele regulate de endomorfisme a modulelor discrete quasi-injective

Următoarea noţiune este analogul modulelor quasi-injective, în module cu topologie. Un R-modul stâng topologic şi discret M se numeşte *quasi-injectiv* dacă orice homomorfism $f : N \to M$, unde N este un submodul a lui M, are o extensie până la un endomorfism a lui M.

Teorema 3.2.73. *Fie I_R un R-modul quasi-injectiv, $S = \mathrm{End}(\mathrm{I_R})$ şi $N = \{\alpha \in S :$ α anulează un submodul larg a lui $I_R\}$.*

Atunci

i) S/N este regulat în sensul lui von Neumann;

ii) N este radicalul lui Jacobson al lui S;

iii) idempotenţii lui S/N pot fi ridicaţi modulo N .

Corolarul 3.2.74. *Fie R un inel compact şi P_R un modul proiectiv drept în categoria modulelor profinite peste R, iar $S = \mathrm{End}_c(A)$ inelul endomorfismelor continue cu topologia compact-deschisă. Atunci:*

i) $S/J(S)$ este regulat;

ii) idempotenţii lui $S/J(S)$ pot fi ridicaţi modulo $J(S)$.

Definiţia 3.2.75. *Fie M_R un R-modul drept discret.*

Două elemente m, m' au acelaşi ordin dacă modulele mR şi $m'R$ sunt izomorfe.

Teorema 3.2.76. *Fie I_R un modul quasi-injectiv. Atunci S este compact dacă şi numai dacă pentru orice $m \in I_R$ mulţimea elementelor m' având acelaşi ordin cu m este finită.*

3. Grup Abelian liniar compact pentru care $\mathrm{End}_c(A)$ este regulat

Următoarea afirmaţie este bine cunoscută:

Dacă A este un grup liniar compact, B şi C sunt două subgrupuri închise, atunci descompunerea $A = B \oplus C$ este topologică.

Considerăm aplicaţia $B \times C \to A, (b, c) \mapsto b + c$. Această aplicaţie este un izomorfism continu cum $B \times C$ este liniar compact şi deschis, adică izomorfism topologic.

Fie $A = {\mathbb{Q}_p}^{\alpha}$ unde α este un număr cardinal, $p \in \mathbb{P}$ şi $\mathbb{Q}_p$ grupul aditiv al corpului local compact al numerelor p-adice.

Lema 3.3.77. *Orice subspaţiu $\mathbb{Q}_p a, a \in A$ este un sumand direct topologic.*

Lema 3.3.78. *Dacă B este un subspaţiu vectorial închis a lui A atunci B este un sumand direct topologic.*

Lema 3.3.79. *Dacă $\alpha \in \mathrm{End_c(A)}$, atunci α este un endomorfism a unui $\mathbb{Q}_p$-spaţiu vectorial.*

Lema 3.3.80. *Dacă* $\alpha \in \mathrm{End}_c(A)$, *atunci* $\mathrm{im}\alpha$ *şi* $\ker\alpha$ *sunt* $\mathbb{Q}_p$*-subspaţii închise a lui* A.

Teorema 3.3.81. $\mathrm{End_c(A)}$ *este un inel regulat, unde* $A = {\mathbb{Q}_p}^{\alpha}$.

Fie A un grup Abelian liniar compact. Notăm pentru fiecare subgrup deschis V a lui A şi pentru orice subgrup liniar compact K a lui A, $T(K, V) = \{\alpha \in \mathrm{End}_c(A) : \alpha(K) \subset V\}$.

Teorema 3.3.82. *Fie* A *un grup Abelian liniar compact. Atunci familia* $\{T(K, V)\}$, *unde* V *şi* K *parcurg subgrupurile deschise ale lui* A *dau o topologie de inel pentru* $\mathrm{End}_c(A)$. *Această topologie se numeşte "topologia liniar compactă deschisă".*

Întrebare: Să se clasifice toate idealele închise stângi (bilaterale) a lui $\mathrm{End}_c(\mathbb{Q}_p^{\alpha})$, unde p este un număr prim şi α este un cardinal.

CAPITOLUL 4

Inele de endomorfisme cu vecinătăţi speciale ale lui 0

Există o legătură subtilă între proprietăţile locale şi globale ale unui inel topologic. De exemplu, un inel topologic conex este comutativ dacă şi numai dacă are o vecinătate comutativă a lui zero. Relaţiile ce apar între proprietăţile locale şi cele globale ale unui inel topologic sunt mai slabe în cazul inelelor disconexe.

În acest capitol studiem conexiunile ce apar între proprietăţile vecinătăţilor lui 0 ale lui $\mathrm{End}(A)$ şi proprietăţile lui globale. Vom arăta ca deşi inelele de endomorfisme ale grupurilor Abeliene sunt total disconexe, există o relaţie strânsă între proprietăţile locale şi globale ale acestora.

O noţiune fundamentală în teoria inelelor topologice este aceea de Q-inel (vezi, de exemplu,[**32**]). Importanţa acestui concept stă în următoarea proprietate a Q-inelelor: într-un Q-inel orice ideal modular maximal stâng (drept) este închis [**56**]. În cazul inelelor necomutative această noţiune se împarte în trei: Q_r-inel, Q_l-inel şi Q-inel. Nu este cunoscut (2010; vezi, [**32**]) dacă aceste trei noţiuni sunt echivalente. Noi demonstrăm că în cazul inelelor topologice de endomorfisme acestea coincid (de fapt rezultatul demonstrat este mai general). De asemenea sunt studiate diferite proprietăţi asupra vecinătăţilor lui zero a inelelor topologice de endomorfisme.

Vom demonstra, spre exemplu, faptul că $\mathrm{End}(A)$ este un Q-inel (i.e., are o vecinătate a lui 0 formată din elemente quasiregulate) dacă şi numai dacă radicalul lui Jacobson este deschis. Evident, proprietatea aceasta nu caracterizează grupurile Abeliene pentru care radicalul lui Jacobson al inelelor de endomorfisme este deschis. Motivaţi de acest rezultat, vom indica unele proprietăţi suficiente pentru ca radicalul lui Jacobson al inelului de endomorfisme al unui grup Abelian să fie deschis. Menţionăm că este puţin probabil de obţinut clasificarea grupurilor Abeliene A pentru care $J(\mathrm{End}(A))$ este deschis. Într-adevăr nu se cunoaşte clasificarea grupurilor

Abeliene pentru care $\mathrm{End}(A)$ este discret. Inelul $\mathrm{End}(A)$ a unui p-grup redus are o vecinătate a lui 0 fără elemente nenule nilpotente dacă şi numai dacă A este finit.

1. Q-inele de endomorfisme

Un inel topologic $(R, \mathcal{T})$ este Q_l-inel(Q_r-inel; Q-inel) dacă şi numai dacă 1 are o vecinătate din elemente stâng inversabile (drept inversabile; inversabile).

Amintim că un inel topologic $(R, \mathcal{T})$ cu unitate se numeşte *inel Gelfand* ([**15**], Exerciţiul 11, p. 110) dacă mulţimea elementelor quasi-regulate este deschisă şi $(R, \mathcal{T})$ este un inel cu inversul continu.

Teorema 4.1.83. *Fie R un inel topologic stâng mărginit. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) R este un Q_l-inel;

ii) R este un Q_r-inel;

iii) R este un Q-inel;

iv) R este un inel Gelfand;

v) $J(R)$ este deschis.

Corolarul 4.1.84. *Fie A un grup Abelian. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *este un Q_l-inel;*

ii) $\mathrm{End}(A)$ *este un Q_r-inel;*

iii) $\mathrm{End}(A)$ *este un Q-inel;*

iv) $\mathrm{End}(A)$ *este un inel Gelfand;*

v) $J(\mathrm{End}(A))$ *este deschis.*

Exemplul 4.1.85. *Fie $\mathbb{Q}$ corpul numerelor raţionale. Atunci mulţimea $\mathfrak{B}$ a tuturor subgrupurilor nenule ale grupului aditiv a lui $\mathbb{Q}$ definesc pe $\mathbb{Q}$ o topologie de inel. Inelul $(\mathbb{Q}, \mathcal{T})$ este un Q-inel, dar inversul nu este continu.*

2. Vecinătăţi speciale ale inelelor de endomorfisme

Vom începe cu cazul inelelor discrete.

Teorema 4.2.86. *Fie $A = \oplus_{i\in I} A_i$ unde $A_i \neq 0$ şi I este infinită. Atunci inelul* $\mathrm{End}(A)$ *este nediscret.*

Următoare Teoremă ne arată că clasa inelelor topologice de endomorfisme nediscrete este mare.

Teorema 4.2.87. *Inelul* $\mathrm{End}(A)$ *pentru un grup Abelian cu torsiune A este discret dacă şi numai dacă A este finit.*

Teorema 4.2.88. *Fie A un p-grup separabil. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\mathrm{End}(A)$ *are o vecinătate fără elemente topologic nilpotente nenule;*

ii) $\mathrm{End}(A)$ *are o vecinătate fără elemente nilpotente nenule;*

iii) A este finit.

Corolarul 4.2.89. *Dacă A este un p-grup Abelian separabil şi* $\mathrm{End}(A)$ *are o vecinătate a lui* 0 *fără zero-divizori, atunci A este finit.*

Teorema 4.2.90. *Dacă A este un grup Abelian separabil şi* $\mathrm{End}(A)$ *are o vecinătate comutativă a lui* 0, *atunci A este finit.*

Teorema 4.2.91. *Dacă A este un grup Abelian cu torsiune şi* $\mathrm{End}(A)$ *are o vecinătate a lui* 0 *nilpotentă, atunci A este o sumă directă finită de p-grupuri.*

3. Condiţii suficiente în care $\mathrm{End}(A)$ este Q-inel

Teorema 4.1.83 nu oferă informaţii despre grupurile a căror inele de endomorfisme sunt Q-inele. În acest paragraf sunt date câteva afirmaţii despre structura grupurilor Abeliene A pentru care $\mathrm{End}(A)$ este un Q-inel.

Lema 4.3.92. *Fie p un număr prim şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci radicalul lui Jacobson al inelului* $\mathrm{End}(A)$, *unde $A = \oplus_\omega Z(p^n)$, nu este deschis.*

Teorema 4.3.93. *Fie A un p-grup redus şi $J(\mathrm{End}(A))$ este deschis. Dacă $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B_{p^n}$ este un subgrup de bază şi $B_{p^n} = \oplus_{m_n} Z(p^n)$, atunci fiecare număr cardinal m_n este finit.*

Corolarul 4.3.94. *Dacă A este un p-grup redus, şi $J(\mathrm{End}(A))$ este deschis, atunci $|A| \leq 2^\omega$.*

Teorema 4.3.95. *Dacă A este un grup Abelian periodic şi divizibil atunci $J(\mathrm{End}(A))$ este deschis dacă şi numai dacă A este o sumă directă finită de grupuri de tipul p^∞.*

Teorema 4.3.96. *Dacă A este un p-grup redus separabil atunci $J(\mathrm{End}(A))$ este deschis dacă şi numai dacă A este finit.*

Teorema 4.3.97. *Fie A un grup cu torsiune. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathrm{End}(A)$ *nu are ideale topologic nilpotente;*

(ii) *A este o sumă directă de grupuri elementare.*

Corolarul 4.3.98. *Dacă A este un grup cu torsiune şi* $\mathrm{End}(A)$ *nu are ideale topologic nilpotente atunci* $\mathrm{End}(A)$ *este un inel semi-simplu stâng liniar compact.*

În acest caz $\mathrm{End}(A)$ este un produs de inele matriciale peste corpuri finite $\mathbb{F}_p$, $p \in \mathbb{P}$ şi inele $\mathrm{End}(V)$ unde V este un grup elementar.

Corolarul 4.3.99. *Dacă A este un grup cu torsiune şi* $\mathrm{End}(A)$ *nu are ideale topologic nilpotente atunci centrul inelului* $\mathrm{End}(A)$ *este discret dacă şi numai dacă A are exponentă finită.*

4. Caracterul şi pseudo-caracterul în inele de endomorfisme

Două noţiuni fundamentale ale topologiei generale sunt caracterul şi pseudo-caracterul unui punct al unui spaţiu topologic. Noţiunea de pseudo-caracter al unui punct a spaţiului topologic a fost introdusă de Aleksandrov şi Urysohn în lucrarea clasică "Memoire sur les espaces topologiques compacts" [**8**]. În această secţiune noi vom studia următoarele întrebări:

1) Cum se exprimă caracterul lui $\mathrm{End}(A)$ prin invarianţii grupului A?

2) Cum se exprimă pseudo-caracterul lui $\mathrm{End}(A)$ prin invarianţii grupului A?

3) În ce condiţii pseudo-caracterul inelului topologic $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T})$ coincide cu caracterul?

Lema 4.4.100. *Fie $A = \oplus_{\alpha<\tau} A_\tau$ o descompunere a unui grup Abelian A într-o sumă directă de subgrupuri nenule, unde τ este un cardinal infinit. Dacă $\chi(\mathrm{End}(A)) \leq \beta$, unde β este un număr cardinal, atunci $\tau \leq \beta$.*

Corolarul 4.4.101. *Fie A un grup Abelian care este o sumă directă de grupuri nenule de cardinalitate $\leq \omega$ şi τ un cardinal infinit. Atunci $\chi(\mathrm{End}(A)) \leq \tau$ dacă şi numai dacă $|A| \leq \tau$.*

Corolarul 4.4.102. *Dacă D este un grup nenul divizibil, atunci $\psi(\mathrm{End}(D)) = \chi(\mathrm{End}(D)) = |D|$.*

Propoziţia 4.4.103. *Dacă A este un grup nenul de cardinalitate $\leq \omega$ şi τ un număr cardinal infinit , atunci $\psi(\mathrm{End}(\oplus_\tau A)) = \chi(\mathrm{End}(\oplus_\tau A)) = \tau$.*

Corolarul 4.4.104. *Dacă A este un grup cu torsiune, τ un număr cardinal şi $\chi(\mathrm{End}(A)) \leq \tau$, atunci $|A| \leq 2^\tau$.*

Teorema 4.4.105. *Fie A grupul lui Kulikov. Atunci $\chi(\mathrm{End}(A)) = 2^\omega$ şi $\psi(\mathrm{End}(A)) = \omega$.*

Lema 4.4.106. *Fie A un p-grup redus şi τ un număr cardinal infinit. Atunci $\psi(\mathrm{End}(A)) \leq \tau$ dacă şi numai dacă cardinalitatea fiecărui subgrup de bază a lui A este $\leq \tau$.*

Teorema 4.4.107. *Fie $A = \oplus_{p\in\mathbb{P}} A_p$ un grup infinit cu torsiune, unde A_p este un subgrup p-primar a lui A. Fixăm pentru fiecare $p \in \mathbb{P}$ o descompunere $A_p = S_p \oplus D_p$, unde D_p este subgrupul divizibil maximal şi S_p este un grup redus, şi fie τ un număr cardinal infinit. Atunci $\psi(\mathrm{End}(A)) \leq \tau$ dacă şi numai dacă $|D_p| \leq \tau$ şi pentru fiecare subgrup de bază B_p a lui S_p avem $|B_p| \leq \tau$.*

Corolarul 4.4.108. *Fie A un grup cu torsiune infinit. Atunci $\psi(\mathrm{End}(A)) = \omega$ dacă şi numai dacă $A = (\oplus_{p\in\mathbb{P}} Z_p) \oplus D$ unde D este un subgrup divizibil cu $|D| = \omega$ sau $D = 0$ şi fiecare subgrup de bază a lui $Z_p, p \in \mathbb{P}$ este finit sau numărabil.*

Observaţia 4.4.109. *Dacă $A = \oplus_{i\in I} A_i$ unde $0 < |A_i| \leq \omega$ şi I este infinit, atunci $\psi(\mathrm{End}(A)) = \chi(\mathrm{End}(A)) = |I|$.*

Teorema 4.4.110. *Fie $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ grupul Baer-Specker. Atunci $\chi(\mathrm{End}(A)) = 2^\omega$ şi $\psi(\mathrm{End}(A)) = \omega$.*

5. O clasă de inele prime de endomorfisme continue

În paragraful dat vom considera un inel "standard" de endomorfisme continue. Vom arăta că acest inel este prim şi vom construi cu ajutorul lui un exemplu legat de noţiunea de inel topologic de fracţii. De obicei inelul de fracţii al unui inel este prim. În teoria inelelor de fracţii primalitatea inelului joacă un rol important deşi nu e decisivă, deoarece inelul complet de fracţii în sensul lui Utumi există pentru orice inel cu unitate.

Teorema 4.5.111. *Fie $p \in \mathbb{P}$ un număr prim şi A un LCA grup cu $pa = 0$ pentru orice $a \in A$. Atunci $\mathrm{End}_c(A)$ este un inel prim.*

Observaţia 4.5.112. *Fie A un inel topologic prim, în sensul abstract. Dacă B este dens în A, atunci B este prim.*

Vom prezenta o construcţie generală în teoria inelelor topologice (asociativitatea nu se presupune). Deşi, aparent, construcţia nu este complicată, cu ajutorul ei se obţin exemple importante de inele şi module. De exemplu noţiunea de modul injectiv în categoria modulelor topologice se obţine cu ajutorul procedurii descrise mai jos:

Fie R un inel arbitrar şi S un subinel. Presupunem că pe S este dată o topologie $\mathcal{T}$ de inel. Considerăm submulţimea $R' = \{x \in R : \text{pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } 0_S \text{ există } U \text{ o vecinătate a lui } 0_S \text{ astfel încât } xU \subset V \text{ şi } Ux \subset V\}$ (în cazul în care $\mathcal{T}$ este topologie de inel drept topologic $R' = \{x \in R : \text{pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } 0_S \text{ există } U \text{ o vecinătate a lui } 0_S \text{ astfel încât } xU \subset V\}$). Ne vom opri asupra cazului modulelor: Fie R şi S două module topologice drepte asupra unui inel topologic E. Atunci $R' = \{x \in R : \text{pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } 0_S \text{ exsită } U \text{ o vecinătate a lui } 0_E \text{ astfel încât } xU \subset V$. Vom menţiona că inelul adelelor asociat unei extensii finite a lui $\mathbb{Q}$ sau lui $K[X]$ unde K este un corp finit, se obţine în acest mod.

Fie R un inel asociativ şi $Q(R)$ inelul de fracţii al lui Utumi asociat lui R. Dacă R este inel topologic atunci analogul lui $Q(R)$ poate fi definit în diverse moduri. Vom menţiona metoda propusă de Johnson:

Extindem inelul R în $Q(R)$ prin metoda descrisă mai sus. Inelul obţinut se notează cu $Q'(R)$. Vom ilustra această noţiune prin următorul exemplu:

Fie p un număr prim iar $A = Z(p)^\omega \oplus (\bigoplus_\omega Z(p))$. Considerăm inelul $\mathrm{End}_c(A)$ cu topologia convergenţei pe compacte. Acest inel se scufundă în inelul $\mathrm{End}(A)$ unde A este considerat ca un grup discret. Este cunoscut că inelul $\mathrm{End}(A)$ coincide cu inelul său de fracţii (inelele care coincid cu inelul său de fracţii se numesc inele Kasch). Din structura grupului A rezultă că familia $\{T(K, V)$: unde K şi V sunt subgrupuri compacte deschise$\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale inelului topologic $\mathrm{End}_c(A)$. În cele ce urmează vom demonstra că $Q'(\mathrm{End}_c(A)) \neq \mathrm{End}_c(A)$.

Într-adevăr notăm generatorul lui $Z(p)_i$ din primul sumand prin x_i iar al doilea prin x'_i. Este evident că familia $\{(x_i)_{i\in\omega}\}$ este liniar independentă asupra lui $\mathbb{F}_p$. Considerăm $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ definit prin relaţia $\alpha(x_i) = (x_i, x'_i)$ unde $i \in \omega$. Vom arăta că nu există o vecinătate U a lui $0_{\mathrm{End}_c(A)}$ astfel încât $U\alpha \subset T(K, K)$ unde $K = Z(p)^\omega$. Putem considera că U are forma $T(K_1, K_2)$ unde $K_1 = \prod\limits_{i=n}^{\infty} Z(p)_i$ iar $K_2 = K \oplus (\bigoplus\limits_{i=1}^{m} Z(p)_i)$, unde $m \geq n$. Definim $\beta \in \mathrm{End}(A)$ prin relaţia $\beta(K_2) = 0$ şi $\beta \restriction_{\bigoplus\limits_{j=m+1}^{\infty} Z(p)_j} = id_{\bigoplus\limits_{j=m+1}^{\infty} Z(p)_j}$. Atunci $\beta\alpha(x_{m+1}) = \beta(x_{m+1} + x'_{m+1})$
$= x'_{m+1} \neq 0$, contradicţie.

6. Inele topologice de endomorfisme cu topologii minimale

Noţiunea de spaţiu topologic minimal a fost pentru prima oară introdusă de către A. S. Parhomenko [**45**] în 1939 când a demonstrat că spaţiile compacte Hausdorff sunt minimale. Amintim că un spaţiu topologic Hausdorff $(X, \mathcal{T})$ se numeşte *minimal* dacă nu există o topologie Hausdorff pe X mai grosieră decât $\mathcal{T}$. Vom studia în acest paragraf următoarea întrebare: Fie M_R un modul unitar drept peste inelul R. În ce condiţii asupra lui M_R inelul $\mathrm{End}(M_R)$ împreună cu topologia finită este un inel topologic minimal? Este dat un răspuns pozitiv pentru modulele libere peste inele finite.

Amintim [**13**] că un subinel H al unui inel topologic R se numeşte *esenţial* dacă $I \cap H \neq 0$ pentru orice ideal închis $I \neq 0$.

Următoarea Teoremă a fost demonstrată pentru grupuri compacte de către R.M. Stephenson [**55**] în 1971 şi generalizată la cazul algebrelor de Banaschewski [**13**] în 1974. Vom da în continuare demonstraţia în cazul inelelor topologice:

Teorema 4.6.113. *Fie* $(R, \mathcal{T})$ *un inel topologic Hausdorff şi* H *un subinel dens. Atunci* $(H, \mathcal{T}\restriction_H)$ *este minimal* $\Leftrightarrow$ $(R, \mathcal{T})$ *este minimal şi* H *este esenţial în* R.

Următoarea Teoremă ne oferă o clasă de inele topologice minimale.

Teorema 4.6.114. *Fie* M_R *un* R*-modul liber peste un inel finit cu unitate şi* $N := \{q \in \mathrm{End}(M_R) : |\mathrm{im} q| < \infty\}$. *Dacă* P *este un subinel a lui* $\mathrm{End}(M_R)$, $N \subseteq P \subseteq \mathrm{End}(M_R)$ *şi* $\mathcal{T}_0$ *este topologia finită pe* $\mathrm{End}(M_R)$, *atunci* $(P, \mathcal{T}_0\restriction_P)$ *este minimal.*

7. Topologii admisibile pe inele de endomorfisme

Fie A un grup Abelian şi $\mathrm{End}(A)$ inelul său de endomorfisme. Atunci ${}_{EndA}A$ este un modul stâng topologic discret unde $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T}_0)$ este inel topologic şi $\mathcal{T}_0$ este topologia finită. O topologie de inel nediscretă $\mathcal{T}$ pe $\mathrm{End}(A)$ se numeşte *admisibilă* dacă ${}_{EndA}A$ este un modul topologic unde A este înzestrat cu topologia discretă [**24**]. Evident, o topologie de inel $\mathcal{T}$ este admisibilă dacă $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_0$.

În acest paragraf vom da o clasă de topologii de inel admisibile $\mathcal{T}_\lambda$, pe inelul de endomorfisme a unui grup Abelian infinit. De asemenea vom da exemplu de topologie de inel nediscretă Hausdorff care nu este comparabilă cu cea finită, prin urmare nu este admisibilă. Vom construi o topologie de inel admisibilă, diferită de topologiile $\mathcal{T}_\lambda$.

Introducem noţiunea de topologie de grup admisibilă pe $\mathrm{End}(A)$ şi arătăm o construcţie de astfel de topologie.

Considerăm A un grup Abelian infinit şi $|A| = \tau$. Fixăm un număr cardinal infinit $\lambda \leq \tau$. Vom lua ca sistem fundamental de vecinătăţi a lui 0 pentru o topologie de inel $\mathcal{T}_\lambda$ pe $\mathrm{End}(A)$ familia idealelor stângi $\{T(K)\}$ unde $|K| < \lambda$.

Obţinem astfel o mulţime bine ordonată de topologii admisibile.

Teorema 4.7.115. *Pentru orice* $\lambda \leq \tau$ *infinit, inelul topologic* $(\mathrm{End}(A), \mathcal{T}_\lambda)$ *este complet.*

În ceea ce urmează A este un grup elementar şi I este mulţimea tuturor $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ cu $\mathrm{im}\alpha$ finită. Familia $\mathfrak{B} = \{Ann_r(U)\}$ unde U parcurge toate submulţimile finite ale lui I, ne dă pe $\mathrm{End}(A)$ o topologie Hausdorff nediscretă de inel.

Dacă $K \subset_f A$, atunci cum End(A) este inel regulat în sensul lui von Neumann, End$(A)K$ = End$(A)\alpha$ pentru un $\alpha \in$ End(A) (vezi Lema lui von Neumann, [**39**], p. 68). Evident, dacă $K \subset I$, atunci $\alpha \in I$. Prin urmare, dacă $K \subset I$, atunci $Ann_r(K) = Ann_r(\alpha)$ pentru un $\alpha \in I$.

Teorema 4.7.116. *Topologia dată de familia $\mathfrak{B}$ nu este comparabilă cu topologia finită, adică nu este admisibilă.*

Observaţia 4.7.117. *Fie $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ o familie de topologii admisibile. Atunci $\mathcal{T} = \vee_{i\in I}\mathcal{U}_i$ este o topologie admisibilă.*

Observaţia 4.7.118. *Există o topologie Hausdorff nediscretă maximală.*

Amintim [**44**] că o topologie functorială pe categoria A a tuturor grupurilor Abeliene este un functor T de la A la categoria grupurilor topologice Abeliene astfel încât TA este grupul A cu o topologie T_A şi fiecare homomorfism este continu.

În ceea ce urmează vom da un exemplu de topologie admisibilă diferită de topologiile $\mathcal{T}_\lambda$.

Fie A grupul numărabil liber şi p un număr prim. Familia $\{p^nA\}_{n\in\omega}$ ne dă o topologie de grup functorială nediscretă $\mathcal{U}_p$ pe A. Fie $\mathcal{K}$ familia tuturor submulţimilor nevide compacte din $(A,\mathcal{U}_p)$. Notăm cu $\mathcal{V}$ topologia de grup dată de baza de filtru $\{T(K)\}_{K\in\mathcal{K}}$.

Grupul $(A,\mathcal{V})$ este complet. Afirmăm că $\mathcal{V}$ este o topologie de inel. Într-adevăr, fie $\alpha \in$ End(A) şi $K \in \mathcal{K}$. Cum orice endomorphism a lui A este continu în raport cu topologia $\mathcal{V}$, $\alpha K \in \mathcal{K}$ şi $T(\alpha K)\alpha \subset T(K)$. Am demonstrat că topologia $\mathcal{V}$ este topologie de inel, prin urmare este admisibilă. Ne rămâne de demonstrat că $\mathcal{V}$ este diferită de topologia finită $\mathcal{T}_0$. Fie $\{x_n\}_{n\in\omega}$ o familie de generatori. Atunci mulţimea $K = \{0\} \cup \{2^nx_n : n \in \omega\}$ este compactă. Afirmăm că $T(K)$ nu este deschisă în topologia finită. Presupunem contrariul şi anume că există o submulţime finită N a lui A astfel încât $T(N) \subset T(K)$. Putem presupune fără a pierde din generalitate că $N = \{x_0, \dots, x_n\}$, unde $n \in \omega$.

Luăm $\alpha \in$ End$(A), \alpha(x_i) = 0$ pentru $i = 0, \dots, n$ şi $\alpha(x_{n+1}) = x_{n+1}$. Atunci $\alpha \in T(N)$ şi cum $\alpha(2^{n+1}x_{n+1}) = 2^{n+1}x_{n+1} \neq 0, \alpha \notin T(K)$, contradicţie.

O topologie de grup $\mathcal{T}$ pe $\mathrm{End}(A)$ se numeşte admisibilă dacă $\mathcal{T}_0 \leq \mathcal{T}$, unde $\mathcal{T}_0$ este topologia finită.

Amintim că un ultrafiltru $\mathfrak{F}$ asupra unui grup topologic X se numeşte *ultrafiltru fix* dacă există $x \in X$ astfel încât $\mathfrak{F} = \{A \subset X : x \in A\}$.

Fie A un grup Abelian şi $\mathfrak{F}$ un ultrafiltru care nu este fix pe A. Familia $\mathfrak{B} = \{T(A \setminus Y)\}_{Y \in \mathfrak{F}}$ unde $T(A \setminus Y) = \{\alpha \in \mathrm{End}(A) : \alpha(A \setminus Y) = 0\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi a lui 0 în $\mathrm{End}(A)$.

Propoziţia 4.7.119. *Topologia pentru care $\mathfrak{B}$ este un sistem fundamental de vecinătăţi a lui 0, este o topologie admisibilă de grup pe* $\mathrm{End}(A)$.

Bibliografie

[1] H. F. Abrudan: *On Regular Endomorphism Rings of Topological Abelian Groups*, acceptat spre publicare la "Czechoslovak Mathematical Journal".

[2] H. F. Abrudan: *Topological endomorphism rings with minimal topologies*, Automation, Computers, Applied Mathematics **19**(2010), 33-36.

[3] H. F. Abrudan: *Bounded topologies on endomorphism rings*, acceptat spre publicare la "Creative Mathematics".

[4] H. F. Abrudan: *Admissible topologies on endomorphism rings*, acceptat spre publicare la "Carpathian Journal of Mathematics".

[5] H. F. Abrudan, M. Ursul: *Boundedness of topological endomorphism rings of torsion Abelian groups*, Contr. to Gen. Algebra **17** (2006), 1-8.

[6] H. F. Abrudan, M. Ursul: *Endomorphism rings with special neighborhoods of zero*, trimis spre publicare la Algebra Colloquium.

[7] P. S. Aleksandrov: *Uber die Struktur der bikompakten topologischen Raume*, Math. Ann., **92** (1924), 267-274.

[8] P. S. Aleksandrov, P. Urysohn: *Memoire sur les espaces topologiques compacts*, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., Amsterdam,(1929).

[9] A. Z. Anan'in: *On representability of a finite local ring*, J. of Algebra, **228** (2000), 417-427.

[10] D. M. Arnold, C. E. Murley: *Abelian groups, A, such that HOM(A,-) preserves direct sums of copies of A*, Pacific J. Math. **56** (1975), 7-20.

[11] L. Ausenhofer: *A duality property of an uncountable product of* $\mathbb{Z}$, Mathematische Zeitschrift. **257** (2007), 231-237.

[12] R. Baer: *The decomposition of abelian groups into direct summands*, Quart. J. Math. Oxford **6** (1935), 222-232.

[13] B. Banaschewski: *Minimal topological algebras* Math. Ann., **211** (1974), 107-114.

[14] G. Bergman: *Some examples in PI-ring theory*, Isr. J. Math. **18** (1974), 257.

[15] N. Bourbaki: *Obscaia topologia. Topologiceskie gruppy. Cisla i sviazannye s nimi gruppy i prostranstva*, Izdatelstvo "Nauka", Moskva, (1969).

[16] S. Brenner, M. C. R. Butler: *Endomorphism rings of vector spaces and torsion free abelian groups*, J. London Math. Soc. **40** (1965), 183-187.

[17] B. Brown, N. H. McCoy: *The Maximal Regular Ideal of a Ring*, Proc. Am. Math. Soc. **1** (1950), 165-171.

[18] A. V. Budanov: *On the Jacobson Radical of the Endomorphism Ring of a Homogeneous Separable Group*, Mat. Zametki **87** (2010), 133-136.

[19] A. L. S. Corner: *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*, Proc. London Math Soc. **13** (1963), 687-710.

[20] A. L. S. Corner: *Endomorphism rings of torsion-free abelian groups*, Proc. Internat. Conf. Theory Groups, (New York, London, Paris), (1967), 59-69.

[21] A. L. S. Corner: *Endomorphism algebras of large modules with distinguished submodules*, J. Algebra **11** (1969), 155-185.

[22] A. I. Costash, M. Ursul: *Bounded Subsets in Some Topological Rings*, Buletinul A.S. a Republicii Moldova (1995), 36-42.

[23] P. C. Eklof: *Set theoretic methods in homological algebra and Abelian groups*, Les Presses de L'Universite de Montreal, Montreal, (1980).

[24] R. Engelking: *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, (1989).

[25] C. Faith: *Rings and Things and a Fine Array of Twentieth Century Associative Algebra*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 65 American Mathematical Society (1999).

[26] L. Fuchs: *Infinite Abelian groups*, Vol. I, Academic Press, New York, (1970).

[27] L. Fuchs: *Infinite Abelian groups*, Vol. II, Academic Press, New York, (1973).

[28] L. Fuchs, K. M. Rangaswamy: *On generalized regular rings*, Math. Zeitschr. **107** (1968), 71-81.

[29] S. Glaz, W. Wickless: *Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian Groups*, Communications in Algebra **22** (1994), 1161-1176.

[30] K. R. Goodearl: *von Neumann Regular Rings*, 2nd ed., Krieger Publishing Company, Malabar, (1991).

[31] M. Hall: *The theory of groups*, New York,(1959).

[32] I. Kaplansky: *Topological rings*, Amer. J. Math. **69**(1947), 153-183.

[33] I. Kaplansky: *Selected papers and other writings*, Springer Verlag, (1995).

[34] Z. M. Kishkina: *Endomorphisms of p-primitive torsion-free abelian groups [Russian]*, Izv. Akad. Nauk SSSR **9**(1945), 201-232.

[35] M. Krol: *The automorphisrn groups and endomorphism rings of torsion-free abelian groups of rank two*, Dissertationes Math **55**(1967), 153-183.

[36] A. G. Kurosh: *Lectii po obscei algebre*, Nauka, Moscow, (1973).

[37] A. G. Kuros: *Teoria Grupurilor*, Editura Tehnica, Bucuresti, (1959).

[38] T. Lam: *A First Course in Noncommutative Rings*, Second Edition, Springer Verlag, (2001).

[39] J. Lambek: *Lectures on Rings and Modules*, Chelsea Publishing Company, New York, (1986).

[40] W. Liebert: *Charakterisierung der Endomorphismenringe endlicher abelscher Gruppen*, Arch. Math. **18** (1967), 128-135.

[41] W. Liebert: *Charakterisierung der Endomorphismenringe beschrankter abelscher Gruppen*, Math. Ann **174** (1967), 217-232.

[42] W. Liebert: *Endomorphism rings of abelian p-groups*, Studies on Abelian Groups, Paris, (1968),239-258.

[43] H. Leptin: *Linear kompakte moduln und ringe*, Math. Z. **63** (1955), 241-267.

[44] A. Mader: *Basic Concepts on Functorial Topologies*, Abelian Group Theory - Proceedings of the Oberwolfach Conference, January 12-17,1981 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1981), 251-271.

[45] A. S. Parhomenko: *Uber eineindeutige stetige Abbildungen*, Math. Sb., **5(47)**(1939), 197-210.

[46] K. M. Rangaswamy: *Abelian groups with endomorphic images of special types*, J. of Algebra **6** (1969), 271-280.

[47] K. M. Rangaswamy: *Representing Baer rings as endomorphism rings*, Math. Ann. **190** (1970), 167-176.

[48] K. M. Rangaswamy: *Regular and Baer rings*, Proc. Am. Math. Soc. **42** (1974), 354-358.

[49] Ph. Schultz,: *On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **24** (1973), 59-63.

[50] K. Shoda: *Uber die Automorphismen einer endlichen abeleschen Gruppe*, Math. Ann. **100** (1928), 674-686.

[51] R. M. Stephenson Jr.: *Minimal topological groups* em Math. Ann. **192** (1971), 193-195.

[52] T. Szele: *Gruppentheoretische Beziehungen der Primkorper*, Mat. Aineiden Aikakauskirja, **13** (1949), 80-85.

[53] T. Szele: *Uber die Abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomorphismen-ring*, Publ. Math. (Debrecen), **1** (1949), 89-91.

[54] T. Szele, J. Szendrei: *On abelian groups with commutative endomorphism ring*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **2** (1951), 309-324.

[55] M. Stroppel: *Locally Compact Groups*, Version of 24.IV.1998.

[56] M. Ursul: *Topological Rings Satisfying Compactness Conditions*, Mathematics and its Applications, Vol. 549, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (2002).

[57] M. Ursul: *Unele proprietăţi ale inelului de endomorfisme*, Bul. Acad. de Ştiinţe a Rep. Moldova, 2(**12**) (1993), 17-21.

[58] M. Ursul: *Boundedness in locally compact rings*, Topol. and its Appl., (**55**) (1994), 17-21.

[59] S. Warner: *Topological rings*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 178, Elsevier, Amsterdam/London/New York/Tokyo,(1993).

[60] E. Weiss: *Boundedness in topological rings*, Pacific J. Math., (**6**) (1956), 149-158.

[61] D. Zelinsky: *Linearly compact modules and rings*, Amer. J. Math. **75** (1953), 79-90.